

コンプトン散乱角を乱数決定する一方法

山越 寿夫* 中田 正也**

One Way to Decide the Compton Scattering Angle from its Cumulative Probability in the Monte Carlo Calculation

By

Hisao YAMAKOSHI and Masaya NAKATA

累積確率としての乱数にもとづくコンプトン散乱角の新しい求め方をしめた。この方法はモンテカルロ法でより高いエネルギーのガンマ線を追跡するのに有用な方法である。

例として、エネルギーが5MeVから10MeVまでのガンマ線に対して必要とする表を4枚かかげた。この場合、散乱角は1回のテーブルルックアップとせいぜい5回の乗算および2回の除算の操作の結果として1°以内の精度で決定される。

A new way to decide the Compton scattering angle from a random number given as its cumulative probability is presented. This way is useful to trace rather higher energy γ rays in the Monte Carlo method calculation.

As an example, four tables necessary for the γ ray energy range from 5MeV to 10MeV are shown. The present example gives the scattering angle with accuracy less than one degree through one table-look-up step and at most five multiplying and two dividing steps.

1. ま え が き

ガンマ線の透過、散乱、吸収等の現象を思考実験にかけるモンテカルロ法の計算に必要なガンマ線のコンプトン散乱角を決定する方法について、高エネルギーの場合にも有効な一方法を考案した。

2. 原理と在来の方法

ガンマ線を追跡して物質中の電子のコンプトン散乱を考察する場合には、その結果としての散乱後の方向とエネルギー（又は波長）とを決定しなければならない。

この方向とエネルギーとの間には比較的簡単な関係が存在し、そのどちらかがまず決定されればよい。

$$E = \frac{mc^2 E_0}{mc^2 + \frac{E_0}{h}(1 - \cos\theta)} \quad (1)$$

ここで

E_0 は衝突前のガンマ線のエネルギー

E は衝突後のガンマ線のエネルギー

h はプランクの定数

m は電子質量

c は光速

θ は入射ガンマ線と散乱ガンマ線とのなす角度

(= 散乱角) (Fig. 1 参照)

コンプトン散乱後の散乱方向の決定には入射ガンマ線の方向を軸とする経角 ψ と極角 θ との二個を決定しなければならないが、 ψ については通常の条件では、 ψ について均等な散乱が起きると考えてよく、従って、区間 $\psi=0\sim 2\pi$ に矩形乱数(0~1に均等に分布する乱数)をあてはめればよい。 θ については、Klein-Nishinaの式により θ 方向の散乱が生ずる確率を求め、その $\theta(=0\sim\pi)$ の間の累積確率を0~1の乱数にあてはめればよい。

以下に例としてしめす式は、Davison & Evansが誘導したものであり、¹⁾ 1個の電子によるコンプトン散乱をしたガンマ線の数ある角度まで積分したものである。

*原子力船部 **東海支所

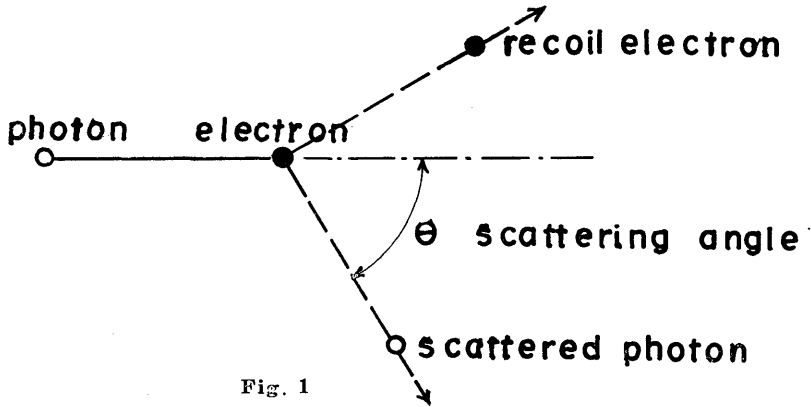


Fig. 1

$$\sigma^{\theta} = \pi r_0^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha^2(1+\alpha-\alpha\cos\theta)^2} [(4+10\alpha+8\alpha^2+\alpha^3) - (4+16\alpha+16\alpha^2+2\alpha^3)\cos\theta + (6\alpha+10\alpha^2+\alpha^3) \times \cos^2\theta - 2\alpha^2\cos^3\theta] + \left(\frac{\alpha^2-2\alpha-2}{\alpha^3} \right) \times \ln(1+\alpha-\alpha\cos\theta) \right\} \quad (2)$$

ここで

α は衝突前のガンマ線のエネルギーを m_0c^2 を単位として現わした数値

r_0 は古典的電子半径

である。

この式を正直に衝突毎に計算していたのでは如何に電子計算機といえども時間を要して費用がかかる。むしろ、それだけの費用をサンプル抽出回数を増すことで統計的誤差を少なくする方面に廻したいため、(2)式

を必要精度を守って近似する式を発見する方に努力が払われた。

一方、散乱後に残る光子エネルギーを期待する確率の累積確率を乱数にあてはめてもよいわけではあるが全く同程度の長い複雑な式となる。

以下にしめす式は、Cashwell & Everett の Los Alamos 研究所の教科書²⁾から挙げた例であるが、(2)式と同様に自然対数を計算しなければならぬ処が弱味である。

$$\sigma_E(\text{compton}) = \int_{E/(1+2E)}^E \sigma_E(E') dE' = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+E}{(1+2E)^2} + \frac{2}{E^2} + \frac{E^2-2E-2}{2E^3} \ln(1+2E) \right\} \quad (3)$$

また、Bengt Carlson は、(3)式から衝突後のエネルギーを決める代りに、二組の近似式を与えている。³⁾

$$\left. \begin{aligned} E' &= \frac{E}{1+Sr+(2E-S)r^3} \\ E' &= \frac{E}{1+Sr+(2E-S)r^3} + \frac{(E-4)r^2(1-r)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに

$S = E/(1+0.5625E)$ であり

上側の式は $E \leq 4$
下側の式は $4 < E \leq 10$ の範囲に適用出来るとした。

エネルギー単位は $m_0c^2 = 0.5108\text{MeV}$ である。

r は矩形乱数である。

(4)式によって $10m_0c^2$ ($\sim 5\text{MeV}$) までの衝突が扱えることになるわけであるが、他にも近似式を用いた例はある。しかしいづれにしても、エネルギーが高くなるにつれて式が複雑化する傾向は免かれず、(4)式は末だ簡単な方である。

すなわち、例えば、Berger は多項式で計算をして

(312)

いる。⁴⁾

$$\lambda_{n+1} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij}(\lambda_n)^i r^j \quad (5)$$

ここで

r は(4)式と同様に乱数であり、

λ_n は衝突前の波長で(4)式の場合の E の逆数であり

λ_{n+1} は衝突後の波長で E' の逆数である。

A_{ij} はマトリックスの形で書きあらわすと

$$\left. \begin{aligned} 0.05 \leq \lambda_n \leq 0.5 \text{ では} \\ i=0 \sim 3 \quad j=0 \sim 5 \end{aligned} \right\} \text{の24個}$$

$$\left. \begin{aligned} 0.5 \leq \lambda_n < 10.0 \text{ では} \\ i=0 \sim 3 \quad j=0 \sim 5 \end{aligned} \right\} \text{の24個}$$

$$10 \leq \lambda_n \leq 16 \text{ では } \left. \begin{array}{l} i=0 \sim 3 \quad j=0 \sim 3 \end{array} \right\} \text{ の16個}$$

の要素がある。

この方法では、 λ_n が 0.05 すなわち $E=20$ (~10 MeV) まで扱えることになっている。しかし、与えられた λ_n, r から λ_{n+1} を求めるのに

$$2 \times i \times j + (i-1) + (j-1) = 2 \times 24 + 3 + 5 = 56 \text{ (回)}$$

の剰算を必要とするので、かなり時間を要する方法である。

我々が常時使用する電子計算機; NEAC 2206 は、四則演算、転送、判断等の動作の中では特に剰除算が遅いので、剰除算の回数に関する限り(4)式の方が望ましいと云える。

以上の経過から我々は、特にエネルギー範囲が 5

MeV を超えて 10MeV までの間に通用出来る迅速な方法を考案した。この方法を NEAC 2206 用にコード化してみると、剰算が 4 ~ 5 回、除算が 2 回で済み、結果は最大 1° の誤差で散乱角; θ° が得られ、精度は相当に良好である。

3. 方法の内容

以下順を追って、此の方法の考案方、結果並びに結論を述べて行く事にする。

3.1 考えかた

まず、(2) 式の右辺で散乱角 θ° およびエネルギーのパラメタ α を与え、その結果の値; $r = e^{\sigma\theta}$ を $r = e^{\sigma\theta} \times 10^{27}$ とする事とする。

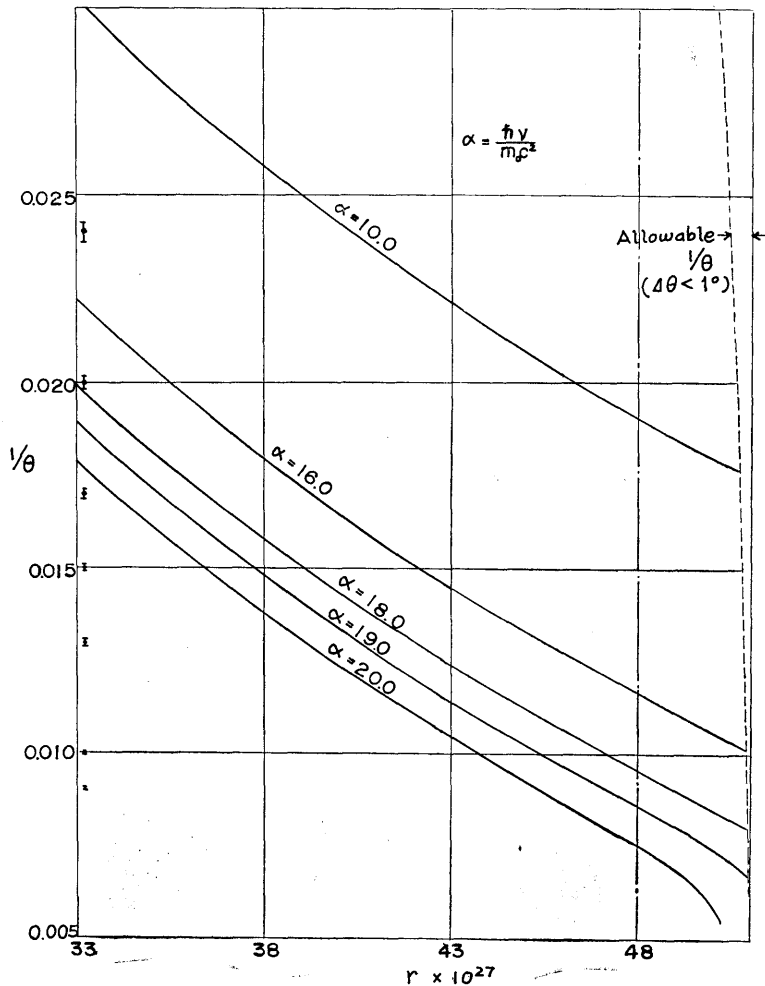


Fig. 2

縦軸に $1/\theta^\circ$ をとり、横軸に r をとれば、 α をパラメータとした曲線群が描かれる。(Fig. 2を参照) この場合のパラメータの範囲は、エネルギー区間; 5~10MeV に対応して $10 \leq \alpha \leq 20$ であり、曲線群はこの場合非常によく似たものとなる。その中のどれか一本の曲線を選び、適当な平行移動をさせることで他のすべての曲線に重ね合わせることが出来る。

すなわち、この手続の意義は、 θ, α, r の間の関係を直接に求めず、三変数をいろいろ変形してグラフを描き、上記のような条件を満たすものとして、 $1/\theta^\circ$ を発見したと云うことである。

以後、選んだ曲線を基準曲線と呼ぶことにする。また、我々の場合は、 $\alpha=20$ の場合の曲線を基準曲線にとるものとする。

我々の問題は、 α 及び r の値を指定して θ° の値を決定することである。この問題を解くにあたり、二つの場合が考えられる。

まず、 ≤ 48 の場合である。

この場合、Fig. 2を見ればわかるように、基準曲線を縦軸に平行に適当な値だけ移動させ、指定された α の値の曲線に重ねる方法が最もよい。しかもその場合は、 θ° の値が 1° 以内の精度で求まるように重ねることが出来る。すなわち、 $r=48$ の値の附近で両曲線をよく一致させ、 r の値のより小さな領域での両曲線のずれが Fig. 2の右端にしめしてある点線の曲線のはば以内に納まるようにすることが可能である。Table II には、 α の値に対するこの平行移動すべき値をしめしてある。

したがって、 α と r の値が指定されて r の値が 48 以下である場合は、Table II から α の値に対応する平行移動の量; $(1/\theta^\circ)\alpha$ を求め、基準曲線上の r に対応した $(1/\theta^\circ)_r$ の値も Table I より求めて(内挿法より)、両者の和の逆数として θ° を決定することになる。

次に、 $r > 48$ の場合である。

この場合は、Fig. 2を見ればうなづけるように、基準曲線を横軸に平行に適当な移動をさせて重ねる操作を行えばよい。この場合も、得られる結果の誤差に関する注意は前の場合と同様である。

したがって、今度の操作の結果として、問題は、指定された (α, r) の組でできるグラフ上の点が基準曲線上のどの r の値に対応した点になるかと云う問題に変わり、したがってその基準曲線上の対応した r の点(これを r' と名づけて r と区別する)に対応した $1/\theta^\circ$ が決定されればよいことになる。

(314)

横軸に平行移動させる量; Δr は、Table III, IVを用い、指定された α に固有な量である d_0 と r_0 を求めて、以下の式より決定される。

$$\Delta r \equiv d_0 - [0.04748417(r_0 - r)(20 - \alpha)] \quad (6)$$

また基準曲線上の対応した r の値: r' は

$$r' \equiv r - \Delta r$$

より決定される。したがって、 r' に対応した $1/\theta^\circ$ の決定は、Table I より内挿法で決定される。

以上が我々の方法の考えかたの骨子である。

3.2 方法の手順

実際のモンテカルロ法では、 r の値としては、すべての α に関して $\theta^\circ = 180^\circ$ で 1 の値になるように規格化されている。したがって与えられる量は α と規格化された r の値; \tilde{r} であり、 \tilde{r} から r を決定する操作が存在しなければならない。

これは、 α に対応した r_0 を Table IV より求め以下の関係より決定される。

Table I

Table of $\left(\frac{1}{\theta^\circ}\right)_r$ as a function of r $r \equiv r_0 \tilde{r}$
 \tilde{r} is random number

$r (\times 10^{-27})$	$1/\theta^\circ$
50.193	0.0055556
50.190	0.0056180
50.179	0.0056818
50.160	0.0057471
50.134	0.0058140
50.101	0.0058824
50.060	0.0059524
50.011	0.0060241
49.956	0.0060976
49.821	0.0062500
49.611	0.0064516
49.295	0.0067114
48.014	0.0075758
44.056	0.0099010
39.914	0.012500
37.124	0.014493
34.109	0.016949
30.906	0.020000
25.172	0.027027
18.830	0.038462
14.270	0.050000
5.8384	0.100000
0.075766	1.000000
0.00019424	20.00000
0.00000000	1000.000

Table II

Table of $\left(\frac{1}{\theta^\circ}\right)_\alpha$ as a function of α

α	$1/\theta^\circ$
10.0	0.011452
10.5	0.010768
11.0	0.010068
11.5	0.009358
12.0	0.008688
12.5	0.008083
13.0	0.007448
13.5	0.006845
14.0	0.006239
14.5	0.005665
15.0	0.005115
15.5	0.004565
16.0	0.004025
16.5	0.003495
17.0	0.003005
17.5	0.002505
18.0	0.002015
18.5	0.001502
19.0	0.001015
19.5	0.000550
20.0	0.000000

Table III

Table of d_0 as a function of α
 $d_0 = r_0 - 50.193$

α	$d_0(\times 10^{-27})$
10.0	31.487
10.5	28.846
11.0	26.390
11.5	24.102
12.0	21.962
12.5	19.957
13.0	18.073
13.5	16.300
14.0	14.627
14.5	13.046
15.0	11.548
15.5	10.129
16.0	8.780
16.5	7.497
17.0	6.275
17.5	5.109
18.0	3.996
18.5	2.932
19.0	1.913
19.5	0.937
20.0	0.000

Table IV

Table of r_0 as a function of α

α	$r_0(\times 10^{-27})$
10.0	81.680
10.5	79.039
11.0	76.583
11.5	74.295
12.0	72.155
12.5	70.150
13.0	68.266
13.5	66.493
14.0	64.820
14.5	63.239
15.0	61.741
15.5	60.322
16.0	58.973
16.5	57.690
17.0	56.468
17.5	55.302
18.0	54.189
18.5	53.125
19.0	52.106
19.5	51.130
20.0	50.193

$$r \equiv r_0 \tilde{r} \quad (7)$$

以上のべて来た事柄をまとめると以下の手順で計算が行われることになる。

I) 問題 $m_0 c^2 = 0.511084 \text{ MeV}$ を単位とした入射ガンマ線エネルギー; α 並びに矩形乱数 \tilde{r} (≤ 1.0) を与えて散乱角 θ° を決定せよ。

II) 解法

II-A) Table IV より α に対応する r_0 の決定

II-B) 関係式 $r \equiv r_0 \tilde{r}$ より r の決定

II-C) $r > 48$ の場合

C-I) Table III より α に対応する d_0 の決定
(実際の計算機の中では $d_0 = r_0 - 50.193$ を使用する)

C-II) $(r_0 - r)(20 - \alpha) \times 0.04748417$ の計算の後

$$\Delta r \equiv d_0 - [0.04748417(r_0 - r)(20 - \alpha)] \quad (8)$$

の決定

C-III) $r' \equiv r - \Delta r$ の算出

C-IV) r' に対応する $1/\theta^\circ$ を Table I より決定

C-V) 決定した $1/\theta^\circ$ の値の逆数として θ° を求める。

II-D) $r \leq 48$ の場合

D-I) Table I から r に対応した $(1/\theta^\circ)_r$ を求める。

D-II) Table II から α に対応した $(1/\theta^\circ)_\alpha$ を求める。

D-III) $(1/\theta^\circ)_r + (1/\theta^\circ)_\alpha \equiv 1/\theta^\circ$ を計算する。

D-IV) 結果の逆数として θ° を求める。

4. 結果と精度

上記の手続きを Table V に与えた (α, \tilde{r}) の組に適用し、その結果と精度を Table IV にしめた。なお、ここで使用した \tilde{r} は、(2)式の右辺に $\alpha = 11.5, 15.5, 18.0$, および $\theta^\circ = 180^\circ, 150^\circ, 90^\circ, 30^\circ$ の各々の値を入れて r を決定し、次いで 180° の場合に r が1の値となるように規格化したものを採用している。 $(\alpha$ の値にかかわらず、 180° で1となるようにしてあるのがもとと \tilde{r} の定義である。)

Table IV で、例えば $\alpha = 15.5$ の場合を着目する。 150° の θ° をねらって我々の方法を適用すれば、誤差が -0.043% で、また 90° および 30° をねらえばそれぞれ、 -0.285% と $+0.66\%$ と云う結果が得られることがわかる。

このことは、 α をある値に固定した時、 θ° が小さな

Table V
 $\bar{r}(\alpha, \theta^\circ)$

$\alpha \backslash \theta^\circ$	150°	90°	30°
11.5	0.98069	0.81740	0.37975
15.5	0.98215	0.82888	0.40433
18.0	0.98282	0.83428	0.41656

Table VI
Result of example and accuracy

$\alpha \backslash \theta^\circ$	150°	90°	30°
11.5	149.7701° (-0.15%)	89.67001° (-0.371%)	30.51664° (+1.7%)
15.5	149.9362° (-0.043%)	89.74400° (-0.285%)	30.198° (+0.66%)
18.0	149.9903° (-0.007%)	89.935° (-0.073%)	30.018° (+0.06%)

値となれば基準曲線とのずれが大きくなることを意味するが、他方、そのずれの値は誤差が散乱角であらわして1°以内の結果となるように重ねられていることをしめしている。

参 考 文 献

- (1) C. M. Davison & R.D. Evans
"Gamma-Ray Absorption Coefficients" Rev. of Mod. Physics. 24 No.3 '52
- (2) E. D. Cashwell & C. J. Everett
"A Practical Manual on the Monte Carlo Method for Random Walk Problems"
Pergamon Press '59
- (3) B. Carlson
"Gamma-Ray Diffusion through Matters"
A. E. C. U—2857
- (4) M. J. Berger
"Reflection and Transmission of Gamma Radiation by Barriers; Monte Carlo Calculation by a Collision-Density Method"
Jour. of Research of the N. B. S 65 No.6 '55
(原稿受付 1965. 9.20)