

傾斜した円管に満たされた粘性流体中を 降下する鋼球の挙動に関する研究

村田 裕幸*

On the Motion of Solid Spheres Falling through a Viscous Liquid in an Inclined Tube

By
Hiroyuki Murata

Abstract

It is well known that the falling velocity of a sphere in bounded flow field is much slower than that in open flow field. These studies are of importance as a base for applications, such as falling ball viscosimeter, packed bed, particle fluidization and hindered settling. A series of experiments, where falling velocities and angular velocities of the sphere in a circular tube filled with glycerin were measured, were conducted at various inclination angles in order to investigate their dependence on the inclination angle.

When the tube stands vertically, the sphere falls along off-center of the tube axis and rotates in a direction opposite to the direction for contact-type rolling along the side of the cylinder wall to which it was the closest. Present observation is different from the observation by Iwaoka et al. This is because the location of the sphere is hydrodynamically unstable, and the difference between the two observations is thought to be caused by disturbances at initial stage.

In inclined tube, the sphere falls along the lowest side of the tube. But a slip was observed between the sphere and the tube wall, and there must be a thin liquid film between the sphere and the tube wall. Even when gravity is modified by $\cos\theta$, the falling velocity shows a little dependence on the inclination angle and is well correlated with the following three parameters; the ratio between sphere radius and tube radius, the particle Reynolds number and the ratio between gravity and viscosity. The angular velocity shows general tendency that it decreases with the inclination angle, and the sphere finally rolls down along the tube wall without slip. However, the dependence of the angular velocity on the sphere radius is so complicated that the empirical function can't be derived only by the present data.

* 原子力技術部

目 次

	頁
1. 緒言	28
2. 実験装置と実験条件	29
3. 正立($\theta=0^\circ$)のときの実験結果と考察	30
3.1 単一の鋼球を投入した場合	30
3.2 複数の鋼球を投入した場合	34
4. 円管が傾斜したときの実験結果と考察	36
5. 結論	41
6. 謝辞	42
7. 参考文献	42

記 号 表

b	: 鋼球の中心から管中心軸までの距離
d	: 鋼球の直径
$e = b / (R - r)$: 鋼球の偏心率
$F = 4\pi r^3(\rho_p - \rho)g / 3$: 鋼球に作用する重力
g	: 重力の加速度
$K_u = u_\infty / u_t$: 壁面修正係数
$K_u' = u_\infty \cos \theta / u_t = \Pi_2$: 傾斜時の壁面修正係数
n	: 同時に投入する鋼球の数
R	: 円管の内半径
r	: 鋼球の半径
$Re_p = u_t d / \nu$: 粒子レイノルズ数
u_t	: 円管中を降下する鋼球の降下速度
u_∞	: 無限流体中を降下する鋼球の降下速度
$\epsilon = (R - r) / r = 1 / \Pi_1 - 1$: 鋼球と円管との無次元の間隙比
η_0, η_3	: 偏心率に依存するパラメータ [式(4), (5)]
μ	: グリセリンの粘性係数
ν	: グリセリンの動粘性係数
θ	: 円管の鉛直軸からの傾斜角
$\Pi_3 = \pi d^3 g (\rho_p - \rho) \cos \theta / (6\mu\nu)$: 重力と粘性の比を表す無次元パラメータ
ρ	: グリセリンの密度
ρ_p	: 鋼球の密度
Ω	: 鋼球の自転角速度

1. 緒 言

流体で満たされた管内を降下する球体の方が、境界のない無限の流体中を降下する球体よりもその速度が小さいということはよく知られている。こうした管路中を降下する球体の挙動に関する研究は、落球粘度計、沈澱槽、

管路による粒体・粉体の輸送、あるいは原子炉における二相流冷却といった応用分野の基礎となるものであり、今までに幾つかの報告がなされている。

管壁の影響による球体の降下速度の低下は、次式で定義される壁面修正係数によって評価される¹⁾。

$$K_u = u_\infty / u_t \quad \dots(1)$$

ここで、 u_t 、 u_∞ はそれぞれ管路中、無限の流体中を降下する球体の速度であり、 u_∞ は Stokes の法則によって次式で定義される。

$$u_\infty = d^2 g (\rho_p - \rho) / 18\mu \quad \dots(2)$$

単一の球体が鉛直な円管を降下する場合の壁面修正係数に関して、Haberman ら²⁾ は球体が円管の中心軸上を降下する場合について解析を行った。彼らは流れが粘性支配であると仮定して運動方程式の一般解を流れ関数によって表すことにし、Stokes の流れ関数の係数を無限個の線形代数方程式の和として記述した。解析には煩雑な計算が必要なため、Haberman らは無数個の線形代数方程式のうち、最初の 8 項を用いて壁面修正係数を計算した。

Paine ら³⁾ は Haberman らの手法に従いながらコンピュータを利用して、さらに 10, 12, 14 項までの線形代数方程式を考慮した解析を行った。Haberman らの解析手法では、球体と円管の半径比 (以後、半径比と呼ぶ) が大きくなるにつれて収束解を得るために、より多くの代数方程式が必要になるが、Paine らは①最初の 8 項の代数方程式を考慮すると $r/R=0.56$ まで、10 項まででは $r/R=0.66$ まで、12 項まででは $r/R=0.76$ までの半径比で小数以下 5 位までの精度で収束解が得られること、②14 項までを考慮すると、解の収束性は $r/R=0.90$ まで良好であり、このとき収束解は 12 項までを考慮した場合の解と殆ど一致していることを報告している。

Iwaoka ら⁴⁾ は、それまでの実験的研究の殆どが半径比が比較的小さい球体を用いたものであるため、それらの経験式は半径比が大きい球体に対して信頼性ある予測を与えないことを指摘し、半径比を 0.1 から 0.9 まで変化させた実験を行った。Iwaoka らは①測定された壁面修正係数が Habermann ら、Paine らの解析結果と一致していること、② $r/R=0.8$ までは鋼球は円管の中心軸上を自転しないで降下するが、③半径比がそれ以上になると鋼球はつねに中心軸からはずれ、自転しながら降下することを報告している。Iwaoka らは使用した円管断面の真円度や真直度の不完全さが自転の原因の一部ではないかと推測しているが、 $r/R > 0.8$ では必要な予

防策を採っても鋼球の自転は避けられなかったと報告している。

Bungay ら⁵⁾は球体と円管の隙間が非常に小さい場合の沈降問題に対して摂動法を適用し、厳密な潤滑理論を確立した。彼らは、①球体の降下に関して断面上で安定な位置はなく、球体は任意の位置を取りうること②球体の降下速度は球体が管中心軸からずれるにつれて大きくなり、 $e=0.98$ で最大となる($e=0.0$ のときの約2.1倍)こと③しかし、偏心率がそれより大きくなると降下速度は次第に減少し、 $e=1.0$ ではゼロとなること④球体は中心軸上では自転しないが、管中心軸からずれると“壁面に沿って転がり落ちるのは反対方向”(Fig.1参照)に自転運動を行うこと⑤自転角速度は偏心率が大きくなるにつれて増加するが、偏心率が1.0に近づくとき急激に減少し、ついには自転方向が逆転することを見出した。彼らは同じ手法を半径比が非常に小さい球体の沈降問題にも適用して⁶⁾、それまでの研究結果⁷⁾に新たな知見を付け加えた。

これらの研究結果より、円管中を降下する鋼球の挙動はその偏心率によって変化することが判るが、偏心率を制御することは非常に困難であるため、偏心率を積極的に変化させようとした研究は見あたらないようである。以上のことを踏まえ、他の実験結果との比較を行った上で、偏心率を変化させるため次の試みを行ったので、その結果について報告する。①鉛直な円管に鋼球を複数個連続的に投入し、鋼球相互の干渉によって偏心率を変化させる②円管を傾斜させ、重力の作用によって鋼球の偏

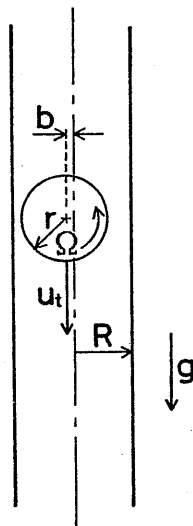


Fig.1 鉛直な円管を降下する鋼球

心率を固定する。

2. 実験装置と実験条件

実験装置の概略を Fig.2 に示す。実験に用いたのは長さ180cmのプレキシ・ガラス製の直円管である。円管の内・外径はそれぞれ $12.58 \pm 0.06 \text{ mm}$, $15.97 \pm 0.04 \text{ mm}$ である(本報告では、±の記号は測定値の平均2乗誤差を示す)。なお、円管の内径は本実験終了後、円管を数カ所で切り出して測定したものである。円管の表面は非常に滑らかであり、管軸に沿った内・外径の系統的な変化はなかった。管軸に沿って3カ所の測定区間(長さ $20 \pm 0.05 \text{ cm}$)が25cmの間隔で設けられた。投入に伴う過渡効果と端末効果が現れるのを避けるため^{4), 8)}、最初の測定区間の開始マークは円管の上端から30cm、最後の測定区間の終了マークは下端から40cmとした。円管は管軸に沿って3カ所で保持されており、円管の傾斜角は重錘と分度器によって決定された。傾斜角の誤差は $\pm 0.5^\circ$ 以下である。

実験には高い真球度を持った3種類の鋼球が用いられた($\rho_p = 7860 \text{ kg/m}^3$)。鋼球の平均直径はそれぞれ $11.09 \pm 0.005 \text{ mm}$, $9.52 \pm 0.005 \text{ mm}$, $5.56 \pm 0.005 \text{ mm}$ であった(以後、「大」、「中」、「小」の鋼球と呼ぶ)。それぞれのサイズとも鋼球ごとの直径のバラつきは非常に小さく、その表面は鏡面のように滑らかであった。なお、自転角速度を測定するためそれぞれの鋼球には油性インクで小さなマークが付けられた。

測定に先だって、円管は予め決められた傾斜角に固定されて下端に栓をされる。その後、瓶から出した新鮮なグリセリンを気泡が混入しないように注意を払いながら円管に満たす。グリセリンは吸湿性が強く、水分の吸着によって粘度が大幅に減少するため、実験中は円管の上端にも栓をした。毎日の測定の最初と最後にはチェックのため「大」の鋼球の降下速度を測定した。降下速度が測定誤差の範囲内に収まっていることが確認できた場合、測定中に湿分の吸収によるグリセリンの粘度変化はなかったとして、このデータは採用された。このようなチェックを行うと同時に、グリセリンはほぼ隔日ごとに交換された。

実験中に実験装置各部の温度差が生ずることを防ぐため、実験装置、鋼球、グリセリンは全て実験室の同じ場所に保管された。実験室の室温とグリセリンの温度は $\pm 0.25^\circ \text{ C}$ の精度を持つ水銀温度計によって常にモニターされており、両者の差は無視できるほど小さかった。一例を挙げれば、室温とグリセリンの温度変化は実験が行

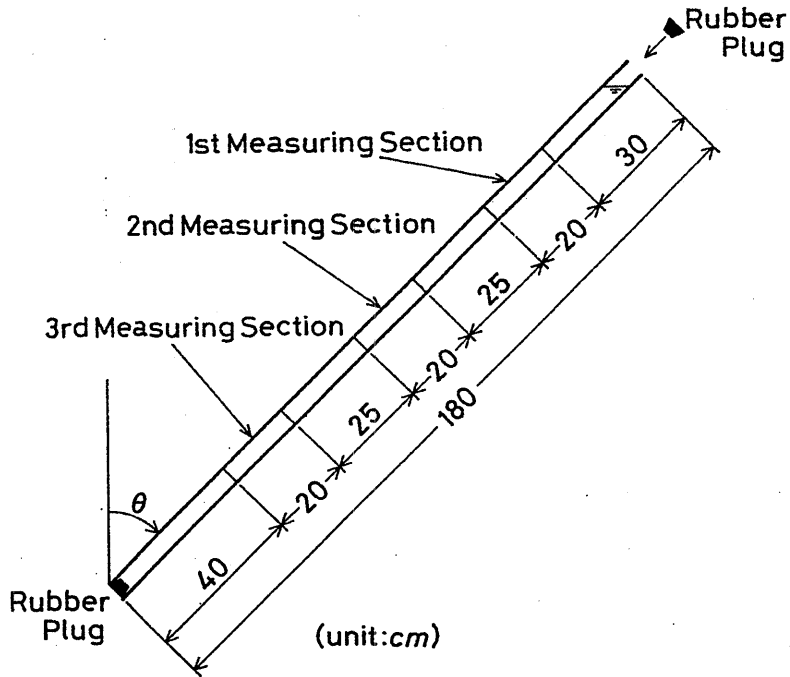


Fig.2 測定部の概略

Table1 実験条件

θ [deg.]	0	5	15	30	45	60	70	80
n = 1	○	○	○	○	○	○	○	○
n = 2	○	○	○	○				
n = 3	○	○	○	○				
n = 4			○					
n = 5			○					

われた 8 時間の間に 24.5°C から 26.4°C までであった。グリセリンの密度と粘度は公表された物性値⁹⁾を参照して温度によって内挿された。

Table1 に実験条件のマトリックスを示す。表のそれぞれの条件について 3 種類全てのサイズの鋼球が投入された。「大」、「中」、「小」の鋼球と円管との半径比： r/R はそれぞれ 0.882, 0.757, 0.442 である。表中の

それぞれのケースについて、鋼球の降下速度、自転角速度を測定するため、少なくとも 5 回の測定が行われた。それぞれの測定は鋼球を円管に投入して① 3 つの連続した測定区間の開始・終了マークを通過する時間② その区間において鋼球が一回転するのに要した時間を測定した。但し、降下速度・自転角速度は同時には測定できないので、それぞれ別に測定を行った。時間の測定はストップ・ウォッチで行い、その測定誤差は ± 0.02 秒であった。

測定された降下速度・自転角速度は、それぞれの測定区間について平均操作を施された。管軸に沿った各区間の平均値の差はそれぞれの平均 2 乗誤差の範囲内に収まり、系統的な変化も見いだされなかったため、さらにこの 3 区間の結果を平均して測定結果とした。また、同じ直径の複数個の鋼球を連続的に投入した場合の降下速度・自転角速度の測定も行った。

3. 正立 ($\theta = 0^\circ$) のときの実験結果と考察

3.1 単一の鋼球を投入した場合

円管が鉛直な場合の壁面修正係数の実験結果を Fig.3 に示す。横軸は鋼球と円管の半径比であり、縦軸は壁面

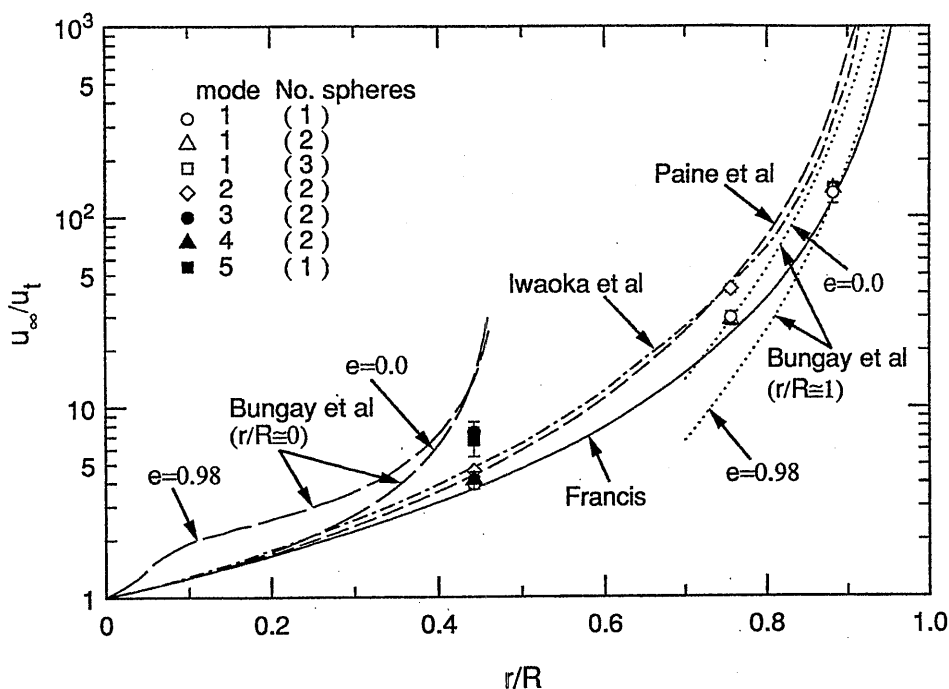


Fig.3 正立時の壁面修正係数

修正係数である。凡例において、それぞれのシンボルの隣の数字は鋼球の降下モード(後述)を表し、括弧内の数字は同時に投入された鋼球数を示す。図中の実線は次式

$$K_w = (1-r/R)^{-2.25} \quad \dots(3)$$

で表される Francis¹⁰ の実験結果であり、破線と一点鎖線はそれぞれ Paine らの解析結果, Iwaoka らの実験結果を示す。また, Bungay らが行った2つの解析 ($r/R=1$ と $r/R=0$ の場合) のうち, 鋼球が管中心軸を降下するときと管壁近くを降下するときの結果をそれぞれ示す。

本実験の単一の鋼球を投下した場合の壁面修正係数(図中, 白ヌキのマルで示す)は Francis の実験結果とよく一致しており, Iwaoka らの実験結果よりも小さい値を示す。本実験では, 全てのサイズの鋼球は円管の中心軸から外れて一方の壁に片寄り, Fig.1 に示すように“壁面に沿って転がり落ちるのは反対方向”の自転運動をしながら降下した(今後, モード1と呼ぶ)。一方, Iwaoka らは半径比を0.1から0.9まで変えた実験を行った結果, $r/R=0.9$ の場合を除いて, 鋼球は円管の中心軸上を自転しないで降下すると報告している。

本実験結果と Iwaoka らの結果との差異を

Bungay⁹ らの解析によって検討することにする。Bungay らは半径比がほぼ1の球体について自転運動を許す条件で解析を行い, 球体の降下速度と自転角速度について以下の式を導いた。

$$u_t = -8F(\eta_0^{-1} + e^2 / (2\eta_3))e^{2.5} / (9\pi^2 \mu r) + 0(e^3) \quad \dots(4)$$

$$\Omega = 2eF\epsilon^{1.5} / (6\pi^2 \mu r^2 \eta_3) + 0(\epsilon^2) \quad \dots(5)$$

ここで, η_0, η_3 は球体の偏心率 e の関数であり, F は次式で表される重力による力である。

$$F = 4\pi r^3 (\rho_p - \rho) g / 3 \quad \dots(6)$$

また, 円管と球体の間隙を表すパラメータ: ϵ は半径比と次式で関連づけられる。

$$\epsilon = (R-r) / r = R/r - 1 \quad \dots(7)$$

Fig.3 の点線は式(4)の第2項を無視し, $e=0.0, 0.98$ において計算した値である。

半径比が小さくなるにつれて ϵ の高次項の影響が無視できなくなるため, Bungay らの解析の誤差は次第に大きくなる。Table2 は式(4), (5)それぞれの右辺第1項に対する第2項の比を示す。この比は半径比だけではなく偏心率の関数でもあるので, 管中心軸上・壁近傍・その中間での値を示す。値が大きくなるにつれて Bungay

Table2 Bungay らの解析結果の誤差評価

1) 壁面修正係数の誤差評価

r/R	[Ratio] ₁		
	e=0.98	e=0.50	e=0.0
0.99	1.3944E-03	2.2017E-03	2.9399E-03
0.95	1.8011E-02	2.8438E-02	3.7974E-02
0.90	6.1555E-02	9.7193E-02	1.2978E-01
0.882	8.4682E-02	1.3371E-01	1.7854E-01
0.85	1.3813E-01	2.1810E-01	2.9123E-01
0.80	2.6293E-01	4.1516E-01	5.5436E-01

According to Bungay & Brenner,
(Int. J. Multiphase Flow, Vol.1, p.49, 1973)

$$U_0 = \underbrace{-8^{0.5} F(\eta_0^{-1} + e^2/2\eta_0)}_{\text{1st term}} \varepsilon^{2.5} / 9\pi^2 \mu r + \underbrace{0(\varepsilon^3)}_{\text{2nd term}} \dots [8.4]$$

$$[\text{Ratio}]_1 = [\text{2nd term}] / [\text{1st term}]$$

らの解析結果の適用妥当性は次第になくなる。本実験では鋼球は壁近傍に位置するため、 $e=0.98$ の計算値より考えると、「大」の鋼球の半径比($r/R=0.882$)までは第2項の寄与も10%以下であり、Bungay らの解析結果によって本実験結果に概略の定量的検討を加えることは可能と考えられる。

球体の偏心率がゼロのとき、Bungay らの解析結果は $r/R \geq 0.85$ では Iwaoka らや Paine らの結果とよく一致している。また、本実験の「大」の鋼球の壁面

修正係数は Bungay らの $e=0.0$ と $e=0.98$ の解析結果の間に収まっている。以上のことから、Iwaoka らの実験では鋼球は常に管中心軸上を降下したのに対し、本実験では鋼球が管壁の近傍を降下したことが両者の壁面修正係数・自転角速度の差となったものと考えられる。

Bungay らの解析結果が適用できない「中」、「小」の鋼球についても、①本実験結果と Iwaoka らの結果との差異が定性的に同じであること②管中心軸上を降下するとき(モード2, 後述)、本実験の壁面修正係数は

2) 自転角速度の誤差評価

r/R	[Ratio] ₂		
	e=0.98	e=0.50	e=0.01
0.99	5.3994E-05	5.2724E-05	2.4410E-03
0.95	6.6923E-04	6.5350E-04	3.0255E-02
0.90	2.1668E-03	2.1159E-03	9.7959E-02
0.882	2.9213E-03	2.8527E-03	1.3207E-01
0.85	4.5922E-03	4.4842E-03	2.0761E-01
0.80	8.2272E-03	8.0338E-03	3.7194E-01

According to Bungay & Brenner (ibid., p.49),

$$\Omega = \underbrace{2^{0.5} e F \varepsilon^{1.5} / 6 \pi^2 \mu r^2 \eta}_{\text{1st term}} + \underbrace{O(\varepsilon^2)}_{\text{2nd term}} \dots [8.5]$$

$$[\text{Ratio}]_2 = [\text{2nd term}] / [\text{1st term}]$$

Iwaoka らの結果と一致することから、鋼球の偏心率がその原因と考えられる。

本実験では、鋼球を管中心軸上に注意深く投入してもグリセリンの自由表面で鋼球の位置が変化するために、鋼球を常に管中心軸上に降下させることは非常に困難であった。Christopherson ら¹¹⁾ は半径比がほぼ 1 に等しい ($0.9251 \leq r/R \leq 0.9921$) 鋼球を用いて本実験とほぼ等しい粒子レイノルズ数範囲 ($10^{-3} < Re_p < 10^{-1}$) で実験を行い、球体は常に管壁に向かって移動し、自転しながら降下すると報告している。また、McNown ら¹²⁾ も 10^{-3} 以上の粒子レイノルズ数では、半径比がほぼ 1 の球体は中心軸より管壁に向かって移動する傾向があることを報告している。

時間と共に降下する鋼球の管壁との間隙を直接測定する簡便な方法がなかったため、本実験では鋼球と管壁と

の距離を測定していない。Fig.4 は、本実験における「大」の鋼球の偏心率を推定するため、 $r/R=0.882$ として式(4)、(5)の第 1 項を計算したものである。横軸は偏心率であり、縦軸の左側は壁面修正係数、右側は無次元の自転角速度である。壁面修正係数 (マル印) と自転角速度 (△印) それぞれの実験結果と解析結果との比較から、鋼球の位置を推定することにする。

実験結果が解析結果と一致する範囲から考えて、壁面修正係数からは $0.73 < e < 1.0$ 、自転角速度からは $0.97 < e < 1.0$ と推定される。「大」の鋼球の場合、式(4)、(5)中の第 2 項の寄与は無視できないが、それを考慮しても両者の平均値から推定する偏心率の間には差がある。これは、鋼球の偏心率が常に不安定で測定の都度異なるため、両者の平均値から推定する偏心率は必ずしも一致しないからだと考えられる。さらに、鋼球の降下速度と

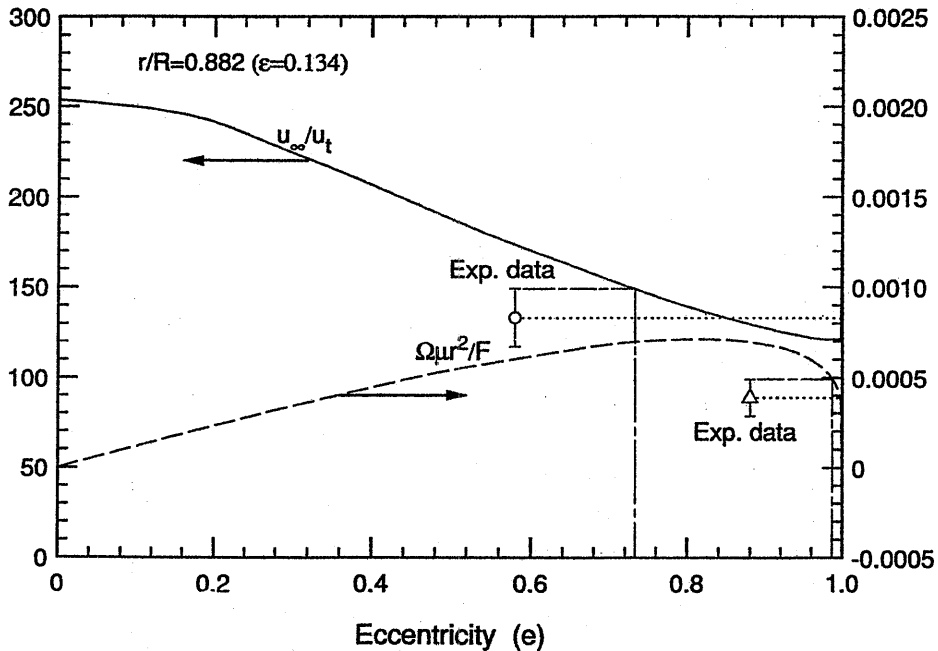


Fig.4 Bungay らの解析結果より求めた壁面修正係数・
自転角速度の偏心率に対する変化

自転角速度とを同時に測定できなかったことも誤差を大きくした原因と考えられる。ただ、鋼球の位置が不安定だと言っても、測定された壁面修正係数・自転角速度の平均 2 乗誤差は式(4), (5)からの推定値の偏心率による変化に比べてかなり小さく、実際の偏心率は常にある範囲内に収まっているものと考えられる。大ざっぱに言って、「大」の鋼球の偏心率は 0.8 から 1.0 の間と推定される。「中」、「小」の鋼球の偏心率については比較すべき解析結果がなかったが、目視観察により「大」の鋼球と同程度の値と考えられる。

3.2 複数の鋼球を投入した場合

複数個の鋼球を連続的に投入すると、鋼球は管壁とだけでなく鋼球相互でも干渉するため、種々の降下モードが観察された。鋼球の半径が小さくなるほど空間的自由度が大きくなるため、半径比が小さい鋼球ほど多くの種類の降下モードが観察された。観察された降下モードは 1 から 5 までに分類されるが、4 個以上の鋼球が相互に干渉するモードは見いだされなかった（4 個以上投入しても、降下の途中でいくつかのグループに分裂した）。モード 1 は鋼球が管中心軸からずれ、「管壁に沿って転

がり落ちるのは反対の方向”に自転しながら降下するモードであり、全てのサイズの鋼球が 1～3 個干渉した場合に観察された。Photo 1 は「大」の鋼球が 3 個干渉したときのモード 1 の結果を示す。

モード 2 は鋼球が管中心軸上を自転しないで降下するモードであり、本実験では「中」、「小」の鋼球が 2 個で干渉して降下するときに観察された。モード 2 は Iwaoka が報告しているモードであるが、本実験では複数の鋼球を投入したときのみ実現した。Photo 2 は「小」の鋼球の場合のモード 2 の結果を示す。

Photo 3 は鋼球が 2 個、隣接して同一平面上を自転しながら降下する様子を示しており、これをモード 3 と呼ぶ。なお、2 個の鋼球の自転軸は水平で、その回転方向はモード 1 と同様、管壁に沿って転がり落ちるのは反対の方向である。モード 3 は「小」の鋼球が 2 個干渉するときに観察された。

Photo 4, 5, 6 は鋼球が 2 個繋って螺旋状の軌跡を描きながら降下する様子を連続的に示しており、これをモード 4 と呼ぶ。モード 4 は「小」の鋼球が 2 個干渉するときに観察された。

この他に、鋼球が 1 個単独でモード 1 よりも管壁のご

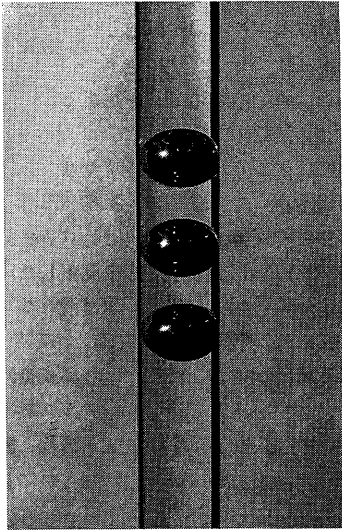


Photo1 モード1 (「大」の鋼球)

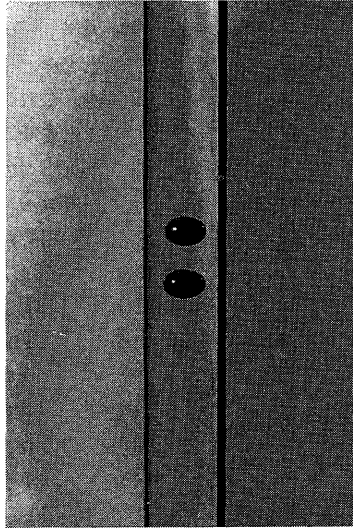


Photo2 モード2 (「小」の鋼球)

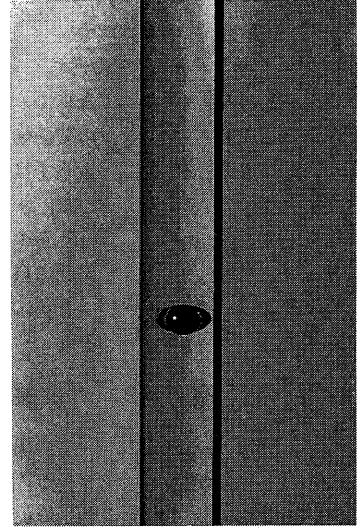


Photo3 モード3 (「小」の鋼球)

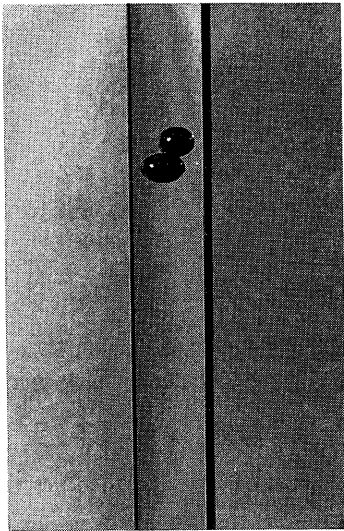


Photo4 モード4 [1/3]
(「小」の鋼球)

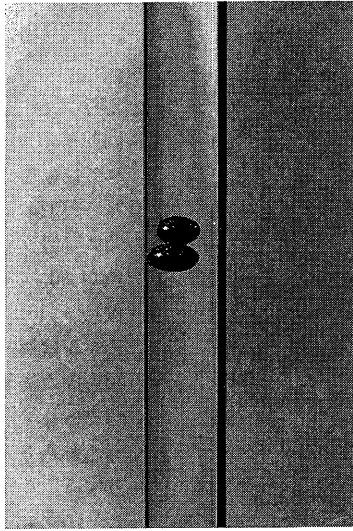


Photo5 " [2/3]
(")

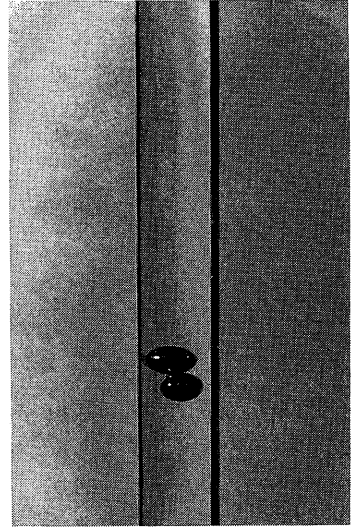


Photo6 " [3/3]
(")

く近傍（目視観察では鋼球が管壁に接触しているように見えた）を自転しないで降下するモード5も観察された。モード5は「小」の鋼球について観察されたが、単一の鋼球を投入したときには実現せず（全てモード1となる）、複数個の鋼球を投入したときにのみ実現した。

Fig.3にこれらのモードの壁面修正係数を示す。モード1の結果は鋼球の個数によらずほぼ同一の値であり、式(3)で整理できることがわかる。また、モード2の壁面修正係数は Iwaoka, Paine らの結果とよく一致している。モード3, 4, 5は空間の自由度が大きい「小」の鋼球についてのみ観察されたが、それぞれ独自の壁面修正係数の値を持つ。

4. 円管が傾斜したときの実験結果と考察

以上の結果から、円管が鉛直の場合、①鋼球の壁面修正係数や自転角速度は円管断面上の位置によって大きく異なること②鋼球の円管断面上の位置は不安定であり、常に変化することが明らかになった。そこで、円管を傾斜させることによって重力の半径方向の成分を鋼球に作用させ、鋼球を円管の下側に寄せることにした。このとき、鋼球と円管壁の間隙は見かけ上ゼロであり、常に一定だと考えられる。後述するように、円管を傾斜させた場合、壁面修正係数・自転角速度の実験結果の平均2乗誤差は正立の場合に比べて減少しており、これは鋼球と管壁の間隙が各測定ごとに一定であることによるものと考えられる。

円管を傾斜させた場合の鋼球の挙動については、僅かな傾斜角範囲について調べた二、三の研究結果が報告されているが、傾斜角の及ぼす影響について系統的に調べた研究は見あたらない。

Zolotych¹³⁾はこの問題について次元解析を行い、傾斜角が一定であれば、次の3つのパラメータ

$$\Pi_1 = r/R \quad \dots(8)$$

$$\Pi_2 = Re_p = u_t d / \nu \quad \dots(9)$$

$$\Pi_3 = \pi d^3 g (\rho_p - \rho) \cos \theta / (6 \mu \nu) \quad \dots(10)$$

が現象を支配することを明らかにした。最初のパラメータは鋼球と円管の半径比であり、2番目のパラメータは粒子レイノルズ数である。また、3番目のパラメータは鋼球に作用する重力の管軸方向成分と流体の粘性力の比を表す。Zolotychはさらに、鉛直軸から10°傾斜させた円管に入れた6種類の高粘性流体の中に種々の半径比(0.125 ≤ r/R ≤ 0.9915)のガラス球、鋼球を投入し、その降下速度を測定した。その結果、①同一半径比のデータについて粒子レイノルズ数とΠ₃とで整理し両対数上

で表すと、同じ勾配を持つ直線となること②特に0.8344 ≤ r/R ≤ 0.9915の半径比ではデータは正確に直線となり、そのy切片も半径比の関数として記述されること③それ以下の半径比ではデータにバラつきが見られるが、これは球体と円管壁の間に滑りが生ずるためであることを明らかにした。

Block¹⁴⁾は混合比の異なる5種類のグリセリン+エチルアルコール混合液を用いて、鉛直軸から67, 73, 77, 80, 83, 87°傾斜させた円管に半径比: r/R=0.769の鋼球を投入し、その降下速度・自転角速度を測定した。その結果、①80, 83, 97°の傾斜角では鋼球は滑りなしの転がり(様式IV, 後述)で円管を降下するが、67, 73, 77°の傾斜角では鋼球は滑りを伴った転がり(様式III)で管壁を降下すること②測定結果を粒子レイノルズ数とΠ₃' = Π₃/Re_p²で整理すると、滑りなしの転がりと滑りのある転がりではその勾配が異なることを明らかにした。

Floberg¹⁵⁾は、半径比が殆ど1である球体を正立した円管に投入した場合について、レイノルズの潤滑理論をもとに解析を行い、Bungayらと同様の結果を得た。また、円管を鉛直軸より僅かに傾斜させて(θ=3~4°)実験を行い、降下速度の測定値が解析結果と良好に一致することを明らかにしている。

Fig.5に円管が傾斜した場合の鋼球の転がりの様子を模式的に示す。傾斜角が小さい場合、鋼球の自転方向は正立時と同様に鋼球の転がり落ちる方向とは反対の方向に回転する(様式I)。しかし、傾斜角が大きくなるにつれて自転角速度は減少し、ついにはゼロとなる(様式II)。その後、自転方向は逆転するが、まだ鋼球と管壁の間には滑りが存在する(様式III)。「大」の鋼球では傾斜角が80°のときついに滑りなしの転がりとなる(様式IV)。

Fig.6は鋼球の転がり速度(=半径×自転角速度)と管軸方向の降下速度の比を示したものである。横軸は傾斜角であり、縦軸は転がり速度と降下速度の比を表す。また、転がり方向は正立の場合の方向(Fig.1参照)を正とする。このとき鋼球の滑りなしの転がりの条件は

$$\Omega r / u_t = -1.0 \quad \dots(11)$$

で表されるが、この条件を満たすのは「大」の鋼球のθ=80°のときだけであり、それ以外の場合には鋼球と管壁の間には滑りが存在することがわかる。また、各サイズの鋼球は傾斜角が大きくなるにつれて滑り量が減少する傾向を示す。これより、鋼球と管壁の間には(厚さは不明ながらも)グリセリンの膜(以後、油膜と呼ぶ)

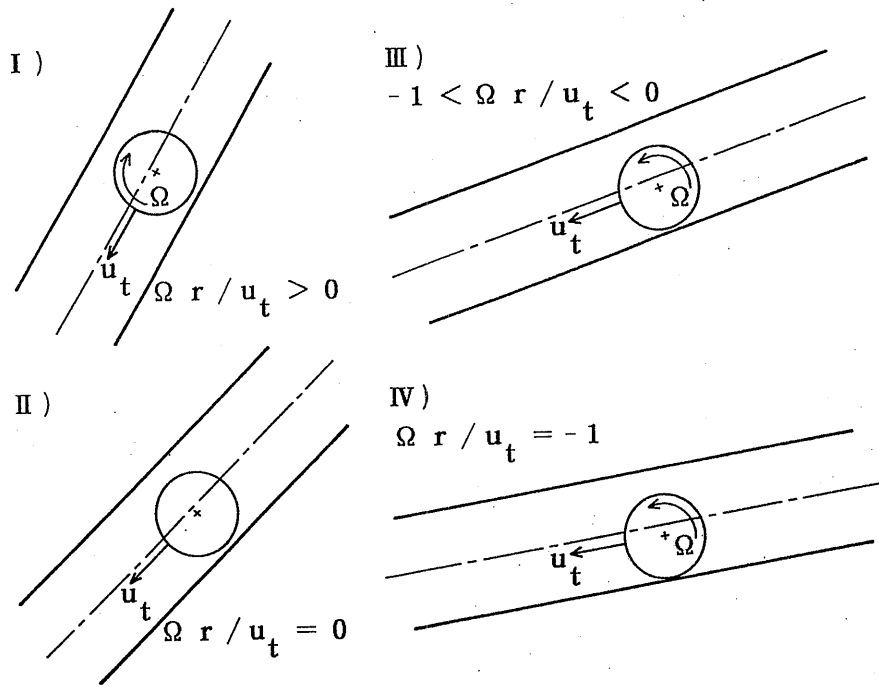


Fig.5 転がりの様式の分類

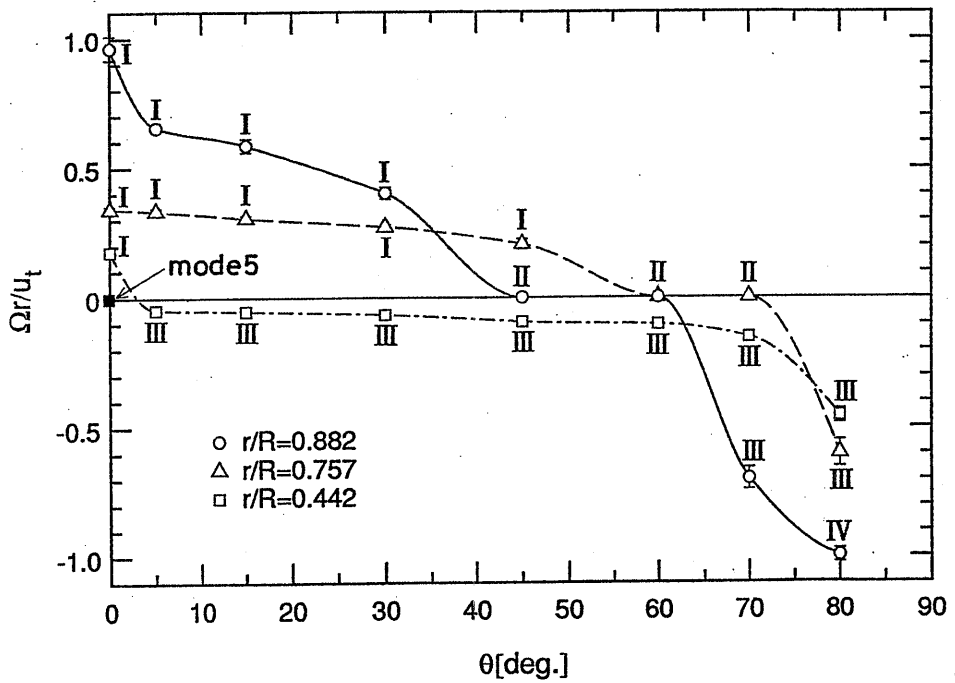


Fig.6 転がり速度/降下速度比の傾斜角による変化

が存在し、流体潤滑を起こしていると推定される。

Fig.7に「大」、「中」、「小」それぞれの鋼球の壁面修正係数と傾斜角の関係を示す。円管が傾斜しているとき、鋼球の降下に寄与する重力の管軸方向成分は $F \cos \theta$ であるから、壁面修正係数は次式で定義される。

$$Ku' = u_{\infty} \cos \theta / u_t \quad \dots(12)$$

図には単一の鋼球を投入した場合の結果を示すが、複数個の鋼球を連続して投入しても、鋼球は管壁の一番低い部分に沿って順に降下するため、複数個の結果は単一球の場合と差異がなかった。各シンボルをつなぐ直線は最小2乗法で求めた整理式であり、「大」、「中」、「小」の鋼球それぞれについて以下の式で表される。

$$Ku' = 135.0 \times 1.271^{\theta} \quad \dots(13)$$

$$Ku' = 26.87 \times 1.316^{\theta} \quad \dots(14)$$

$$Ku' = 6.954 \times 1.433^{\theta} \quad \dots(15)$$

ただし θ の単位は [rad.] であり、「小」の鋼球の正立のときの結果は後述する理由からフィッティングから除外した。また、「小」の鋼球のモード5の壁面修正係数も同時に示す。

円管を傾斜させた効果を「大」の鋼球の $\theta = 5^\circ$ と正立時の結果との比較によって考える ($\theta = 5^\circ$ では重力の管軸方向成分の変化は0.4%以下であり、Bungayらの解析結果はまだ適用可能である)。 $\theta = 5^\circ$ では測定値の平均2乗誤差が減少するものの、平均値は正立の場合と殆ど変わらない。これより、偏心率は傾斜によって殆ど変化せず、かつ試行ごとのバラつきが減少することがわかる。「中」の鋼球についても同様の結果である。一方、「小」の鋼球では正立と $\theta = 5^\circ$ の結果の間に大きな差があり、後述の自転角速度の結果 (Fig.8) でも同様の大きな差を示す。式(15)の y 切片 (=6.954) がモード1より油膜厚さの薄いモード5の壁面修正係数 ($Ku=6.647$) とほぼ等しいことから、「小」の鋼球では偏心率が傾斜によってかなり増大すると考えられる。

傾斜した円管の壁面修正係数は整理式とよく一致しており、半径比によらず傾斜角の増大につれてわずかに増加する傾向を示す。式(12)は重力の管軸方向成分の傾斜角による変化を補正しているため、壁面修正係数の傾斜角による変化はそれ以外の要因 (例えば、重力の半径方向成分) が作用していることを示すと考えられる。

Fig.8は鋼球の無次元自転角速度の傾斜角による変化を示したものであり、Fig.6と同様、自転角速度は正立時の方向を正とした。また、「小」の鋼球のモード5の実験結果も併せて示す。正立のとき、全ての (モード1) の自転角速度は正であり、半径比が大きいほどその値

は小さい。円管が傾斜すると全ての自転角速度は傾斜角の増加につれて次第に減少し、ついには自転方向が逆転する。また、「小」の鋼球は正立時と $\theta = 5^\circ$ で偏心率が異なるため自転角速度も大きく異なっており、偏心率が傾斜時とほぼ同じと思われるモード5の自転角速度はゼロである。自転角速度に及ぼす半径比の影響は複雑で、この3ケースだけで一定の傾向を見出すのは困難である。

傾斜した円管中を降下する球体の自転角速度については研究者の間でも互いに矛盾している。Zolotykh¹³⁾ は $\theta = 10^\circ$ に傾斜させた円管中を $0.8344 \leq r/R \leq 0.9915$ なる半径比の鋼球は滑りなしの転がり (様式IV) で降下すると報告しており、McNown¹²⁾ の報告もこの点で一致している。しかし、本実験の「大」の鋼球の $\theta = 5^\circ, 15^\circ$ の結果から考えると、彼らの結果と本実験結果とは明らかに食い違っている。一方、Floberg¹⁵⁾ は $0.9881 < r/R < 0.9973$ の鋼球は $\theta = 3 \sim 4^\circ$ では自転しないで降下した (様式II) が、 $0.9141 < r/R < 0.9766$ の鋼球は $\theta = 11.5^\circ$ で $\Omega = 0$ となるまで様式Iの転がりを示したと報告している。半径比が増大するにつれてIからIIへ転がりの様式が変化する傾斜角が減少する傾向は、本実験の「大」、「中」の鋼球の結果と一致している。また、Block¹⁴⁾ は $r/R = 0.769$ の鋼球を投入すると $80^\circ \leq \theta \leq 87^\circ$ の傾斜角では滑りなしの転がり (様式IV) を、 $67^\circ \leq \theta \leq 77^\circ$ では滑りを伴った転がり (様式III) をすると報告している。半径比がほぼ等しい本実験の「中」の鋼球では $70^\circ < \theta \leq 80^\circ$ で様式IIの転がりを示しており、傾斜角が若干ずれているものの、彼らの結果とほぼ一致している。Bungay⁹⁾ らは彼らの解析結果より、鋼球と管壁の間隙のわずかな変化が自転角速度に大きな影響を及ぼすとし、実験結果が相互に矛盾する原因はそれらの実験における間隙の違いだとしている。本実験も含めて鋼球と管壁の間隙を直接測定した例はなく、今後自転角速度の詳細な検討を行うには間隙の精度の高い測定が不可欠となる。

Fig.9に本実験のそれぞれの半径比の鋼球について粒子レイノルズ数と Π_3 とで整理した結果を示す。シンボルを繋ぐ直線は最小2乗法によって求めたものであり、「小」の鋼球の正立のときのデータはフィッティングから除外した。それぞれのシンボルでは Π_3 が小さくなるにつれて傾斜角が大きくなる。なお、図中の二点鎖線はBlock¹⁴⁾ が得たグリセリン中を滑りなしで転がる鋼球の結果 ($80^\circ \leq \theta \leq 87^\circ$) を書き直した式

$$Re_p = 1.123 \times 10^{-3} \Pi_3^{1.121} \quad \dots(16)$$

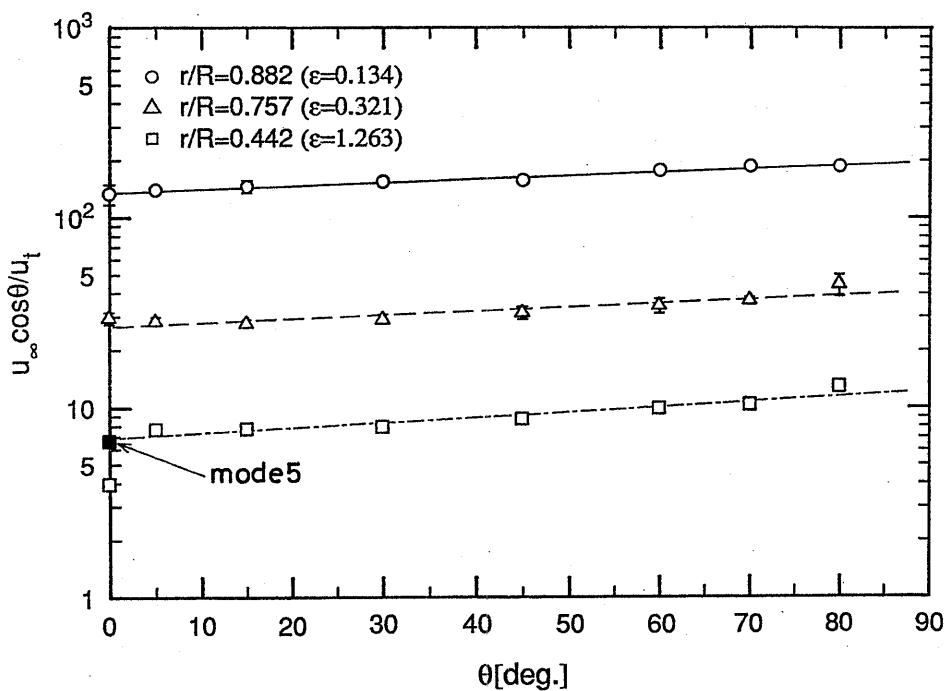


Fig.7 壁面修正係数の傾斜角による変化

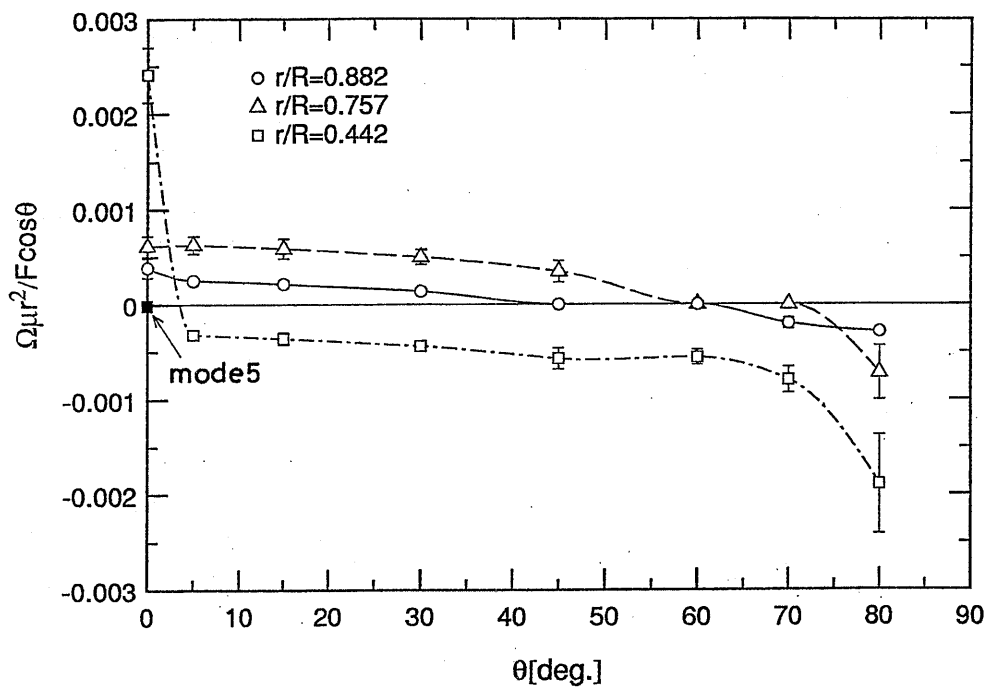


Fig.8 自転角速度の傾斜角による変化

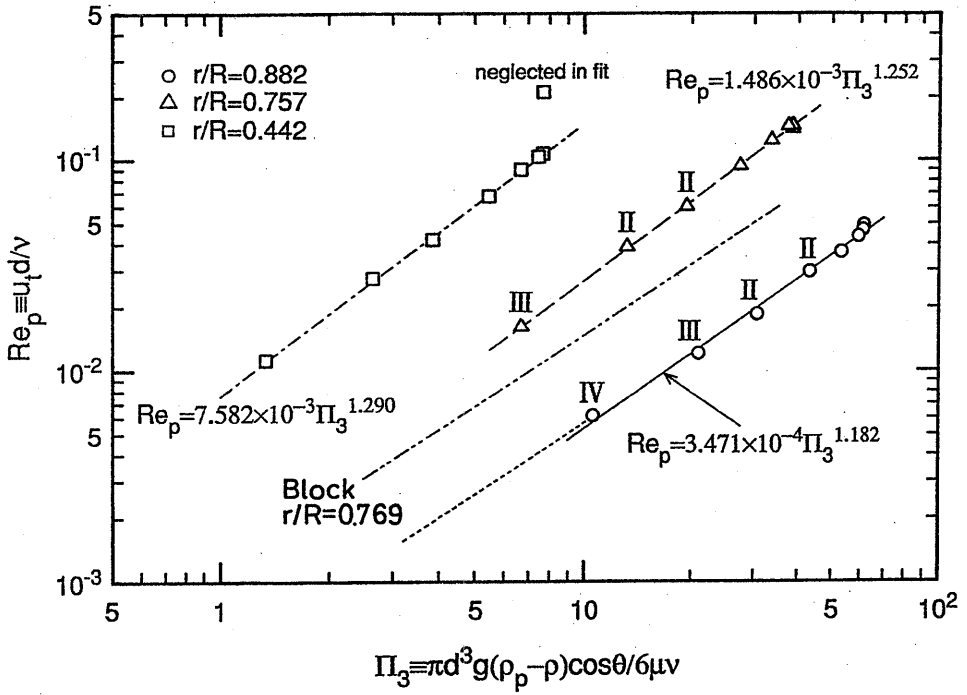


Fig.9 鋼球の降下速度の無次元整理

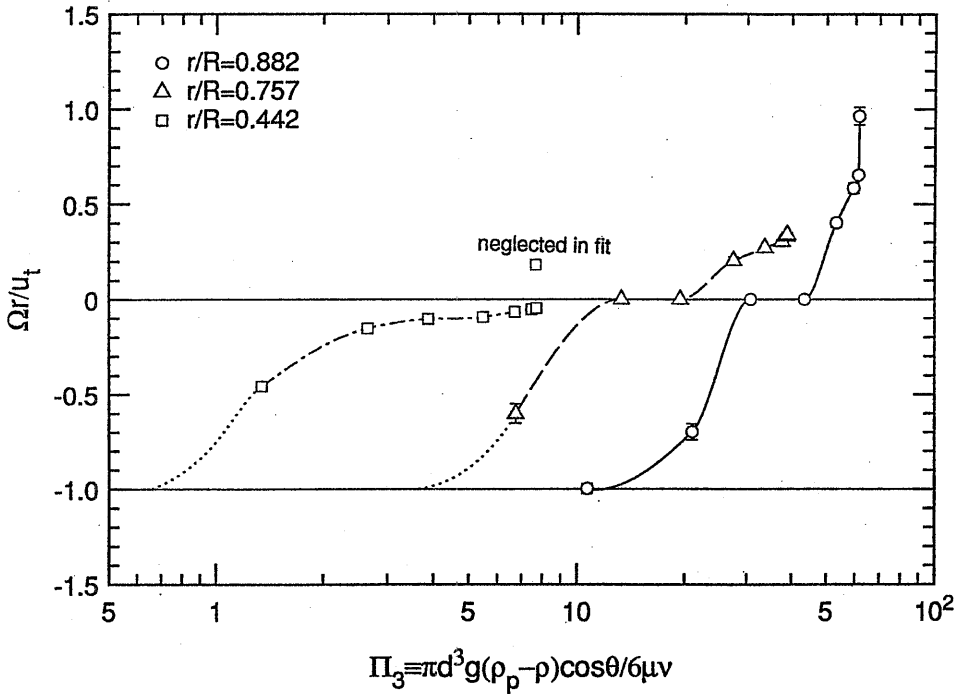


Fig.10 鋼球の自転角速度の無次元整理

である。式(16)は半径比が1.5%しか違わない本実験の「中」の鋼球の結果と比べて粒子レイノルズ数を低めに見積っている。

本実験結果は、傾斜角によって転がりの様式が異なるにもかかわらず、シンボルごとに一本の直線で整理でき、それぞれの整理式の Π_3 の指数も1.2~1.3と半径比によらずほぼ等しい値を示す。一方、Block は転がりの様式によって Π_3 の指数が変化する(滑りのない転がりでは1.121, 滑りのある転がりでは1.482)ため、実験結果は折れ曲がると報告している。本実験では傾斜角を細かく変化させなかったため、唯一III, IVの様式の転がり両方を示す「大」の鋼球の結果からそれぞれの勾配を求めることは出来なかった。このため、Block の主張した勾配の違いは確認できない。

そこで試算として、「大」の鋼球が $\theta \geq 80^\circ$ で滑りなしの転がりを行うとし、 $\theta = 87^\circ$ ($\Pi_3 = 3.219$) までその勾配は Block の式(16)にしたがうとした結果を図中の点線で示す。式(16)の勾配は本実験の勾配と殆ど変わらないため、「大」の鋼球の結果と点線とをまとめて一本の直線で整理できる(このとき、整理式は $Re_p = 4.054 \times 10^{-4} \Pi_3^{1.141}$)。これより、Block が報告した勾配の違いによって本実験の整理法の有効性が損なわれないことが明らかになった。

Fig.10 にそれぞれの半径の鋼球に対する転がり角速度/降下速度の比を前述の無次元数 Π_3 で整理した結果を示す。降下速度に関する支配パラメータが粒子レイノルズであったように、この速度比が自転角速度に関する支配パラメータである。傾斜角が増大して Π_3 が減少するにつれて「大」の鋼球の速度比は減少し、ついには $\Omega r / u_t = -1.0$ となる。「中」、「小」の鋼球の結果も同様の傾向を示す(それぞれの結果に付けられた点線は実験結果を滑らかに延長した予想を示す)。また、半径比が大きくなるほど速度比の変化量が増大する傾向も見い出される。しかし、これら3つの半径比だけから整理式を求めることは困難である。また、「大」、「中」の鋼球において、傾斜角が変化しても $\Omega = 0$ と一定となる領域が存在し、Bungay ら⁵⁾ が指摘したように球体表面の凹凸、球体と管壁との接触摩擦といった非流体力学的要因が現象に影響していることを窺わせる。しかし、本実験結果からこれを断定することは困難であり、詳細な検討のためには今後鋼球と管壁の間隙の直接測定や球体・管壁表面のミクロな観察が必要である。

5. 結 論

グリセリンを満たした円管に鋼球を投入し、その降下速度・自転角速度を測定する実験を①鋼球の半径②投入する鋼球の数③円管の傾斜角をパラメータとして行った。実験結果から鋼球の挙動の傾斜角依存性を明らかにし、他の研究結果との比較・検討も行った。本研究で得られた結論は以下の通りである。

(1) 鉛直な円管中を降下する単一の鋼球は、半径比によらず管中心よりずれ、壁に沿って転がる場合とは反対の向きに自転しながら降下する。この実験結果は「鋼球は管中心軸上を自転しないで降下する」という Iwaoka らの報告とは異なるが、Bungay らの解析によれば、鋼球の円管中心軸上の位置は流体力学的に不安定な平衡点であるとされており、本実験結果はこの不安定性によるものと考えられる。

(2) 鉛直な円管に複数の鋼球を連続的に投入すると、鋼球は他の鋼球とも相互に干渉する。このため種々の降下モードを示し、それぞれ独自の壁面修正係数を持つ。また、観察された降下モードの種類は空間的自由度の大きい、すなわち半径比の小さい場合ほど多い。

(3) 円管を傾斜させると重力の半径方向成分によって鋼球は管壁の底部に沿って降下する。鋼球と管壁の間には間隙があるため、半径比が最も大きい「大」の鋼球の $\theta = 80^\circ$ の場合を除いて、両者の間には滑りが存在する。また、この間隙はそれぞれの傾斜角ごとに一定であるため、降下速度・自転速度のバラつきは正立時に比べて減少する。しかし、半径比が最も小さい「小」の鋼球では傾斜によって間隙が変化するため壁面修正係数・自転角速度が正立時と傾斜時とは大きく異なる。複数の鋼球を投入しても単一球の場合と挙動に差異は観察されなかった。

(4) 傾斜角による重力の軸方向成分の変化を補正してもなお、壁面修正係数は傾斜角依存性を示すが、この依存性は非常に小さい。それゆえ、全ての傾斜角範囲における鋼球の降下速度は半径比、粒子レイノルズ数、重力と粘性力との比の3つの無次元数によってほぼ整理でき、Fig.9 中の式が得られた。

(5) 自転角速度は傾斜角が増加するにつれて正立時の値から減少し、やがて自転方向は逆転する。しかし、この変化の傾斜角依存性は半径比によって複雑に変化し、本実験結果からだけで整理式を導出するのは困難であった。無次元数による整理法も同様に困難であり、現象の精密な把握のためには表面粗さ等のミクロな量の測定が

不可欠であると考えられる。

なお、機器への応用に関して本研究結果から以下の寄与があった。現在、落球粘度計において鋼球の偏心率の影響を排除するため円管を傾斜させる場合には、傾斜角が 10° のときのみ測定が行われており^{13), 15)}、それ以外の傾斜角では、降下速度と自転角速度の関係が不明であるとして粘度の測定は行われていない。しかし、鋼球の転がりの様式に関わらず、粘度は任意の傾斜角における鋼球の降下速度と Fig.9 から求められることが本研究結果より明かとなった。しかし、本実験では鋼球と円管の半径比の影響が整理式の形で定量化できていないため、本実験で使用した半径比以外の鋼球を用いる場合には新たに実験式を求める必要がある。

6. 謝 辞

本報告は、筆者が原子力関係在外研究員としてカリフォルニア大学バークレー校機械工学科に滞在中に行った研究の一部をまとめたものであり、同校に滞在中終始御指導いただいた J.A.C. Humphrey 教授に謝意を表します。また、原子力技術部伊従功部長には本原稿に関して貴重な御助言を頂きました。ここに記して謝意を表します。

7. 参 考 文 献

- 1) Clift, R., Grace, J.R. and Weber, M.E., "Bubbles, Drops and Particles", Academic Press, 1978, p.223
- 2) Happel, J. and Brenner, H., "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965, p.318
- 3) Paine, P.L. and Sherr, P., "Drag Coefficients for the Movement of Rigid Spheres through Liquid-Filled Cylindrical Pores", Biophysical J., vol.15, 1975, pp.1087~1091
- 4) Iwaoka, M. and Ishii, T., "Experimental Wall Correction Factors of Single Solid Spheres in Circular Cylinders", J. Chem. Engng Japan, vol.12, No.3, 1979, pp.239~242
- 5) Bungay, P.M. and Brenner, H., "The Motion of a Closely-Fitting Sphere in a Fluid-Filled Tube", Int. J. Multiphase Flow, vol.1, 1973, pp.25~56
- 6) Bungay, P.M. and Brenner, H., "Pressure Drop due to the Motion of a Sphere near the Wall bounding a Poiseuille Flow", J. Fluid Mech., vol.60, part1, 1973, pp.81~96
- 7) Greenstein, T. and Happel, J., "Theoretical Study of the Slow Motion of a Sphere and a Fluid in a Cylindrical Tube", J. Fluid Mech., vol.34, part4, 1968, pp.705~710
- 8) Tanner, R.I., "End Effects in Falling-Ball Viscometry", J. Fluid Mech., vol.17, 1963, pp.161~170
- 9) 日本機械学会, 伝熱工学資料 (改訂第4版), p.325, 1986
- 10) Francis, A.W., "Wall Effect in Falling Ball Method for Viscosity", Physics, vol.4, 1933, pp.403~406
- 11) Christopherson, D.G. and Dowson, D., "An Example of Minimum Energy Dissipation in Viscous Flow", Proc. Roy. Soc., A251, 1959, pp.550~564
- 12) McNown, J.S., "Analysis of the Rolling-Ball Viscometer", The University of Michigan Engineering College-Industry Program, IP-160, 1956, 10pp.
- 13) Zolotykh, E.V., "Deriving Basic Formulas for Viscosimeters with an Inclined Tube", Measurement Tech., No.4, 1962, pp.44~48
- 14) Block, R.B., "On the Resistance to the Uniform Motion of a Solid Through a Viscous Liquid", J. Appl. Phys., vol.11, 1940, pp.635~642
- 15) Floberg, L., "On the Ball Flowmeter and the Ball Viscosimeter", Acta Polytechnica Scandinavia, Ser. No. ME36, 1968, 28pp.