

低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ 乱流モデルの壁近傍領域における挙動に関する基礎的研究

春海 一佳

Fundamental Study on the Near-Wall Behavior of the Low-Reynolds-Number $k-\epsilon$ Turbulence Model

By

Kazuyoshi HARUMI

Abstract

The validity of six $k-\epsilon$ models was investigated by comparing the results of each model for the fully developed turbulent channel flow to the results of the direct numerical simulation(DNS) by Kim, Moin and Moser(1987).

Most models show good agreement with DNS for the mean velocity profile, while they have disagreements for the profile of the turbulence energy k .

The near-wall behavior of the viscous diffusion term and dissipation term in every model except Kasagi's model have a qualitative discrepancy from the DNS results. The failure in the prediction of the k profile may be due to this fact.

The pressure-turbulence diffusion terms in k and ϵ equations are inconsistent with the near-wall behavior which are derived theoretically. A new model is presented which modifies the pressure-turbulence diffusion term and these defects are reduced to more closely satisfy the theoretical behavior. These modifications revise the behavior of the viscous diffusion term and dissipation term to give better agreement with the DNS results. In addition, these modifications effect the heat transfer calculation, especially for high Prandtl number fluids.

目次

1. はじめに	2
2. 各種 $k-\epsilon$ モデルの比較	3
2.1 基礎式	3
2.2 計算方法	5
2.2.1 境界条件	5
2.2.2 差分法	6
2.3 結果及び考察	6
2.3.1 平均速度分布	6
2.3.2 乱流エネルギー分布	6
2.3.3 乱流粘性分布	8
2.3.4 k 方程式の各項の挙動	8
2.3.5 ϵ 方程式の各項の挙動	10
2.4 結論	12
3. 圧力乱流拡散項の変更	12
3.1 $k-\epsilon$ モデルの壁面近傍での挙動	12
3.2 圧力乱流拡散項の壁面近傍での挙動	12
3.3 結果及び考察	14
3.3.1 k 方程式の各項の挙動	14
3.3.2 ϵ 方程式の各項の挙動	14
3.3.3 平均速度分布	16
3.3.4 乱流エネルギー分布	16
3.4 結論	17
4. 温度場の計算	17
4.1 基礎式	17
4.2 計算方法	18
4.2.1 境界条件	18
4.2.2 差分法	18
4.3 結果及び考察	18
4.4 結論	19
5. まとめ	20
謝辞	20
参考文献	20

1. はじめに

エネルギーの有効利用に対する要求が、社会の各分野で高まっているが、船用機関においても例外ではない。実際、エンジンのエネルギー効率の改善を目指して、新素材の開発及びその利用等の研究がなされている。同時に、機関内の燃焼及びそれに伴う熱流動現象に対するより深い理解、あるいは設計段階において必要とされるこのような現象に関する信頼性の高い実験

データの蓄積等も非常に重要と考えられる。

一般に、機関内の流体運動は乱流であり、機関内における流体と壁面との熱伝達を考察する場合、乱流熱伝達現象への理解が不可欠である。更に、そのためには乱流現象そのものへの理解が要求される。特に、壁面と流体間の輸送現象を理解するためには、壁近くでの乱流構造を把握する必要がある。

壁近傍領域においては、粘性及び幾何的な影響による乱流の異方性が顕著となり、従来からの一様等方性乱流の研究に基づく乱流モデル等は再検討が必要である。またこの領域においては、準秩序構造と呼ばれる大きなスケールの組織的構造が見いだされており、その点でも広く興味の対象となっている。

このような壁近傍乱流の現象を把握するため、従来は詳細な実験を中心とした研究が行われてきた。しかし、近年の計算機の能力の向上に伴い、実験を上回るほどの詳細な数値実験が行われるようになってきた。例えば、2次元チャンネル内乱流の直接数値シミュレーション (Direct Numerical Simulation) : DNS¹⁾、自由剪断乱流のDNS²⁾等が挙げられる。同様に熱輸送のDNS³⁾も行われている。しかしこれらの計算は非常に単純な流れについて行い得るのみであり、さらには非常に大きな計算パワーを必要とする。実際の設計における複雑な流れにはとうてい適用できない。

現在、実用上広く普及している乱流計算の手法は、流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes (NS) 方程式に平均操作を行って得られるレイノルズ方程式を解く方法であり、方程式中の未知項であるレイノルズ応力項のモデル化に応じて、0方程式モデル、1方程式モデル、2方程式モデル、代数応力モデル、レイノルズ応力モデル等がある。特に、最も広く用いられているのは2方程式モデルである $k-\epsilon$ モデルである。

$k-\epsilon$ モデルは既に種々のモデルが提案され、各々適用範囲を限定しながら各種流れの計算に用いられている。これらのうち、高レイノルズ数モデルは壁から離れた点において壁関数等を用いた境界条件を課すようになっているが、熱伝達の計算、あるいは壁関数の適用に問題がある複雑乱流の計算等においては壁面で直接粘着の境界条件を与える必要がある。このため、壁面で直接粘着条件を課すことが出来る低レイノルズ数型モデルが多く提案され、それらの有効性について多くの研究がなされてきた⁴⁾⁵⁾⁶⁾。しかし、その多くは平均流速等の結果のみからモデルの有効性を検討しており、モデルの問題点等を十分に把握するに至ってい

ない。近年、 $k-\epsilon$ モデルの2つのモデル方程式 (k 及び ϵ 方程式)の各項の挙動を検討した研究が行われているが⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾、検討されたモデルの種類等において、十分とは言い難い。

本研究では、従来ほとんど検討されることがなかった $k-\epsilon$ モデルのモデル方程式の各項の挙動を調べることでモデルの特徴を明らかにし、さらにその問題点を検討する。そのために、現在の代表的な低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデル6種類について、そのモデル方程式の各項の壁近傍での挙動を、DNSの結果と比較し考察する。さらに、従来の研究で指摘されていた $k-\epsilon$ モデルの圧力乱流拡散項の問題点¹¹⁾の改良を試み、その改良が平均流速等の流れの統計量の分布にどう作用するかを検討するとともに、圧力乱流拡散項以外の項に対しどのように影響を及ぼすかを調べる。さらに、低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの工学的な応用の代表例として、壁近くでのモデルの挙動に特に影響を受けると予想される熱伝達の予測計算を行い、モデルの改良の効果を調べる。以上のように、従来行われることのなかった総合的な $k-\epsilon$ 乱流モデルの評価・検討を行う。

2. 各種 $k-\epsilon$ モデルの比較

本章では、現在広く用いられている $k-\epsilon$ モデルのうち、特に熱・物質輸送の解析に必要な低レイノルズ数型モデルの代表的なもの6種 (Jones & Launder¹²⁾; 1973, Launder & Sharma¹³⁾; 1974, Lam & Bremhorst¹⁴⁾; 1981, Myong(明)¹⁵⁾; 1988, 長野・田川・新美¹⁶⁾; 1989, 笠木・鹿園・稲垣¹⁷⁾; 1989)を選び、壁近傍でのモデル方程式の各項の挙動について考察する。

2.1 基礎式

流れ場の基礎式は、運動量保存式のNS方程式に平均操作を行ったレイノルズ方程式及び質量保存式の平均流に関する連続の式である。平均操作としてはアンサンブル平均を考える。なお以下に示すように、速度 u あるいは圧力 p 等についての平均成分は大文字 U 、 P 等または上付のバーで、またその変動成分はダッシュを右肩に付加し表わす。

$$u = U + u' \quad (1)$$

非圧縮流体についての連続の式を式(2)に、レイノルズ方程式を式(3)に示す。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{-u_i u_j}) + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3)$$

式(2)及び(3)はいずれも三次元直交座標系での表現である。式(3)において t は時間である。また、各変数 (x 、 U 等)の添字 (i または j : 1~3の値をとる)は各々の変数が表わすベクトルの i 番目の成分を意味する。たとえば x_i は i 番目の座標、 U_i は平均流速の i 方向成分、 u_j は変動速度の j 方向成分を表わす。式中の同一項内で重複する添字については、1から3までの和をとる。また式中の ρ は流体の密度であり、 ν は動粘性係数である。

非線形性を有するNS方程式に平均操作を行った結果、式(3)の右辺第2項に見られるような変動速度成分の相関項 (レイノルズ応力項)が未知項として生じる。方程式系を解くには、この未知項をなんらかの形でモデル化する必要がある。

一般には、この未知項を粘性応力からの類推で、乱流粘性という概念を用いて表現する。即ち、式(4)に示すように、乱流粘性 ν_t という疑似的な粘性を考え、それに平均流の勾配を掛けた形で記述する。乱流粘性が得られれば方程式系は閉じた形になる。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号であり、 k は乱流エネルギーを表わし、以下のように定義される。

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} \quad (5)$$

なお、式(4)の右辺第2項の必要性は以下のように理解される。式(4)の左辺において $u_i u_j$ を考え、さらに $i = 1 \sim 3$ までの和をとる。これは、式(5)で定義される乱流エネルギー k の2倍に等しい。一方、このとき右辺第1項は連続の式(2)に等しくなり零となる。この不整合を避けるために、右辺第2項は付加される。これはまた、変動速度成分について等方性を仮定していることにも対応する。

$k-\epsilon$ モデルにおいては、分子粘性が分子の平均自由行程及び平均速度に比例する形で表わされることか

らのアナロジーで、乱流粘性を、乱流を代表する速度スケール u と長さスケール l の積に比例する形で表わす。

$$\nu_t \propto u l \quad (6)$$

$k-\epsilon$ モデルでは速度スケール u 及び長さスケール l を乱流エネルギー k 及び粘性散逸 ϵ を用いて以下のように表わす。

$$u \sim k^{1/2} \quad (7)$$

$$l \sim k^{3/2} / \epsilon \quad (8)$$

従って、乱流粘性は以下のように表わされる。

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (9)$$

ここで C_μ はモデル定数。 f_μ は低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルに現われるモデル関数である。なお、 ϵ は一様乱流における粘性散逸の表現で以下のように表わされる。

$$\epsilon = \nu \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) \quad (10)$$

この段階で k 及び ϵ が必要であるが、これらは以下に示す k 及び ϵ に関するモデル方程式(11)、(12)を適当な境界条件の下で解くことで得られる。

k - 方程式 :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \epsilon + D \quad (11)$$

ϵ - 方程式 :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\epsilon_1} f_1 \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - C_{\epsilon_2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + E \quad (12)$$

ここで、 C_{ϵ_1} 、 σ_k 、 f_1 等は、経験的あるいは理論的に定められるモデル定数およびモデル関数であり、各種モデルにより異なる (表-1)。

本研究では、計算対象として図-1に示す十分発達した定常非圧縮2次元チャンネル乱流を考える。座標は流れの主流方向に x 軸を、壁から垂直な方向に y 軸を、

表-1 各 $k-\epsilon$ モデルにおけるモデル定数及びモデル関数

Model	C_μ	C_{ϵ_1}	C_{ϵ_2}	σ_k	σ_ϵ	f_μ	f_1	f_2	D	E	$\epsilon_w - BC$
J & L	0.09	1.45	2.0	1.0	1.3	$\exp \left[\frac{-2.5}{(1 + R_t/50)} \right]$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$-2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$	0
L & S	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$\exp \left[\frac{-3.4}{(1 + R_t/50)^2} \right]$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-R_t^2)$	$-2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$	0
L & B	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$[1 - \exp(-0.165 R_t)]^2 \cdot (1 + \frac{20.5}{R_t})$	$1 + (0.05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-R_t^2)$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
Nagano	0.09	1.45	1.9	1.4	1.3	$[1 - \exp(-\frac{y^*}{26})]^2 \cdot (1 + \frac{4.1}{R_t^{3/4}})$	1.0	$[1 - 0.3 \cdot \exp\{-\frac{R_t}{6.5}\}^2] \cdot [1 - \exp(-\frac{y^*}{6})]^2$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
Hyong	0.09	1.4	1.8	1.4	1.3	$[1 + \frac{3.45}{R_t}] \cdot [1 - \exp(-\frac{y^*}{70})]$	1.0	$[1 - \frac{2}{9} \exp\{-\frac{R_t}{6}\}^2] \cdot [1 - \exp(-\frac{y^*}{5})]^2$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$
Kasagi	0.09	1.4	1.8	1.4	1.3	$[1 + \frac{3.45}{R_t}] \cdot [1 - \exp(-\frac{R_t}{200} - \frac{R_t}{30})^2]$	1.0	$[1 - \frac{2}{9} \exp\{-\frac{R_t}{6}\}^2] \cdot [1 - \exp(-\frac{R_t}{2.7})]^2$	0	0	$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}$

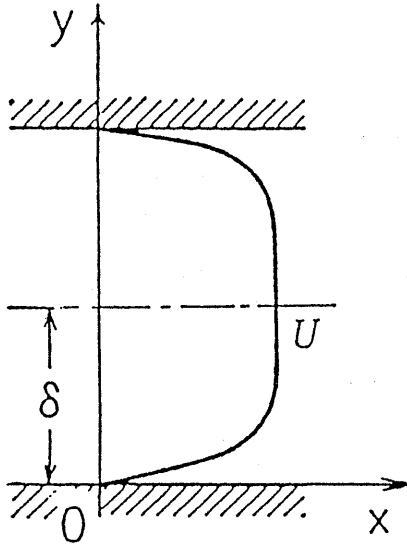


図-1 2次元チャンネル流れ場

$x \cdot y$ 両座標と垂直な方向、即ちチャンネルのスパン方向に z 軸を取る。平均流速は x 方向のみの成分をもち U で表わす。十分に発達した乱流であることから、平均圧力を除いた平均諸量（平均速度、レイノルズ応力等）の x 方向の変化はなく、 x に関する導関数は 0 とおける。また 2次元チャンネル流れであることから、 z 方向の導関数も同様に 0 とおける。従ってこの流れ場に対する基礎方程式は式(13)~(15)のようになる。また k 及び ε モデル方程式(14)、(15)中の各項は、併記したような物理的な役割を持っているものと解釈できる。

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ \left(1 + \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial U^+}{\partial y_0} \right\} + \text{Re}^* = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial k^+}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{\sigma_k} \frac{\nu_t}{\nu} \frac{\partial k^+}{\partial y_0} \right) + \frac{\nu_t}{\nu} \left(\frac{\partial U^+}{\partial y_0} \right)^2 - \varepsilon^+ + D^+ = 0$$

viscous diffusion (VD)	pressure- turbulent diffusion (PTD)	production (P)	dissipation (D)
(粘性拡散)	(圧力・乱流拡散)	(生産)	(散逸)

(14)

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\nu_t}{\nu} \frac{\partial \varepsilon^+}{\partial y_0} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^+ \nu_t}{k^+} \left(\frac{\partial U^+}{\partial y_0} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^+}{k^+} + E^+ = 0$$

(粘性拡散)	(圧力・乱流拡散)	(生産)	(散逸)
--------	-----------	------	------

(15)

ここで、式(13)~(15)においては式(16)に示す無次元化を行っている。また、式(14)、(15)に現われる項、 D^+ 及び E^+ は式(16)の無次元化がなされたモデル関数を表わす。

$$U^+ = \frac{U}{u^*} \quad k^+ = \frac{k}{u^{*2}} \quad \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon}{u^{*4}/\nu} \quad y_0 = \frac{y}{\delta} \quad (16)$$

ここで、 u^* は以下に定義される摩擦速度、 δ はチャンネル半幅である。

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (17)$$

τ_w は壁面での剪断応力を表わす。また、式(13)に現われるレイノルズ数 Re^* 及び表-1のモデル関数 f_{μ} 及び f_2 中の R_x 、 R_y 、 y^+ は以下のように定義される。

$$\text{Re}^* = \frac{u^* \delta}{\nu}, \quad R_x = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}, \quad R_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu}$$

$$R_\varepsilon = \frac{y}{\left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}}, \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \quad (18)$$

式(3)に現われる主流方向の圧力勾配項は、壁面剪断応力と釣り合うため、上記の無次元化により、式(13)の左辺第2項のように表わされる。なお、式(18)による定義から明らかなように、 Re^* は粘性長さスケール ν/u^* により無次元化されたチャンネル中心座標 $\delta^+ = \delta u^*/\nu$ に等しい。

なお、表-1に示すように各々のモデルをこれ以降、J L (Jones & Launder)、L B (Lam & Bremhorst)、L S (Launder & Sharma)、Naganoまたは長野(長野ら)、Kasagiまたは笠木(笠木ら)、Myongまたは明(Myong)と記す。

2.2 計算方法

本研究ではエネルギーの収支等を考察するため、用いられる計算プログラムは、数値粘性等の影響の無い信頼性の高い解を与えるものである必要がある。

2.2.1 境界条件

計算領域は壁面からチャンネル中心までのチャンネル半幅の領域($y_0 = 0 \sim 1$)とした。この領域において式(13)~(15)を適当な境界条件の下で解くわけである。チャンネル中心($y_0 = 1$)においては、流れ場が中心軸について対称であることから、 U 、 k 、 ε それぞれについて以下のように勾配零の条件を課した。

$$\frac{\partial U^+}{\partial y_0} = \frac{\partial k^+}{\partial y_0} = \frac{\partial \varepsilon^+}{\partial y_0} = 0 \quad (19)$$

また壁面 ($y_0 = 0$) においては粘着条件より、 U 、 k について以下のように零値を与えた。

$$U^+ = k^+ = 0 \quad (20)$$

表-1の最終欄 (ε_w -BC欄) に記したように、壁面での ε についてはモデルによって異なった2種類の条件を課している。1つは式(21)に示す、零値を与える条件である (JL及びLSモデル)。

$$\varepsilon^+ = 0 \quad (21)$$

この条件を課するため、 ε に修正を加えており ε は正確な散逸を表わしていない。そのためこの境界条件を課したモデル (JL、LS) においては k 方程式に補正項 D が付加されている。この場合、式(10)で表わされる ε に対応する正確な散逸 ε_0 は $\varepsilon_0 = \varepsilon - D$ で与えられる。

もう1つの境界条件は、式(22)に示される k 方程式から得られるエネルギーのバランスを与える条件である。

$$\varepsilon^+ = \frac{\partial^2 k^+}{\partial y_0^2} \quad (22)$$

2.2.2 差分化

式(13)~(15)をPatanker¹⁸⁾によるコントロールヴォリューム法を用いて離散化した。使用したスキームは中心差分である。計算領域は、格子点が壁近傍に集中するように不等間隔格子を用い分割された。具体的には、隣合うコントロールヴォリュームの間隔を等比級的に (増加率は3%) 変化させている。

$k-\varepsilon$ モデルの計算において ε 方程式の収束が問題となることが多いが、本計算では離散化された ε 方程式中の対角成分を優位にし回避した¹⁹⁾。

なお計算の格子点に対する依存性は小さく、格子点数80で行った計算結果と140で行った結果の差異は1%以下であった。数値粘性等の影響の少ない計算結果を与えているものと考えられる。実際の計算は格子点数100でおこなった。このとき、壁面の次の点は粘性長さスケール ν/u^* により無次元化した座標 y^+ で0.3程度であり、従来の低レイノルズ数モデルを用い

た計算とはほぼ同一である。

計算パラメータとしてレイノルズ数 Re^* を与えたが、これは圧力勾配を与えたことと同値である。

2.3 結果及び考察

各モデルの壁近くでの挙動を調べるため、DNSによる計算結果があるレイノルズ数 $Re^* = 180$ の計算を行った。壁のごく近くにおける k あるいは ε 等の乱れの統計量は実験的に得ることはきわめて困難であり、比較検討の対象として、信頼性が高いとされるDNS¹⁹⁾²⁰⁾の結果を用いた。

2.3.1 平均速度分布

無次元平均速度 U^+ の分布を図-2に示す。DNS¹⁾の結果と、Eckelmann²¹⁾のオイルチャネルの実験結果を併記する。

最も古いJLモデルが他のモデルに比して小さい値を示している。LSモデルは最も大きな値を示しており、対数領域での勾配も一致がみられない。与えられたレイノルズ数より低いレイノルズ数の流れの分布の傾向を示している。長野及びLBモデルはDNSとほぼ一致する結果を与えている。今回用いたモデル中、平均速度分布については最も良好な分布を示している。笠木とMyongのモデルは両者ともJLモデルのすぐ上に分布しており、DNSの結果よりわずかに小さな値を取っている。特に、 $y^+ = 10 \sim 30$ の緩和層内での差異が大きい。また両者のモデルは、 $y^+ = 30 \sim 40$ 以下の領域でほぼ一致している。これは、笠木のモデルがMyongのモデルに基づくものであることによると思われる。

2.3.2 乱流エネルギー分布

無次元乱流エネルギー k^+ の分布を図-3に示す。LSモデルが最も小さな値を示している。さらにピークを与える位置も各モデル中、最も壁面から離れた点となっている。本計算では $Re^* = 180$ を与えているが、平均流速 U の計算結果から通常用いられる中心流速に基づくレイノルズ数 Re_c が得られる (表-2)。

LSモデルで得られた Re_c は、各モデル中最大の値をとっている。一般に Re_c の増大とともに k の分布のピーク値が増加し、ピークを与える位置が壁面に近づくことが知られているがLSモデルにおいては得られた Re_c は大きいにもかかわらず、小さな k 分布を示し、さらに最も離れたピーク位置を与えている。LSモデルは $k-\varepsilon$ モデルの適用が難しいとされる境界層の遷移計算において良好な結果を示しているが²²⁾、必ずし

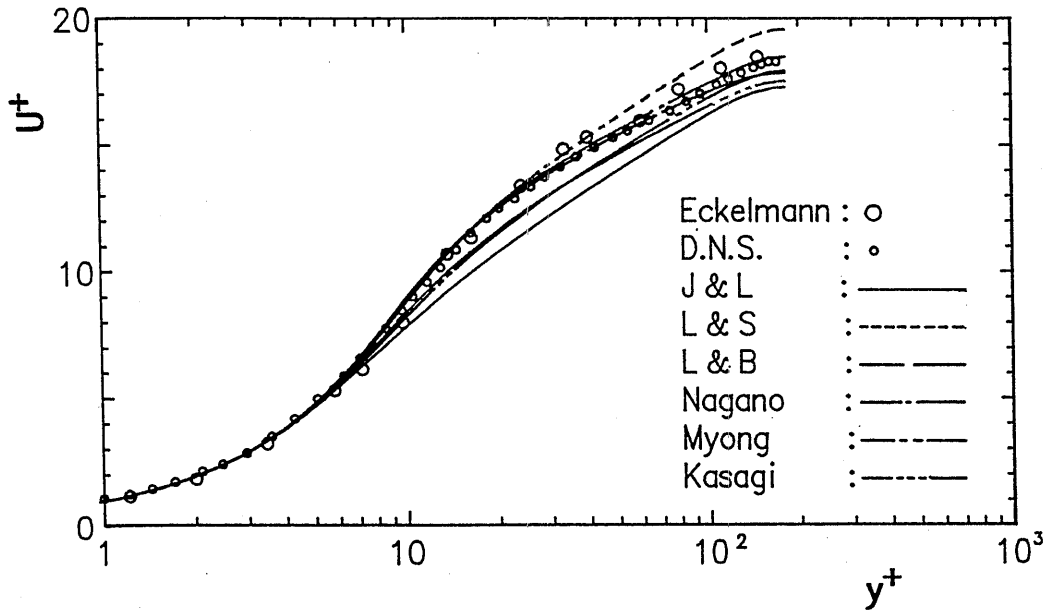


図-2 平均速度分布

表-2 各モデルによる中心流速とRe。

	U_c^+	Re_c
DNS	18.2	3251
JL	17.26	3107
LS	19.53	3515
LB	17.84	3211
長野	18.48	3327
笠木	17.51	3151
明	17.92	3225

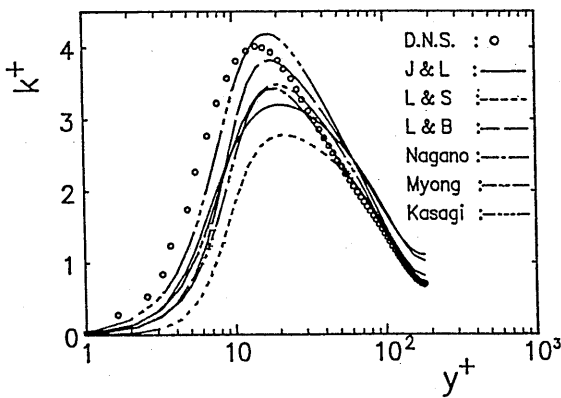


図-3 乱流エネルギー分布

も他のモデルに比して優れたものであるとは言えないことがわかる。J LモデルはL Sモデルより大きな値を示しているものの、DNSと比較するとかなり小さいピーク値を示している。さらにJ Lモデルは分布形が横に広がっており、壁に近いところではDNSに近い値をとり、チャンネル中心付近ではDNSより大きな値を示している。これは高レイノルズ数の場合の結果においても見られる傾向であり²⁹⁾、J Lモデルの欠陥を示しているといえる。平均流速についてはDNSとの非常に良好な一致を示した長野モデルは、k分布ではピーク値等についてDNSとの差異がみられる。一方、 $y^+ \approx 30$ 以上の領域においてはDNSとほぼ一致している。L Bモデルはかなり大きなピーク値を示している。しかし、長野モデルとは逆に $y^+ = 30$ 以上の領域でDNSより大きな値を与え、J Lモデルと同様の傾向を示しているといえる。笠木とMyongの各々のモデルは、平均流速についてはほぼ同様の結果を与えたが、k分布においては非常に顕著な差異を示している。笠木のモデルではDNS以上に大きなピーク値を与える。一方、Myongのモデルではかなり小さなピーク値しか示さない。

2.3.3 乱流粘性分布

図-4に乱流粘性 ν_t/ν の分布を示す。L Bモデルを除き特に大きな差異はない。平均速度分布で最も大きな値をとっていたL Sモデルの乱流粘性が、全領域で他の全てのモデルに比べ小さな値を示している。このことはL Sモデルの平均速度分布が、低レイノルズ数の流れにより近いものになっていることと対応している。L Sモデルのこの特徴が、境界層の遷移計算において他のモデルより良好な結果を与えることになっている可能性がある。

2.3.4 k方程式の各項の挙動

図-5(a)~(g)にk方程式(14)中の各項の分布を示す。図-5(a)はDNSから得られた結果である。いずれの図においても、生産項(P)を破線、散逸項(D)を二点鎖線、粘性拡散項(VD)を一点鎖線、圧力乱流拡散項(PTD)を実線で表す。なお散逸項は ϵ (J L及びL Sモデルにおいては $\epsilon - D$:このDはモデル関数)の符号を反転させたものに等しい。

DNS及び各モデルとも壁のごく近くにおいて、散逸と粘性拡散がバランスしていることがわかる。これは ϵ 方程式の壁面での境界条件、式(22)に対応している。壁から離れた領域($y^+ > \approx 30$)においては、DNS、各k- ϵ モデル双方とも散逸と生産がバランス

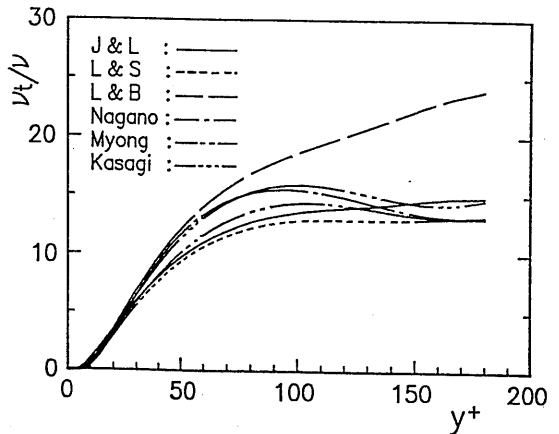


図-4 乱流粘性分布

している。速度対数則の前提である局所平衡の条件がこの領域以上において成立していることがわかる。

DNSと比較して、k- ϵ モデルでは笠木のモデルを除いて散逸及び粘性拡散の挙動に定性的な差が見られることがわかる。散逸、粘性拡散ともに壁面での勾配の符号がDNSとは逆になっている。即ち、DNSでは散逸は壁面から正の勾配で立ち上がり粘性拡散は負の勾配で立ち上がるのに対し、笠木モデルを除いたk- ϵ モデルでは散逸は負の勾配で、また粘性拡散は正の勾配で立ち上がっている。モデル関数にコルモゴロフのマイクروسケールを用いた笠木のモデルは、唯一DNSと定性的に一致する。しかし、定量的には壁面での値がDNSと比較して小さい。

笠木モデルも含めて各モデルとも、圧力乱流拡散項の最大値をとる点はDNSと比較して壁から離れている。特に長野、L S、L Bモデルでその傾向が顕著である。また長野、Myongモデルでは最大値が、DNSあるいは他のモデルと比較しても、小さくなっている。

生産項は、ピークの位置に多少の違いは見られるものの、各モデルともDNSのピーク値と同様の値を示している。ただし壁近くでDNSの生産項が早く立ち上がるのに対し、長野、L S及びL Bモデルでは立ち上がりが遅く壁近くでDNSより小さな値をとっている。これは、壁からより離れた領域まで散逸項と粘性拡散項がバランスしていることを示している。この傾向は、圧力乱流拡散項のピークの位置が壁から離れているモデルでより特徴的である。すなわち、壁から離

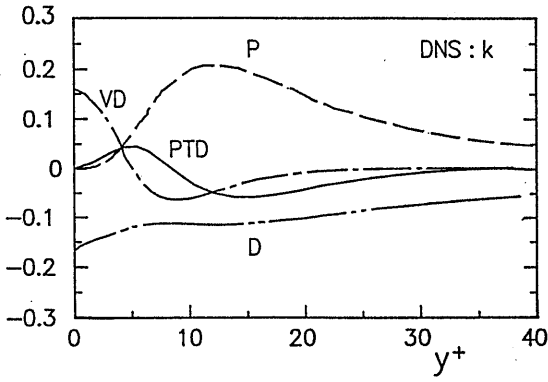


図-5(a) k方程式各項の分布 (DNS)

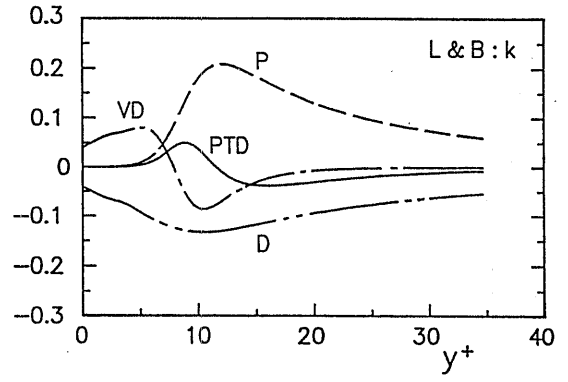


図-5(d) k方程式各項の分布 (L&B)

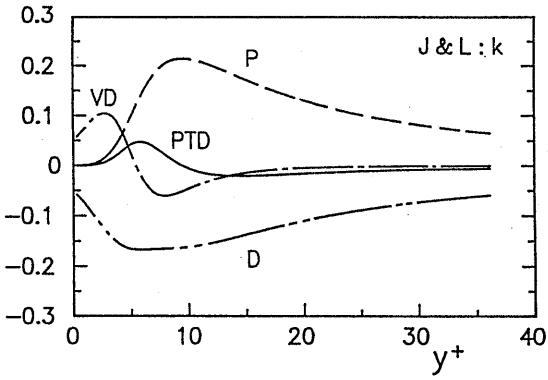


図-5(b) k方程式各項の分布 (J&L)

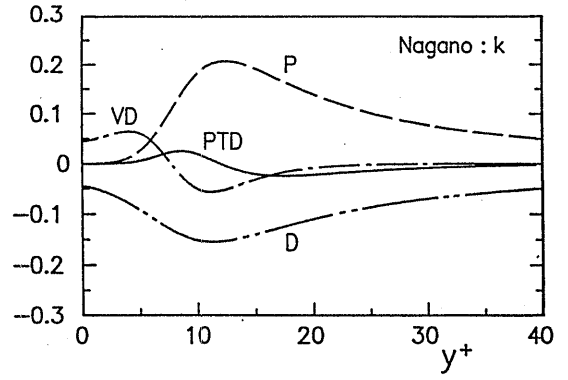


図-5(e) k方程式各項の分布 (長野)

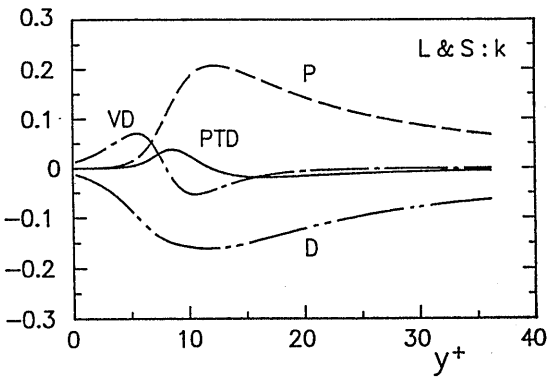


図-5(c) k方程式各項の分布 (L&S)

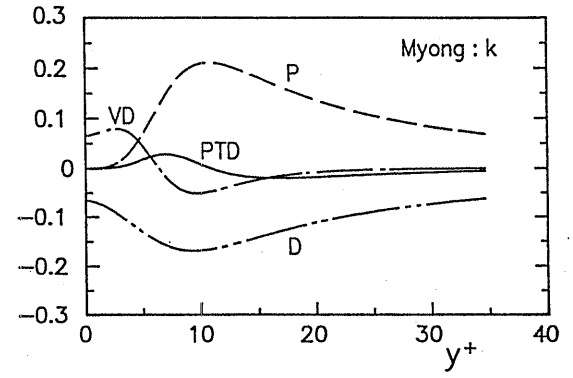


図-5(f) k方程式各項の分布 (Myong)

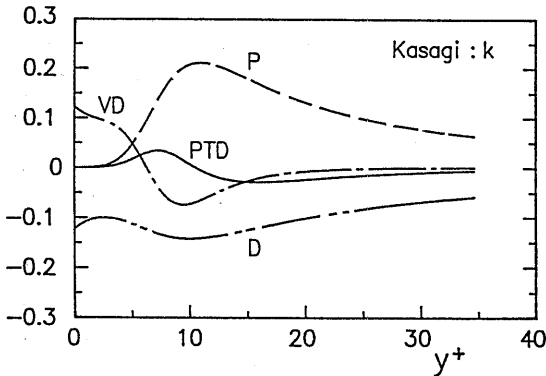


図-5 (g) k 方程式各項の分布 (笠木)

れた領域まで圧力乱流拡散項の値が小さいモデルほど、散逸と粘性拡散がバランスしている領域が広い。従って、圧力乱流拡散は、値自体は小さいものの、散逸と粘性拡散とのバランスをくずし、生産項の壁近傍の挙動を左右する効果があることを示唆している。

個々のモデルでみると、k 分布の最も小さかった LS モデルは、壁面での散逸項及び粘性拡散項の値が各モデル中最小である。さらに両項の壁面での勾配も他のモデルと比較して急である。JL モデルでも両項の勾配は非常に急である。JL、LS 両モデルとも、散逸 ϵ の壁面での境界条件を他のモデルと異なったかたちで与えており、これがこのような類似した傾向を示している一因である可能性がある。

2.3.5 ϵ 方程式の各項の挙動について

図-6 (a)~(g) に ϵ 方程式中の各項の分布を示す。

図-6 (a) は DNS から得られた結果である。

k 方程式の場合と同様、DNS 及び各モデルとも壁のごく近くにおいて散逸と粘性拡散がバランスしていることがわかる。また、壁から離れた領域 ($y^+ >$ 約 30) においては、DNS、各 k- ϵ モデル双方とも散逸と生産がバランスしている。

k 方程式の分布で見られた、散逸及び粘性拡散の挙動における定性的な差は ϵ 方程式でも同様にみられる。

笠木のモデルは、唯一 DNS と定性的に一致する。笠木モデルの前身である Myong モデルでは粘性散逸項の挙動が定性的に一致している。これは生産項の勾配にバランスする形をとっているものと考えられる。しかし、他の k- ϵ モデルと同様、笠木モデルにおいても散逸及び粘性拡散の壁面での値が小さく、定量的

には DNS の結果と一致しない。

各モデルとも圧力乱流拡散項の最大値をとる点は DNS と比較して壁から離れている。特に長野、笠木、LS、LB モデルでその傾向が顕著である。また長野、笠木、Myong、LB モデルでは最大値が、DNS と比較して小さくなっている。

生産項については、k 方程式の場合と異なり、各モデルごとにかかなりの差異を示している。k 方程式と異なり、 ϵ 方程式がモデル関数を多く含んでいるためと考えられる。特に、LB モデルにおける生産項は、非常に大きなピーク値を示している。これは、当モデルのみが生産項にモデル関数を用いていることによると考えられる。生産項に関数を用いず定数のみを用いた他のモデルの傾向が DNS より近いことから考えると、LB モデルのように生産項に関数を用いるアプローチに、利点は認め難い。笠木モデルでは、ピーク位置は異なるものの、ピーク値は最も DNS に近い。これは以下のように説明される。

ϵ 方程式の生産項は、どのモデルにおいても乱流粘性係数にさらに ϵ/k をかけた形で与えられている。ところで、図-4 に示したように、乱流粘性の分布自体は $y^+ < 30$ の領域でモデルによる大きな違いは見られない。また平均流速の分布も図-2 に示したように大きな差異は見られない。このことから、k 及び ϵ の分布自体が生産項の大きさに直接的な貢献をなしているものと考えられる。従って、k 及び ϵ 分布が DNS に最も近い笠木モデルの生産項の値が DNS に最も近い値をとっているものと考えられる。

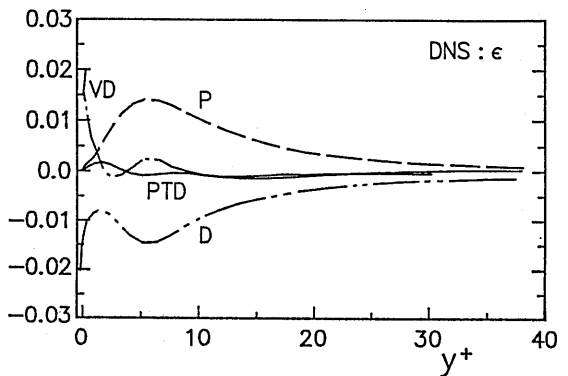
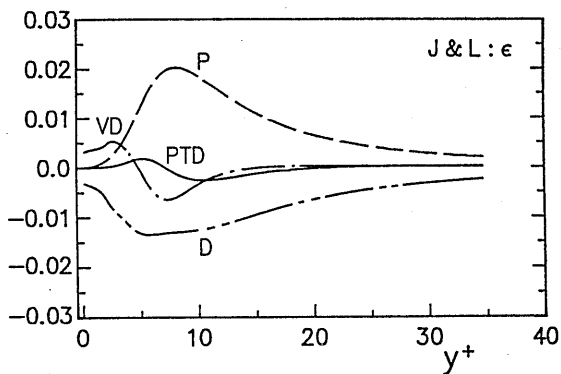
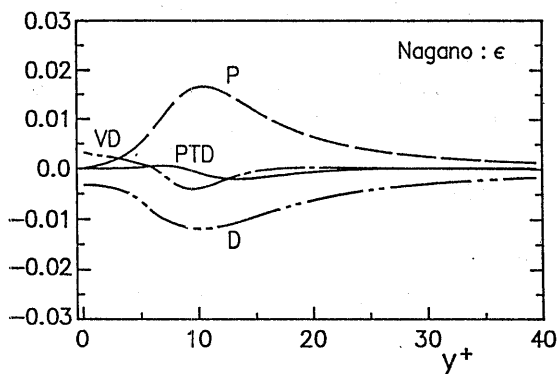
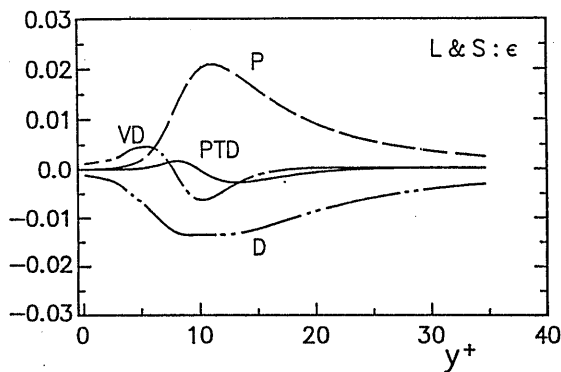
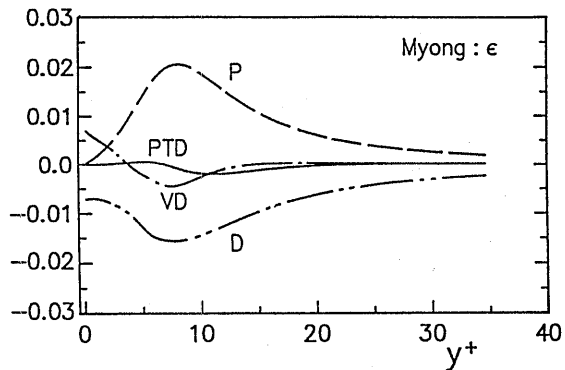
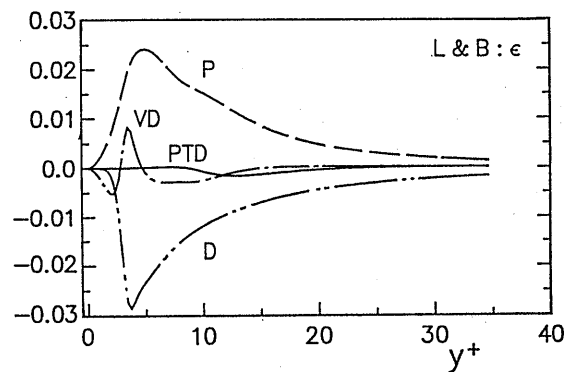
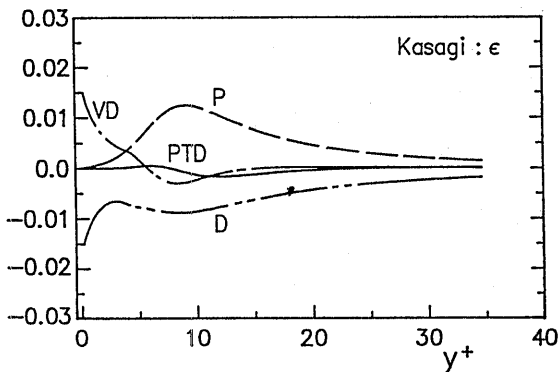


図-6 (a) ϵ 方程式各項の分布 (DNS)

図-6 (b) ϵ 方程式各項の分布 (J L)図-6 (e) ϵ 方程式各項の分布 (長野)図-6 (c) ϵ 方程式各項の分布 (L S)図-6 (f) ϵ 方程式各項の分布 (Myong)図-6 (d) ϵ 方程式各項の分布 (L B)図-6 (g) ϵ 方程式各項の分布 (笠木)

個々のモデルでみると、LBモデルは、他のモデルとまったく異なった挙動を示しており特に粘性拡散項において著しい。粘性拡散項自体は特にモデル化がなされておらず、この項の挙動の問題は、他の散逸及び生産項のモデル化の問題に還元される。

2.4 結論

本章で行った各種モデルの比較から、以下のような結論を得た。

- 1) 得られた平均速度分布が類似したものであっても、 k の分布等に差異が見られる。同様に、 k 及び ϵ 方程式の各項の分布が大きく異なっている場合がある。
- 2) LSモデルのような、境界層の乱流遷移といった特殊な流れ場の計算を満足するモデルが、単純な流れ場を良好に再現するとは言えない。
- 3) モデル関数にコルモゴロフスケールを用いている笠木モデルを除き、いずれのモデルもDNSで得られた k 及び ϵ 方程式の散逸及び粘性拡散項の定性的な挙動を満足していない。
- 4) 笠木モデルは、他のモデルでは再現されなかった k のピーク値について、DNSに近い値を示している。
- 5) k 方程式の圧力乱流拡散項は、壁近くで散逸と粘性拡散との間のバランスを崩し、生産項の壁のごく近くでの挙動に影響を与える。
- 6) LBに見られる ϵ 方程式の生産項のモデル関数は各項の分布を大きく変化させ、DNS及び他のモデルと大きな差異をもたらす。従って、この生産項におけるモデル関数は用いるべきではないと考えられる。

3. 圧力乱流拡散項の変更

3.1 $k-\epsilon$ モデルの壁面近傍での挙動

$k-\epsilon$ モデルにおける各項の壁近くでの挙動は、変動速度成分を壁面を中心としてテイラー展開することで理論的に考察することが出来る。変動速度の3成分 u' (主流方向： x 方向)、 v' (壁面に垂直方向： y 方向)、 w' (スパン方向： z 方向)は壁に垂直方向の座標 y に関して以下のように展開できる。

$$u' = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \quad (23)$$

$$v' = b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots \quad (24)$$

$$w' = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots \quad (25)$$

係数は y 以外の座標(x, z)及び時間 t の関数である。各速度成分が y の0次の項から始まらないのは、壁面での滑り無しの条件を満足するためである。また壁面に垂直方向の成分 v' のみが2次の項から始まっているが、これは以下に示す変動速度成分についての連続の式を満足させるためである。

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

式(23)、(24)を用いると2次元チャンネルに関する運動量の式(3)に現われるレイノルズ応力は、以下のように表わされる。

$$\overline{u'v'} = \overline{a_1 b_2} y^3 + (\overline{a_1 b_3} + \overline{a_2 b_2}) y^4 + \dots \quad (27)$$

上式のようにレイノルズ応力は y の3次の項から始まる。この条件を満足するには、式(4)の乱流粘性は同じく3次の項から始まる必要がある(平均速度をテイラー展開した場合の第1項は1次であり、その微分は0次、すなわち定数であるから)。さらに、 k は y の2次の項から、 ϵ は0次から始まることから、乱流粘性の $k-\epsilon$ 表現である式(9)中の f_{μ} は、 y の-1乗から始まる必要がある。実際のモデルがこれらの条件を満足しているかを確認するため、乱流粘性の分布を図-7に両対数でプロットする。長野、Myong、LBのモデルを代表的なものとして選択した。計算条件等は第2章と同様である。なお、図中の右側の三角形は y の4乗に対応する勾配、左側が3乗に対応する勾配を示している。LBモデルは壁のごく近くでほぼ y の4乗に比例し、上記の条件を満足していないことがわかる。一方、長野及びMyongモデルは3乗に比例し、満足している。

3.2 圧力乱流拡散項の壁面近傍での挙動

低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの各項を y について壁面を中心としてテイラー展開した場合の第1項の y の次数は、前節で行ったような理論的な考察にはほとんどの項において一致する。しかし、圧力乱流拡散項をテイラー展開した場合の第1項の y の次数は、理論的に導出されるものとは異なっている。

壁面においても圧力変動が存在することから、圧力変動 p' は以下のように展開される。

$$p' = d_0 + d_1 y + d_2 y^2 + \dots \quad (28)$$

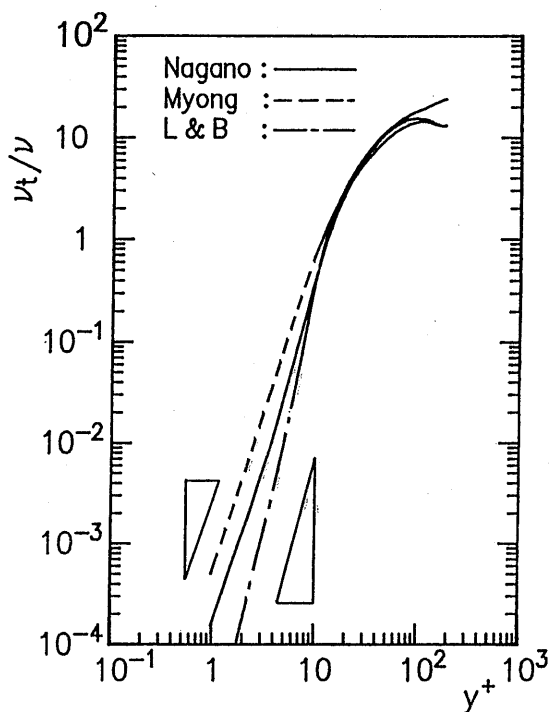


図-7 乱流粘性分布

k 方程式中の圧力乱流拡散項は、本来乱流拡散と圧力拡散の 2 項を併せてモデル化したものである。このうち、圧力拡散項は、式(24)と(28)から以下のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'p'}) = 2\overline{b_2d_0}y + 3(\overline{b_2d_1} + \overline{b_3d_0})y^2 + \dots \quad (29)$$

同様に、 ϵ 方程式中の圧力拡散項は以下のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i} \frac{\partial v'}{\partial x_i}} \right) = 2\overline{b_2d_0} + \dots \quad (30)$$

乱流拡散項は、k 方程式においては以下のように y について展開される。

$$\frac{\partial}{\partial y} (\overline{u_i u_i v}) = 4(\overline{a_1^2 b_2} + \overline{c_1^2 b_2})y^3 + \dots \quad (31)$$

ϵ 方程式については、以下のように展開される。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v' \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \right) = 2(\overline{a_1^2 b_2} + \overline{c_1^2 b_2})y + \dots \quad (32)$$

一方、k- ϵ モデルにおけるモデル化された圧力乱流拡散項は、k 方程式においては、式(14)の第 2 項によって表わされ、以下のように展開される。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) = \alpha_3 y^3 + \alpha_4 y^4 + \dots \quad (33)$$

ϵ 方程式においては、式(15)の第 2 項で表わされ、これを y に関して展開した形で書くと以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \dots \quad (34)$$

k 方程式に関しては、式(33)が y の 3 乗から始まっているのに対し、本来の圧力拡散項は式(29)に示したように y の 1 乗から始まっており、不整合が生じている¹¹⁾。一方、式(31)の乱流拡散項については、同じ次数(3 次)から始まっており問題はない。

また ϵ 方程式については、式(34)が y の 2 乗から始まっているのに対し、本来の圧力拡散項は式(30)に示したように y の 0 乗から始まっており、k 方程式の場合と同様な不整合が生じている。さらに、k 方程式の場合と異なり、式(32)の乱流拡散項は 1 次の項から始まっており、圧力拡散項と同様な不整合を生じている。

この圧力拡散項に関する不整合を避け、本来のべきを満足させるために、圧力乱流拡散項中の乱流粘性に以下のような変更を加える。なお、DNS の結果⁹⁾²⁰⁾に示されているように、 ϵ 方程式については圧力拡散項自体の値が非常に小さいため、乱流拡散項の不整合の調整がより重要であると考えられる。

$$f(y) = 1 + \frac{A_1}{y} + \frac{A_2}{y^2} \quad (35)$$

$$\nu_{tk} = f_k(y) \nu_t, \quad \nu_{t\epsilon} = f_\epsilon(y) \nu_t \quad (36)$$

A_i は定数であり、得られる圧力乱流拡散項の分布が DNS の分布に定性的に近づくようにトライ・アンド・エラーによって求められた。またその値は k 方程式に適用する場合; f_k と、 ϵ 方程式に用いる場合; f_ϵ とで異なる。

上記の変更はべきを合わせるという目的のみを満たすように行われ、特に物理的な背景があるわけではないことに注意されたい。笠木ら¹⁷⁾、あるいは河村ら¹⁰⁾も同様の変更を加えているが特に物理的な意味を持たせたものとはいえない。

この変更がどの様にモデル全体の挙動に影響し、ま

たそれが平均流等の結果にどう影響するかを考察する。モデルは、乱流粘性の挙動も整合性があり、圧力乱流拡散項以外の項については漸近挙動を満足している長野のものを用いる。なお、変更を k 方程式のみ（長野 - k ）に加えた場合、 ϵ 方程式のみ（長野 - ϵ ）に加えた場合、 k 及び ϵ 方程式の双方（長野 - $k - \epsilon$ ）に加えた場合の 3 ケースを比較検討する。

3.3 結果及び考察

第 2 章の図 - 5 (e) 及び図 - 6 (e) からわかるように、長野モデルでは、 k 、 ϵ いずれの方程式についても、散逸 (D) 及び粘性拡散 (VD) の挙動に、DNS と定性的にも大きな差異が存在する。変更が必要な圧力乱流拡散項 (PTD) にも当然差異がみられる。壁面での勾配の違いの他に k 方程式の圧力乱流拡散項の極値の位置が、図 - 5 (a) の DNS の結果と比較し、壁からより離れたところにあるのが分かる。

3.3.1 k 方程式の各項の挙動

図 - 8 (a) に、 k 方程式のみの圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 k 方程式の各項の挙動を示す。変更を加えていない本来の分布、図 - 5 (e) と比較して、粘性拡散項及び散逸項が定性的に改良されているように見える。ただし、粘性拡散項の改善に比べ、散逸項の改善の程度は小さい。さらに、定量的には両項とも壁面で DNS に比し小さな値を示している。変更を加えた圧力乱流拡散項は、極値の位置が改善され、壁面に近づいている。更にその値も大きくなっているが、DNS に比べ過大な値を示している。生産項に関して、従来のモデル（長野モデルのみならず J L モデル等においても）では壁近傍で DNS より急な勾配で立ち上

がっていたが、変更を加えることによって DNS 以上に緩やかな勾配となっている。2.3 節において k 方程式中の圧力乱流拡散項が粘性拡散項と散逸項のバランスを崩す働きを持っているとの結論を得たが、それを示唆する結果と考えられる。

図 - 8 (b) に、 ϵ 方程式のみの圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 k 方程式の各項の挙動を示す。 k 方程式のみに変更を加えた場合と同様、粘性拡散項が定性的に改良されているように見える。 k 方程式のみの場合では改善の程度が少なかった散逸項についても、一層の改善が見られる。定量的にも改善されている。ただし、定量的な改善の程度は今回の変更モデルに含まれる定数を変化させることである程度調整が可能であり、本質的な問題ではないと思われる。 k 方程式の圧力乱流拡散項は、変更を加えなかったにもかかわらずその極値の値が大きくなっている。生産項は、圧力乱流拡散項の極値位置に大きな変化がなかったため、 k 方程式に変更を加えた場合に見られたような緩やかな立ち上がりは見られない。 ϵ 方程式のみに変更を加えたにもかかわらず、 k 方程式の各項の挙動に変化がみられるのは、 k 方程式自体に ϵ が含まれていることによると考えられる。

図 - 8 (c) に、 k 及び ϵ 方程式双方の圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 k 方程式の各項の挙動を示す。 k 方程式のみに変更を加えた場合と同様の傾向を示している。

3.3.2 ϵ 方程式の各項の挙動

図 - 9 (a) に、 k 方程式のみの圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 ϵ 方程式の各項の挙動を示す。変更を加えない本来の分布、図 - 6 (e) と比較して生産

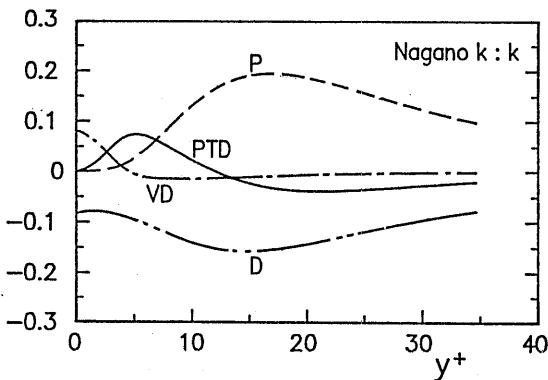


図 - 8 (a) k 方程式各項の分布 (k に修正)

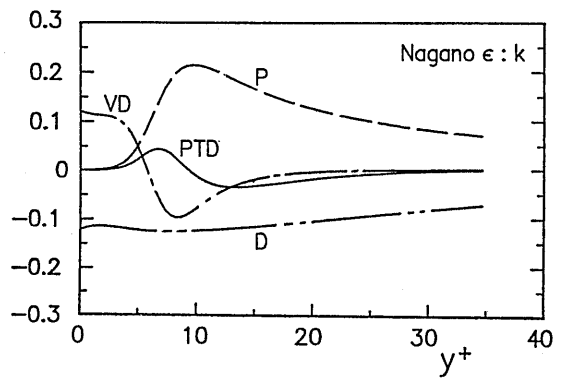


図 - 8 (b) k 方程式各項の分布 (ϵ に修正)

及び散逸項が大きな極値を示している。図-8 (b)の ϵ 方程式のみに変更を加えた場合の k 方程式の分布では、粘性拡散及び散逸項の挙動に定性的な改善がみられた。しかし、 k 方程式のみに変更を加えたこの場合、 ϵ 方程式の散逸・粘性拡散への影響は、 ϵ 方程式に変更を加えた場合の k 方程式の各項の挙動への影響より小さいと見なせる。 ϵ 方程式が $k-\epsilon$ モデル全体の性能に関し、より支配的であると考えられる。

図-9 (b)に、 ϵ 方程式のみの圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 ϵ 方程式の各項の挙動を示す。 k 方程式のみに変更を加えた場合と異なり、粘性拡散項及び散逸項の壁での勾配が改善されている。また、生産項及び散逸項の極値は、 k 方程式のみに変更を加えた場合と異なり小さな値を示している。散逸項についてはより小さな値となっている。変更を加えた圧力乱

流拡散項は壁に近い方の極値が明確に現れ、さらにその位置が壁面に近づき改善された様子がわかるが、同時に極値の値は過大である。また、負側の極値がDNSに比して過大であり、これが散逸項が小さな値をとる原因と考えられる。DNSにおいては、生産項が極値を示す位置で散逸項も極値を示し、両項がほぼバランスしている。一方、この図においては散逸項の極値が $y^+=5$ の付近にわずかに見られるのに対し、生産項の極値位置は $y^+=8$ の付近に存在し両者に一致はみられない。さらにその大きさもバランスしない。それ故、生産項の極値位置においては、同項は散逸及び圧力乱流拡散の2項とバランスしている。

図-9 (c)に、 k 及び ϵ 方程式の圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の、 ϵ 方程式の各項の挙動を示す。 ϵ 方程式のみに変更を加えた場合と同様、生産項の

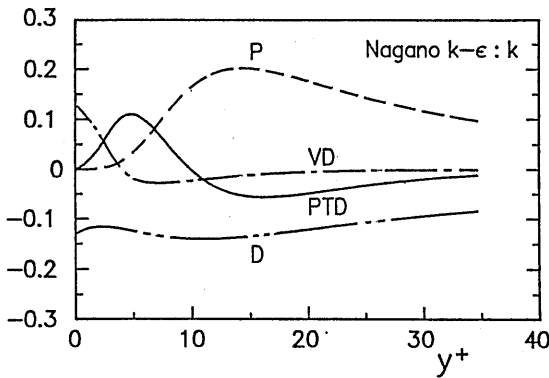


図-8 (c) k 方程式各項の分布 ($k-\epsilon$ に修正)

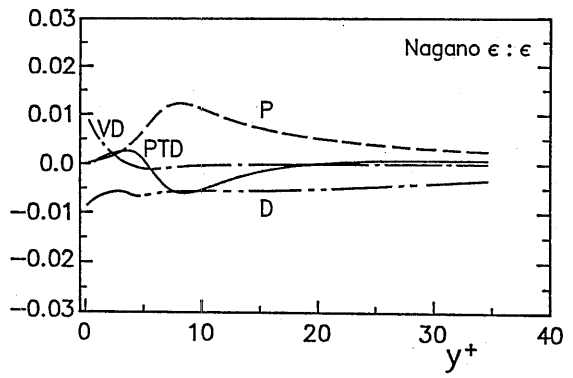


図-9 (b) ϵ 方程式各項の分布 (ϵ に修正)

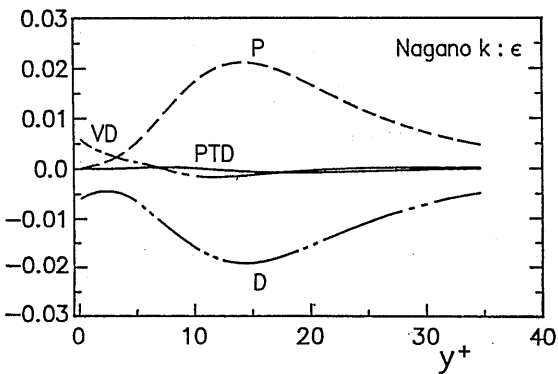


図-9 (a) ϵ 方程式各項の分布 (k に修正)

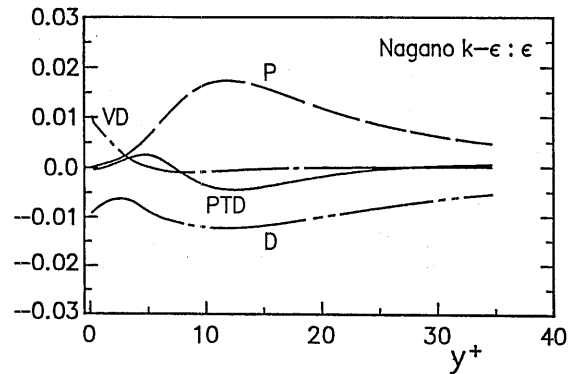


図-9 (c) ϵ 方程式各項の分布 ($k-\epsilon$ に修正)

極値位置で散逸、圧力乱流拡散の2項とバランスしている。同時に、 k 方程式のみに変更を加えた場合と同様、生産項の極値の値が大きくなっている。

3.3.3 平均速度分布

k 方程式のみ、 ϵ 方程式のみ、 k 及び ϵ 方程式の圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の平均速度分布を図-10に示す。長野- k 、長野- ϵ 、長野- $k-\epsilon$ いずれもDNSとの一致はみられない。これは本来の長野モデルが既にDNSとほぼ一致する程度にまで最適化がなされているためであると考えられる。モデルの変更に際してモデル全体を再び最適化する必要があることが分かる。

長野- k の場合、DNS及び長野モデルより上側に分布し、図-2のLSモデルに定性的には類似した分布を示している。

一方、長野- ϵ の分布はDNS、長野モデルの下側に分布している。この分布は図-2に示した笠木モデルの結果と定性的に類似している。

長野- $k-\epsilon$ では、長野- k の場合と同様、対数則より上側に分布し、また同時にその勾配は長野- ϵ に近いものとなっている。即ち、長野- k 及び長野- ϵ 両モデルの特徴を複合した分布を示していると見なせる。

ϵ 方程式のみに変更を加えた場合、 k 及び ϵ 方程式の各項の分布に定性的な改善が見られたが、平均速度分布の変化は k 方程式のみ、あるいは $k-\epsilon$ 両方程式に変更を加えた場合より小さい。このことは、 $k-\epsilon$ モデルが ϵ 方程式の圧力乱流拡散項の変更よりも、 k 方程式の変更に対しより敏感であることを示唆していると考えられる。従って、 k 方程式の圧力乱流拡散項が重要な役割を果たすような流れ場では、従来の漸近挙動を満足しないモデルでは現象を正確に捉えられない可能性が高いと考えられる。

3.3.4 乱流エネルギー分布

圧力乱流拡散項に変更を加えた場合の乱流エネルギー分布を図-11に示す。

長野- k では極値の大きさは長野モデルに比し更に小さくなり図-3に示したLSモデルによる分布に近いものとなっている。さらにチャンネル中心部でかなり大きな値を示しDNSとの差異が全領域で大きい。

長野- ϵ は壁近傍で極値をとる位置、その値ともにDNSとよい一致を示している。ただしチャンネル中心においてはDNSより小さな値を示している。チャンネル中心付近でのDNSとの大小関係の違いを除き、笠木モデルに近い傾向を示しているといえる。従来、 $k-\epsilon$ モデルの欠点の一つとして、乱流エネルギー k の

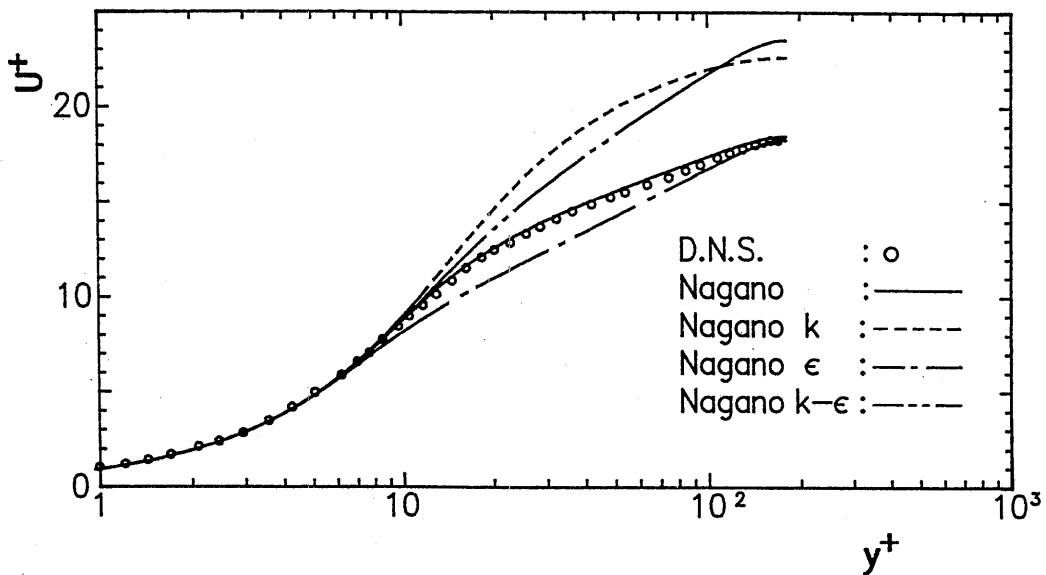


図-10 平均速度分布 (修正)

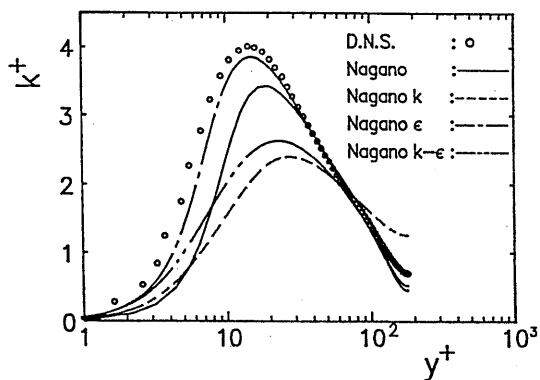


図-11 乱流エネルギー分布 (修正)

極大値が実験結果と比較して小さな値をとることが言われてきた。しかし、笠木モデル及び長野- ϵ においてはその点に関して改良されている。長野- ϵ モデルは k 及び ϵ 方程式各項の分布についても笠木モデルに定性的に近い分布を示し、さらに平均速度分布についても笠木モデルに類似している。 ϵ 方程式のみに変更を加えた長野- ϵ モデルが $k-\epsilon$ モデルの欠点の一つを改善すること、さらに長野- ϵ モデルの挙動が ϵ 方程式に従来と異なる変更を行った笠木モデルの挙動に近い点を併せて考えると、 ϵ 方程式の挙動を正しく捉えることがモデル化において最も重要であると考えられる。

長野- $k-\epsilon$ では、 k 方程式の変更の効果と ϵ 方程式の変更の効果を複合し、両者の中間の分布を示している。ただし、平均流速分布の場合と同様、 k 方程式のみの変更により得られた結果に近い分布である。

3.4 結論

k 及び ϵ 方程式の圧力乱流拡散項に対する修正を行った結果から、本章では以下の結論を得た。

- 1) k 及び ϵ 方程式中の圧力乱流拡散項の修正によって壁近傍の分子粘性に係る粘性拡散、散逸項の挙動を定性的に改善することが可能である。河村らも同様の結果を示している¹⁰⁾。しかし、その際に必要となる修正は、過剰である可能性がある。笠木らが示したように¹⁷⁾、モデル関数で用いられるスケールの変更及び関数形の変更も、同様に定性的な修正をもたらしている。DNSと従来モデルとの差異が最も際だっている項、すなわち k 及び ϵ の散逸及び粘性拡散項の中で、直接モデル化が可能なのは ϵ 方

程式中の散逸項のみである。以上より、圧力乱流拡散項の修正以上に ϵ 方程式の散逸項のモデル化を正しく行うことが、モデルの改良に最も大きく寄与するものと考えられる。

- 2) ϵ 方程式の圧力乱流拡散項の変更ともない、乱流エネルギー k の分布に改良が見られる。これは、従来モデルとDNSとの差異が最も際だっている各項($k-\epsilon$ 方程式中の粘性拡散及び散逸)の挙動が、 ϵ 方程式の修正によって一層正しくとらえられるようになったためと考えられる。これは、笠木モデルが他のモデルより良好な k の分布を得ていることに対応する。
- 3) k 、 ϵ いずれの方程式に変更を加えても他方に影響が出る。このため、モデルに変更を加える場合には、全体の見直しをする必要がある。
- 4) k 方程式の圧力乱流拡散項への修正は、生産項の壁近傍での分布に影響を与える。また ϵ 方程式の生産及び散逸項の大きさに影響を及ぼす。
- 5) k 方程式の圧力乱流拡散項に対する修正は、得られる平均流速の分布等に大きな影響を及ぼす。従って、この項が重要な役割を果たすような流れ場においては、モデルの修正が不可欠であると考えられる。

4. 温度場の計算

前章で行ったモデルの変更が熱輸送等の計算にどのような効果を及ぼすかを、簡単な温度境界層の計算を数種類のプラントル数 Pr について行うことで考察する。

4.1 基礎式

計算対象を図-12に示す簡単な温度境界層とする。流れ場は、充分発達した2次元チャンネル内乱流とし、平均速度及び乱流粘性係数は2章及び3章で得られたものを用いる。流体は $x=0$ の点を加熱開始点として、

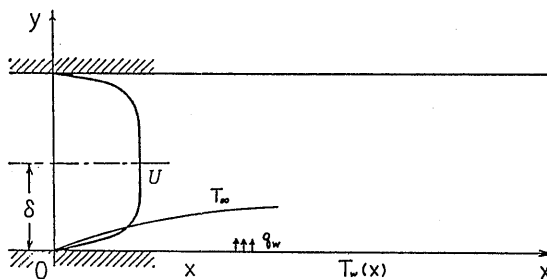


図-12 温度境界層

チャンネルの片面から加熱されるとする。平均温度場についての温度輸送方程式を以下に示す。

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} (v' T') + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (37)$$

ここで、 T は平均温度、 κ は温度伝導率、 U は平均流速、 v' は y 方向の変動速度成分である。流れ方向への温度拡散は対流による輸送より小さいものと考えられるので、境界層近似を行っている。上式中に現われる温度変動と速度変動の相関項はレイノルズ方程式(3)中のレイノルズ応力に対応した項で、乱流による拡散の効果を表わし、乱流熱流束と呼ばれる。この項もモデル化の必要があるが、レイノルズ応力同様、以下のような勾配拡散型の表現を導入する。

$$\overline{v' T'} = - \kappa_t \frac{\partial T}{\partial y} \quad (38)$$

ここで現われた係数 κ_t は乱流温度伝導率と呼ばれ、乱流粘性係数 ν_t に対応する。この係数のモデル化を行う代わりに、プラントル数に対応するものとして、以下のような係数を導入する。

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\kappa_t} \quad (39)$$

この係数は乱流プラントル数と呼ばれ、温度境界層の計算においては、一般に0.9程度の定数として与えられる。乱流プラントル数は、温度境界条件の相違（等温壁、等熱流束壁）、あるいはプラントル数、壁からの距離等によって変化する関数である。しかし、ほとんどの場合、定数として与えることは十分な近似となっている。乱流プラントル数の導入によって、乱流粘性と平均速度場を与えれば、温度輸送方程式は解くことが可能となる。

以上のようなモデル化を行った結果、式(37)は以下のように表わされる。

$$U^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = \frac{\partial}{\partial y^+} \left\{ \left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\nu_t}{\nu} \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right\} \quad (40)$$

ここで、以下の無次元化を行っている。

$$\begin{aligned} T^+ &= (T - T_\infty) \rho C_p u^* / q_w \\ U^+ &= U / u^* \\ y^+ &= y u^* / \nu \\ x^+ &= x u^* / \nu \end{aligned} \quad (41)$$

(338)

q_w は壁面での熱流束、 T_∞ は加熱開始点温度、 C_p は等圧比熱、 u^* は摩擦速度、 ν は動粘性係数、 ρ は密度である。

4.2 計算方法

4.2.1 境界条件

計算領域は流れ場の場合と同様、壁面からチャンネル中心までのチャンネル半幅の範囲である。加熱開始点($x = 0$)では、一様温度 T_∞ を与えた。加熱面($y = 0$)の境界条件は等熱流束壁とする。またチャンネル中心($y = \delta$)では、温度境界層外縁から十分離れていると仮定し一定温度(流入温度 T_∞)を与えた。

4.2.2 差分法

式(40)をPatankerによるコントロールボリューム法を用いて離散化した。使用したスキームは中心差分である。速度場の計算と同じ不等間隔格子を用いた。

計算パラメータとしてプラントル数を与えた。また既述したように乱流プラントル数は0.9で一定とした。

4.3 結果及び考察

温度場を解析する場合の最も基本的な量として熱伝達率 h がある。熱伝達率は以下のように定義される。

$$q_w = h (T_w - T_m) \quad (42)$$

ここで、 T_w は壁面温度で加熱開始点からの距離の関数である。また、 T_m は断面での平均温度で、以下のように定義される。

$$T_m(x) = \frac{\int_0^{2\delta} T(x,y) U(y) dy}{\int_0^{2\delta} U(y) dy} \quad (43)$$

一般に、この熱伝達率 h はヌッセルト数(Nu)と呼ばれる無次元数で評価される場合が多い。

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad (44)$$

ここで、 D は代表長さで、円管内の熱伝達の場合直径である。本研究のチャンネル片側加熱の場合、チャンネル幅の4倍が相当直径とされる。 λ は熱伝導率である。

熱伝達率は、加熱開始点からの距離の関数でもあるが、温度境界層が発達するに従ってある一定値に漸近する。本計算では十分下流の計算結果を用いて熱伝達率を評価した。

以下では、長野モデルに対する変更が熱伝達予測にどのように影響するかを、プラントル数の広い範囲で良好な結果を示しているMyongモデル、及び半経験式であるSleicher & Rouse (SR) の式(45)と比較することで検討する。

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 5.0 + 0.015 \text{Re}^a \text{Pr}^b & (0.1 < \text{Pr} < 10^4) \\ a &= 0.88 - 0.24 / (4 + \text{Pr}) \\ b &= 1/3 + 0.5 \exp(-0.6 \text{Pr}) \end{aligned} \quad (45)$$

図-13(a)に $\text{Pr} = 1 \sim 10^2$ の範囲のNu分布を示す。相当直径に基づく $\text{Re} = 24500$ である。 $\text{Pr} < 10$ の範囲で長野モデルは白丸で示したSR式とほぼ一致する。しかし、 Pr の増大とともに差異が広がっている。 Pr が大きな値をとる場合、温度伝導率 κ が動粘性係数 ν に対して相対的に小さな値をとることを意味する。即ち、熱伝達において対流による輸送が、熱伝導による輸送に対し、より支配的であることを示している。乱流による熱伝達を考えた場合、本来熱伝導が支配的な壁近傍領域においても、変動速度成分による乱流拡散の効果が增大することを意味する。この場合、壁近傍のモデルの相違が熱伝達等の結果に及ぼす影響は、さらに大きなものになると考えられる。このことが、 Pr の増大とともに長野モデルによる分布とSR式による分布との差異が顕著になってくる要因と思われる。Myongモデルと長野 ϵ モデルは、 $\text{Pr} = 1 \sim 10^2$ の全

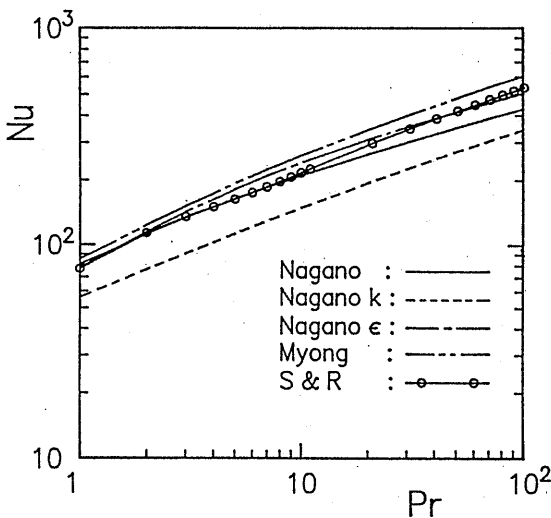


図-13(a) ヌッセルト数分布 ($\text{Pr} = 1 \sim 10^2$)

領域にわたってSR式とほぼ一致している。特に、Myongモデルではその勾配がSR式と一致している。長野 k モデルでは、その勾配はSR式及びMyongモデルにほぼ一致するものの、他のモデルに比べ過小な値を示している。

図-13(b)に $\text{Pr} = 10^2 \sim 10^4$ の範囲のNu分布を示す。図-13(a)に示したのと同様、Myongモデルは Pr の全範囲においてSR式と勾配が一致し、またその値もSR式に近い分布を示している。一方、長野モデルは図-13(a)での傾向を保ち、 Pr の増大とともにSR式との差異が大きくなっている。さらに長野 ϵ モデルは長野モデル以上に Pr の増大に伴う変化が大きい。長野 k モデルは勾配に変化は見られず、SR式及びMyongモデルとほぼ平行した分布を示している。

4.4 結論

熱伝達計算により得られた熱伝達率分布の結果から、以下の結論を得た。

- 1) 壁近傍のモデルの相違によって、熱伝達の予測に差異がみられることが確認された。
- 2) 壁近傍のみで効果を持つ項の変更が、熱伝達率に影響することが確認された。特にモデルの差は、高Pr流体の熱伝達の予測で顕著にみられる。これは、高Pr流体の熱伝達において、壁近傍での対流による輸送が低Pr流体の場合以上に支配的であり、同領域のモデル化が大きく影響するためである。

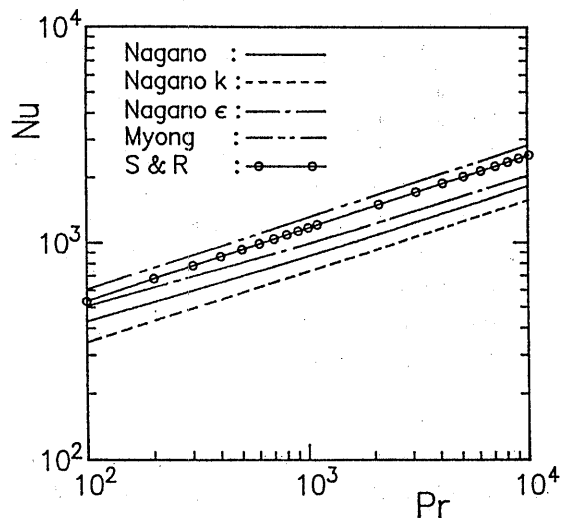


図-13(b) ヌッセルト数分布 ($\text{Pr} = 10^2 \sim 10^4$)

5. まとめ

現在最も広く用いられている $k-\epsilon$ 乱流モデルのうち、特に低レイノルズ数型モデルの壁近傍の挙動に着目して、各種モデルの k 及び ϵ 方程式の挙動を考察した。更に、長野モデルの k 及び ϵ 方程式の圧力乱流拡散項に修正を加え、その効果を調べた。また修正が熱伝達の予測にどう影響するかを調べた。その結果、以下の結論を得た。

- 1) $k-\epsilon$ モデルの比較計算においては、得られた平均速度分布が類似したものであっても、 k 等の乱流場を特徴付ける統計量の分布等にモデルごとの差異が見られる。特に、各モデルの k 及び ϵ 方程式の各項の分布は、モデルに応じてそれぞれ異なっている。さらに、笠木モデルを除いたいずれのモデルも DNS で得られた k 及び ϵ 方程式の散逸及び粘性拡散項の定性的な挙動を満足していない。
- 2) k 及び ϵ 方程式中の圧力乱流拡散項を壁面での漸近挙動を満足するように修正することで、DNS と定性的にも一致しない粘性拡散、散逸項の挙動を定性的に改善することが可能である。しかしこの修正でモデルの問題が解消されるわけではなく、モデル関数で用いられるスケールの変更及び関数形の変更等の検討が必要である。特に、従来次元解析から導出されている ϵ 方程式中の散逸項のモデル化を再検討する必要がある。
- 3) 熱伝達計算により得られた熱伝達率分布の結果から、壁近傍のモデルの相違によって、熱伝達の予測に差異がみられることが確認された。さらに壁近傍のみで効果を持つ項の変更が、熱伝達率に影響することが確認された。特にモデルの差は、高 Pr 流体の熱伝達の予測で顕著にみられる。
- 4) 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ モデルの詳細な性能評価において、壁近傍での流動現象が支配的な高 Pr 流体の熱伝達等の予測計算は、評価の指標を得るのに適した問題である。モデルの各項の挙動を解析することと併せて、このような問題を解析することが、流れ場の解析からは得られないモデルの問題点を把握することに大きく貢献する。

謝 辞

本研究を行うにあたり様々な助言をいただいた当所推進性能部の CFD グループの諸氏、計算機の利用に便宜を図って下さった機関動力部佐藤誠四郎室長に感謝します。

参考文献

- 1) Kim, J., Moin, P. and Moser, R.: Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number, *J.F.M.*, vol.177, (1987), pp.133-166
- 2) Lee, M.J., Kim, J. and Moin, P.: Structure of Turbulence at High Shear Rate, *J.F.M.*, vol.216, (1990), pp.561-583
- 3) 富田康意、笠木伸英、黒田明慈: 乱流熱伝達の直接数値シミュレーション、第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集、(1989)、pp.415-418
- 4) Nallasamy, M.: Turbulence Models and Their Applications to the Prediction of Internal Flows: A Review, *Computers & Fluids*, vol.15, No.2, (1987), pp.151-194
- 5) Lakshminarayana, B.: Turbulence Modeling for Complex Shear Flows, *AIAA J.*, vol.24, No.12, (1986), pp.1900-1917
- 6) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuer, G.: Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review, *AIAA J.*, vol.23, No.9, (1985), pp.1308-1319
- 7) 春海一佳、菅進: 壁近傍領域における $k-\epsilon$ モデルの挙動について、第53回船舶技術研究所研究発表会講演集、(1989)、pp.62-65
- 8) 春海一佳、菅進: 壁近傍領域における $k-\epsilon$ モデルの挙動について (第2報)、第55回船舶技術研究所研究発表会講演集、(1990)、pp.32-37
- 9) Mansour, N. N., Kim, J. and Moin, P.: Near-Wall $k-\epsilon$ Turbulence Modeling, *AIAA J.*, vol.27, No.8, (1989), pp.1068-1073
- 10) 河村洋、羽田克幸: DNS データベースを利用した壁乱流モデルの再検討、第6回生研 N S T シンポジウム講演梗概集、(1991)、pp.9-12
- 11) Bernard, P.S.: Limitations of the Near-Wall $k-\epsilon$ Turbulence Model, *AIAA J.*, vol.24, No.4, (1986), pp.619-622
- 12) Jones, W.P. and Lauder, B.E.: The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.16, (1973), pp.1119-1130
- 13) Launder, B.E. and Sharma, B.I.: Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning

- Disc, Lett. Heat Mass Transfer, vol.1, (1974), pp.131-138
- 14) Lam, C.K.G. and Bremhorst, K.: A Modified Form of the $k-\epsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence, Trans. ASME: J. Fluid Eng., vol.103, (1981), pp.456-460
- 15) Myong, H.K.: Fundamental Studies on Two-Equation Turbulence Model for Numerical Predictions of Wall-Bounded Shear Flow and Heat Transfer, 東京大学博士論文, (1988)
- 16) 長野靖尚、田川正人、新美幹夫: $k-\epsilon$ 乱流モデルの改良、日本機械学会論文集 (B編)、55巻、512号、(1989)、pp.1008-1015
- 17) 笠木伸英、鹿園直毅、稲垣照美: 剪断自由な壁乱流の $k-\epsilon$ 二方程式モデルによる数値予測、第3回数値流体力学シンポジウム講演論文集、(1989)、pp.327-330
- 18) スハス V. パタンカー: コンピュータによる熱移動と流れの数値解析、森北出版、(1985)
- 19) 小竹進、土方邦夫: パソコンで解く熱と流れ、丸善、(1988)
- 20) Mansour, N.N., Kim, J. and Moin, P.: Reynolds-stress and Dissipation-rate Budgets in a Turbulent Channel Flow, J.F.M., vol.194, (1988), pp.15-44
- 21) Eckelmann, H.: The Structure of the Viscous Sublayer and the Adjacent Wall Region in a Turbulent Channel Flow, J.F.M., vol.65, (1974), pp.439-459
- 22) 藤沢延行、岡沢政喜、白井紘行: 低レイノルズ数型 $k-\epsilon$ 乱流モデルを用いた境界層の遷移計算、日本航空宇宙学会誌、38巻、436号、(1990)、pp.42-49
- 23) 長野靖尚、菱田幹雄、浅野俊幸: 壁乱流の特性を考慮した改良 $k-\epsilon$ モデル、日本機械学会論文集 (B編)、50巻、457号、(1984)、pp.2022-2031
- 24) Bradshaw, P., Cebeci, T. and Whitelaw, J.H.: Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press, (1981)
- 25) Hinze, J.O.: Turbulence, McGraw-Hill, (1975)
- 26) Launder, B.E. and Spalding, D.B.: Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, (1972)
- 27) 谷下市松: 伝熱工学 裳華房(1986)