

揚力面の解法に関する考察

(特に Flax の方法の理論的根拠について)

花 岡 達 郎*

Remarks on the Numerical Methods for Solving the Integral Equation of a Lifting Surface

(On the Theoretical Foundation of Flax's Method)

By

Tatsuro Hanaoka

The problem of determining hydrodynamic forces on a rudder or a screw blade leads to a singular homogeneous Fredholm integral equation between pressure and upwash. The problem must be treated numerically with the aid of high-speed computers, because it cannot, in general, be solved analytically. The methods of solution have been developed in three directions, collocation method,^{1), 2), 3)} Flax's method,^{4), 5)} and least-squares method.^{6), 7)}

The present paper describes the outline of the three methods. The correlation among them and the theoretical foundation of Flax's method are shown.

は し が き

舵とかプロペラの様に翼と考えられるものの三次元流場を計算する場合、普通それ等を揚力面に置換えて解析する。翼の形状及び運動状態を与えて、翼面の揚力分布を求めることは、積分方程式を解く問題に帰着する。

揚力面の積分方程式は一般に解析的に解くことが不可能なものであるから、それを連立一次方程式の形に変換して、数値的にその解を求めるのが一般である。

電子計算機が現在の様に普及すると、揚力面の積分方程式を計算するのに、さほどの苦労は無い様に見えるのであるが、現実には大型電子計算機を用いても曲折なく解が得られるというのではなく、当事者は並ならぬ苦勞をしている様である。

揚力面の積分方程式は特異核をもち、それを含む数値積分は仲々精度よく行ない得ない。最適標点法の場合を例にとると、数値積分の精度をよくするため、標点の数を増すと、それに伴って連立方程式の元数が増

加し、方程式を解く数値計算の途中で桁落ちして、むしろ結果を悪くしてしまう。どの様な方法をとるにしても、連立方程式の元数が多くなることは好ましくない。したがって、元数が少くて、精度のよい連立方程式を導くことが、揚力面の積分方式解法の要諦である。

最近の揚力面の計算法は何れもそこに主眼が置かれているが、その思想は単に計算精度の向上を計る言うものではなく、計算結果の使用目的に応じた精度と言う処に重点の置かれているのが、その一つの特徴である。

それ等の解法を大別すると

- (1) 最適標点法 (collocation method)^{1), 2), 3)}
- (2) Flax の変分原理を用いる方法^{4), 5)}
- (3) 最小二乗法の方法^{6), 7)}

の3つの系列になる。

揚力面の計算法は航空機のフラッターに関連して、

註：collocation method は数値解析に普通用いられる用語で、局所適合法と呼ばれ、その方法は翼についても以前から用いられて来た。しかしここで言う collocation はその一種であるが、意図する所が多少異なるので、最適標点法と名付けてみた。

* 運動性能部

非定常翼を中心に発展して来たが、最近では一般の学者の手を離れ、主として実際問題に当面する技術者によって研究されているため、資料を入手する機会は少ないのであるが、僅かに公表された報告だけでも最近の動向をうかがい知ることが出来る。^{9), 9), 10)} それ等の中で最適標点法は計算の手数が少いためか、最も広く行なわれている模様であるが、特異点附近の数値計算にむつかしい所があって、計算の実用化については、まだ的確な見通しは得られていない様である。最小二乗法の方法は最も無難な理論であるが、演算子行列の計算に手数がかかるため、現在一般に用いられる計算機の能力を幾分越えた方法の様に見える。Flaxの方法は計算の方法、その手数等から見て、上記2つの方法の中間に位するもので、恐らく最も実用的なものと思われるが、理論の基礎に曖昧な所があるためか、利用する人は少ない。

本文は Flax の方法の理論的根拠を明確にすることに重点をおいて、その方法と他の2つの方法の関係を、直進揚力面を例にして解説したものである。三者を並べて比較して見ると、相互の関連が浮彫されて、味わい深いものがあるし、また今後この種の問題に当面したときの参考にもなるであろう。

1. 最適標点法

この方法は H. Multhopp¹⁾ によって創案され、J. R. Richardson²⁾, D. E. Davies³⁾ 等によって完成されたもので、A. H. Flax の理論と同じに高速電子計算機の黎明期に現われた理論である。

翼面上の有限個の点の揚力密度を求めるため、吹上げ(upwash)の連続分布を与えるならば、解は一種類であるが、吹上げとして与えるものが有限個の点の上のものである場合、この標点位置の選択が自由であれば、解は無数に存在する。それで、求められる揚力分布密度の誤差を最小にする様な吹上げの標点と荷重(揚力分布)の標点との組合せを求め、これによって連立一次方程式を組立てるのがこの方法の主旨である。

揚力分布は未知関数であるから、揚力面が解かれた後でなければ、厳密な意味の最適標点は求められない。そこで、この方法では揚力線理論の考えを取入れて、翼弦方向には二次元流として最適標点を求め、翼幅方向には揚力線としての最適標点を求めている。

1.1 直進揚力面の積分方程式

先づ後の記述の便宜のため、直進揚力面について簡単に解説する。

翼が一定速度 V で x 軸の負の方向に進むものと

し、鉛直上方を z 軸とする右手座標系によって表わすと、揚力密度 Π と吹上げ w を結ぶ積分方程式は

$$-w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c'}{b(\eta-\eta')^2} \times \left\{ \frac{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi'_0)}{\sqrt{\{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi'_0)\}^2 + b^2(\eta-\eta')^2}} + 1 \right\} \times d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(1.1.1)$$

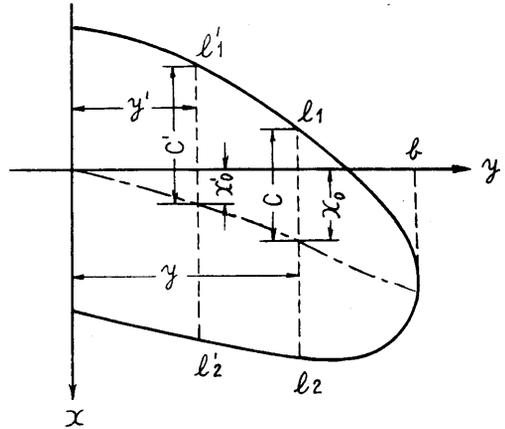


図 1

または

$$-w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c'}{b(\eta-\eta')^2} \times \left\{ \frac{\sqrt{\{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi'_0)\}^2 + b^2(\eta-\eta')^2}}{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi'_0)} + 1 \right\} \times d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(1.1.2)$$

である。ただし

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\Pi}{\rho V^2}, & w &= \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\delta \hat{z}}{\partial x} \\ \xi' &= (x' - x_0')/c', & \xi'_0 &= x_0'/c', \\ x_0' &= (l_1' + l_2')/2, & c' &= (l_2' - l_1')/2 \\ \xi &= (x - x_0)/c, & \xi_0 &= x_0/c, \\ x_0 &= (l_1 + l_2)/2, & c &= (l_2 - l_1)/2 \\ \eta &= y/b, & \eta' &= y'/b \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.1.3)$$

とする。ここに \hat{z} は翼の平均矢高面の z 座標を意味する。

以下では簡単のため、(1.1.1) または (1.1.2) を

$$-w(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma(\xi', \eta') K(\xi, \xi'; \eta - \eta') d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(1.1.4)$$

の様に表示することがある。

翼の縦横比が大きい場合には、翼面上の大部分の処

で

$$\sqrt{\{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi'_0)\}^2+b^2(\eta-\eta')^2} \doteq b|\eta-\eta'| \dots\dots\dots(1.1.5)$$

とおいても、誤差は少いから、(1.1.2) は近似的に

$$-w = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c' \operatorname{sgn}(\eta-\eta')}{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi'_0)} d\xi' d\eta' \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 \frac{[\gamma]}{\eta-\eta'} d\eta'$$

即ち

$$-w = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi-\xi'} d\xi' + \alpha_i \dots\dots\dots(1.1.6)$$

の様に表わすことができる。ただし

$$[\gamma] = \frac{c}{b} \int_{-1}^1 \gamma d\xi, \quad \alpha_i = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d[\gamma]/d\eta'}{\eta-\eta'} d\eta' \dots\dots\dots(1.1.7)$$

である。

(1.1.6) において、 w, α_i を既知と仮定してKuttaの流出条件のもとに、 γ について解くと、

$$\gamma = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{w}{\xi-\xi'} d\xi' - 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \dots\dots\dots(1.1.8)$$

である。これの両辺を ξ で -1 より 1 迄積分し、(1.1.7) の関係を適用して、 $[\gamma]$ の積分方程式の形に表わすと、

$$\frac{b[\gamma]}{2\pi c} + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d[\gamma]/d\eta'}{\eta-\eta'} d\eta' \\ = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} w d\xi' \dots\dots\dots(1.1.9)$$

となる。これが Prandtl の揚力線の積分方程式である。

(1.1.7) の α_i は (1.1.1) の形を用いると

$$\alpha_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{[\gamma]}{(\eta-\eta')^2} d\eta' \dots\dots\dots(1.1.10)$$

の様に表わされる。この発散積分は Hadamard の有限部分をとる。

1.2 翼弦方向の最適標点

二次元流の解 (1.1.8) を参照すると、揚力分布は

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{r=0}^{\infty} A_r(\eta) \xi^r \dots\dots\dots(1.2.1)$$

の形に表わすのが妥当である。

註：1.2 及び 1.3 節は Davies の原論文の要点を抜萃したものである。

(1.2.1) の総和の中を組変えて、 ξ の r 次多項式の総和の形で表わしておく、後の解析に好都合である。即ち $l_r(\xi)$ を ξ の r 次多項式として、

$$\gamma = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{r=0}^{\infty} a_r(\eta) l_r(\xi) \dots\dots\dots(1.2.2)$$

の様に表わされるものとする。

γ を近似的に

$$\gamma^*(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{r=0}^{n-1} a_r^*(\eta) l_r(\xi) \dots\dots\dots(1.2.3)$$

の様に有限項で表わす。これが η の或る与えられた点 η_0 において最良の近似式であるためには、

$$\int_{-1}^1 [l_r(\xi, \eta_0) - \gamma^*(\xi, \eta_0)]^2 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi \dots\dots\dots(1.2.4)$$

が極小になる必要がある。この式の $\sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)}$ は weight function である。

$l_r(\xi)$ が weight function $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ に関して、 $(-1, 1)$ の区間で直交関数列をつくるとき、即ち

$$\int_{-1}^1 l_r(\xi) l_s(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} d\xi = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r=s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \dots\dots\dots(1.2.5)$$

であるならば、(1.2.2) の $a_r^*(\eta_0)$ として

$$a_r^*(\eta_0) = \int_{-1}^1 \gamma(\xi, \eta_0) l_r(\xi) d\xi, \quad 0 \leq r \leq n-1 \dots\dots\dots(1.2.6)$$

をとるとき、最小二乗法でよく知られている様に、(1.2.4) の誤差は最小になる。 $0 \leq r \leq n-1$ では a_r^* は a_r と同一のものである。

以上のことだけならば、単に揚力分布を最小二乗法の公式を用いて表わしたただけのことで、積分方程式とは何等の関係はなく、(1.2.1) の n 項迄をとったものと同等である。最適標点法はここから更に吹上げ分布にさかのぼって、その誤差を最小にする方向に進んでいる。

(1.2.3.) を (1.1.4) に代入して w の誤差の最小なものを探めようとする、 $a_r(\eta)$ が未知量であるから、計算は複雑になって、第3章に述べる最小二乗法の方法と同じことになる。

最適標点を求めるのに (1.1.4) の代りに (1.1.6) を用いる。この式では w は変数 ξ, η のそれぞれに依存するものに分離されている。翼弦方向の標点分布を考えるには、 ξ を含む項のみを取上げればよい。

$$l_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}$$

の揚力分布に対応する吹上げを w_r で表わすと、

$$-w_r(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} \frac{l_r(\xi')}{\xi-\xi'} d\xi' \dots\dots\dots(1.2.7)$$

である。そして揚力分布 (1.2.2) に対応する吹上げ $u(\xi, \eta_0)$ は

$$u(\xi, \eta_0) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(\eta_0) w_r(\xi) \dots\dots\dots(1.2.8)$$

の様に表わされる。

ξ の n 個の異なる値に対して (1.2.8) を連立方程式の形に書き表わし、 $u(\xi)$ 及び $r \geq n$ に対する $a_r(\eta_0)$ を既知とすると、その連立方程式から、 $0 \leq r \leq n-1$ に対する $a_r(\eta_0)$ の値を求めることができる。最適標点法以前には、 $r \geq n$ に対して $a_r(\eta_0)$ を 0 とおき、 n 個の ξ の標点位置は勝手に定めた。最適標点法では

$$w_n(\xi) = 0 \dots\dots\dots(1.2.9)$$

の方程式を満足する n 個の点

$$\xi_k^{(w)}, k = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots(1.2.10)$$

について、(1.2.8) より n 元の連立方程式を作る。このときは $0 \leq r \leq n-1$ の $a_r(\eta_0)$ は $a_n(\eta_0)$ の値には無関係であるから、この標点上の $u(\xi)$ を用いて求められる $0 \leq r \leq n-1$ の $a_r(\eta_0)$ の近似値は最も誤差の少ないものである。

ここで $w_r(-\xi)$ と $l_r(\xi)$ の関係を調べてみる。

$w_r(-\xi)$ は ξ の r 次の多項式であるから、 $p \leq r$ の $l_p(\xi)$ の線型結合で表わされる。したがって (1.2.5) により、

$$\int_{-1}^1 w_r(-\xi) l_s(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} d\xi = 0, r < s \dots\dots\dots(1.2.11)$$

である。又 $r > s$ に対しても、

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 w_r(-\xi) l_s(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 l_s(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} d\xi \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} \frac{l_r(\xi')}{-\xi-\xi'} d\xi' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 l_r(\xi') \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} d\xi' \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{l_s(\xi)}{-\xi-\xi'} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 w_s(-\xi') l_r(\xi') \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} d\xi' = 0, r > s \end{aligned} \dots\dots\dots(1.2.12)$$

であるから、 $w_n(-\xi)$ は比例常数の違いがあるだけで、関数形は $l_n(\xi)$ と一致する。それで

$$l_n(\xi) = 0 \dots\dots\dots(1.2.13)$$

の方程式の根を

$$\xi_i^{(l)}, i = 1, 2, 3, \dots, n \dots\dots\dots(1.2.14)$$

とすると、これは (1.2.10) の $\xi_k^{(w)}$ と

$$\xi_k^{(w)} = -\xi_i^{(l)}, i = n-k+1 \dots\dots\dots(1.2.15)$$

の関係にある。

この様な $\xi_i^{(l)}$ は次の様にして求められる。

$$\xi = -\cos \theta \dots\dots\dots(1.2.16)$$

とおくと、(1.2.5) は

$$2 \int_0^\pi l_r(-\cos \theta) l_s(-\cos \theta) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \delta_{rs} \dots\dots\dots(1.2.17)$$

である。

$$l_r(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(r+1/2)\theta}{\cos \theta/2} \dots\dots\dots(1.2.18)$$

とすると、これは ξ について r 次の多項式で、且つ (1.2.17) を満足する。

$r = n$ とすると、(1.2.18) が 0 になる根は n 個あり、それは

$$\cos \theta = \cos \theta_i, i = 1, 2, 3, \dots, n \dots\dots\dots(1.2.19)$$

ただし

$$\theta_i = (2i-1)\pi / (2n+1) \dots\dots\dots(1.2.20)$$

である。したがって、

$$\xi_i^{(l)} = -\cos \theta_i \dots\dots\dots(1.2.21)$$

である。これを荷重標点 (loading points) と名づけることにする。これに対し $\xi_k^{(w)}$ は

$$\xi_k^{(w)} = \cos \theta_i = \cos \theta_{n-k+1} = -\cos \frac{2k\pi}{2n+1} \dots\dots\dots(1.2.22)$$

となる。これを吹上げ標点 (upwash points) と呼ぶことにする。

図2は $n=4$ としたときの標点分布図で、○印が荷重標点、●印が吹上げ標点である。

γ の近似式 γ^* の表現として荷重標点において γ と γ^* の値が一致する様な補間式を用いると実用上便利なことが多い。

それで、 γ^* として、

$$\gamma^*(\xi, \eta_0) = \sum_{i=0}^n \gamma(\xi_i^{(l)}, \eta_0) h_i^{(m)}(\xi) \dots\dots\dots(1.2.23)$$

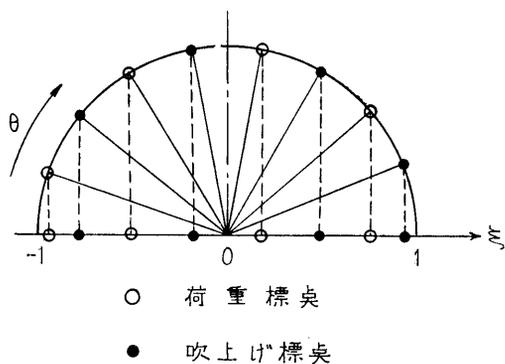


図 2

の形の近似式を用いる。その式の $h_i^{(m)}(\xi)$ は

$$h_i^{(m)}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \xi_i^{(l)} \\ 0, & \xi = \xi_j^{(l)}, j \neq i \end{cases}$$

の条件を満足し、且つ ξ の $n-1$ 次の多項式と $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ との積で表わされる関数である。それは

$$h_i^{(m)}(\xi) = \frac{L_n(\xi)}{(\xi - \xi_i^{(l)}) \left[-\frac{d}{d\xi} L_n(\xi) \right]_{\xi = \xi_i}} \times \sqrt{\frac{1+\xi_i^{(l)}}{1-\xi_i^{(l)}}} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \dots (1.2.24)$$

で与えられる。

1. 3 翼幅方向の最適標点

この場合も翼弦方向のときと同じ方法によって最適標点を求める。積分方式はやはり (1.1.6) を用いるが、 η を含む項、即ち α_i によって最適標点を導く。翼幅方向の揚力線の解を参照すると、

$$a_r(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_{rk}(\eta) \dots (1.3.1)$$

の形に表わすのが妥当である。ただし $p_{rk}(\eta)$ は η の k 次の多項式とする。この式の $a_r(\eta)$ は (1.2.2) の $a_r(\eta)$ を意味するものであるが、以下では a_r, p_{rk} の記号の r を省略して表わすことにする。 p_k は

$$\int_{-1}^1 p_k(\eta) p_s(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta = \delta_{ks} \dots (1.3.2)$$

を満足するものとし、また α_i は (1.1.10) の形を用いることにして

$$-w_k(\eta) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta'^2}}{(\eta-\eta')^2} p_k(\eta') d\eta' \dots (1.3.3)$$

と書く。方程式

$$w_m(\eta) = 0 \dots (1.3.4)$$

の m 個の根を

$$\eta_k^{(w)}, k=1, 2, \dots, m \dots (1.3.5)$$

とすると、これは吹上げを有限項の w_k の和で表わすとき、誤差を最小にする吹上げ標点である。

(1.3.3) を用いて (1.2.11), (1.2.12) と同じ様にすれば、 $w_k(-\eta)$ が $p_k(\eta)$ と同形の直交関数列をつくるのがわかる。

それで

$$p_m(\eta) = 0 \dots (1.3.6)$$

の根を

$$\eta_j^{(p)}, j=1, 2, \dots, m \dots (1.3.7)$$

とすると、これは $\eta_k^{(w)}$ と

$$\left. \begin{aligned} \eta_k^{(w)} &= -\eta_j^{(p)}, k=1, 2, \dots, m \\ j &= m-k+1 \end{aligned} \right\} \dots (1.3.8)$$

の関係にあることがわかる。いま

$$\eta = \cos \varphi \dots (1.3.9)$$

とおくと、(1.3.2) は

$$\int_0^\pi p_k(\cos \varphi) p_s(\cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \delta_{ks} \dots (1.3.10)$$

である。 η の k 次の多項式で、(1.3.10) を満足する $p_k(\eta)$ は

$$p_k(\cos \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin \varphi} \dots (1.3.11)$$

である。 $k=m$ のとき、これが零になるためには

$$\cos \varphi = \cos j\pi / (m+1), j=1, 2, \dots, m \dots (1.3.12)$$

でなければならない。よって荷重標点は

$$\eta_j^{(p)} = \cos \varphi_j, \varphi_j = j\pi / (m+1) \dots (1.3.13)$$

である。(1.3.8) によって吹上げ標点は

$$\begin{aligned} \eta_k^{(w)} &= -\cos(m+1-k)\pi / (m+1) \\ &= \cos k\pi / (m+1) \dots (1.3.14) \end{aligned}$$

となり、吹上げ標点と荷重標点は一致する。

$a^*(\eta)$ の近似式として

$$a^*(\eta) = \sum_{j=1}^m a(\eta_j) g_j^{(m)}(\eta) \dots (1.3.15)$$

の形の表示を用いると便利ながが多い。ただし、 $g_j^{(m)}(\eta)$ は $\sqrt{1-\eta^2}$ と η の $m-1$ 次の多項式の積で、

$$g_j^{(m)}(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta = \eta_j^{(m)} \\ 0, & \eta = \eta_k^{(m)}, k \neq j \end{cases} \dots (1.3.16)$$

を満足するものである。それは

$$g_j^{(m)}(\eta) = \frac{p_m(\eta)}{(\eta - \eta_j^{(p)}) \left(\frac{d}{d\eta} p_m(\eta) \right)_{\eta = \eta_j}} \times \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{1 - \eta_j^2}} \dots\dots\dots(1.3.17)$$

で与えられる。

翼弦方向の最適標点の数として、 $n=1$ にすると Weissinger 揚力線になる。又揚力線理論における Multhopp¹¹⁾ の基準標点は上記の翼幅方向の最適標点と同じものとなっている。これ等の計算法はこれ迄数々の成果を収めて来たのであるから、最適標点法は多分よい結果をもたらすものと思われるが、翼端附近では(1.1.6)の近似式が適当しないため、最適標点法の効果が失われることと、揚力面の計算には揚力線とは異なる問題点があるから、その運用には慎重でなければならぬ。

2. Flax の変分原理を用いる方法

Flax の方法の根底にある思想は、積分方程式を解くに当って、翼に働く揚力、モーメント、抵抗等の誤差が最小になる様に解を導くと言うことである。

A.H.Flax は積分方程式の問題を揚力分布を変関数とする或る汎関数の変分問題におきかえた。これが Flax の変分原理である。そしてその変分問題を直接法によって解くことを Flax は提案している。然し元の汎関数を変関数の2次式で表わすことがむづかしいため、変分問題はこれ迄不完全な形で処理され、所期の成果は収められていない様に見える。

2.1 Flax の変分原理

Flax の変分原理は汎関数

$$J = \iint [\bar{w}\gamma + w\bar{\gamma} + \bar{\gamma} \iint \gamma \cdot K(\xi, \xi'; \eta - \eta') d\xi' d\eta'] d\xi d\eta \dots\dots\dots(2.1.1)$$

を極小にする様な変関数 $\gamma, \bar{\gamma}$ を求めると、それが揚力面の積分方程式の解になるというものである。ここに $\bar{w}, \bar{\gamma}$ は reverse flow における吹上げ及び揚力分布で、(2.1.1)の面積分は揚力面全体に行なうものとする。

Flax の変分原理によると、(2.1.1)の第1変分は零であるから、

$$\delta J = \iint (\bar{w}\delta\gamma + w\delta\bar{\gamma}) d\xi d\eta + \iint \delta\bar{\gamma} d\xi d\eta \iint \gamma \cdot K(\xi, \xi'; \eta - \eta') d\xi' d\eta'$$

$$+ \iint \bar{\gamma} d\xi d\eta \iint \delta\gamma \cdot K(\xi, \xi'; \eta - \eta') d\xi' d\eta' = 0 \dots\dots\dots(2.1.2)$$

である。

reverse flow theorem は

$$\iint \bar{w}\gamma d\xi d\eta = \iint \bar{w}\bar{\gamma} d\xi d\eta \dots\dots\dots(2.1.3)$$

或は

$$\iint \bar{\gamma} d\xi d\eta \iint \gamma K d\xi' d\eta' = \iint \bar{\gamma} d\xi d\eta \iint \bar{\gamma} \bar{K} d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(2.1.4)$$

である。但し \bar{K} は reverse flow における核関数とする。

reverse flow theorem は direct flow と reverse flow の積分方程式が互に 関連積分方程式であるとき成立つ。この定理は流場に Green の第II定理を適用すると容易に導かれるものであるが、以下では流場の近似解を考察するのであるから、流場に成立つ定理としてではなく、数学的定理として reverse flow theorem を取上げねばならない。

(2.1.4) を (2.1.2) に適用して整理すると、

$$\iint \delta\bar{\gamma} [\bar{w} + \iint \bar{\gamma} \bar{K} d\xi' d\eta'] d\xi d\eta + \iint \delta\bar{\gamma} [w + \iint \gamma K d\xi' d\eta'] d\xi d\eta = 0 \dots\dots(2.1.5)$$

となる。 $\delta\gamma, \delta\bar{\gamma}$ は任意に選ぶことが出来るから、(2.1.5) が成立つためには、

$$-w = \iint \gamma K d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(2.1.6)$$

$$-\bar{w} = \iint \bar{\gamma} \bar{K} d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(2.1.7)$$

でなければならぬ。即ち(2.1.2)と(2.1.6)および(2.1.7)とは同等である。

揚力分布の近似解 γ^* に対応する吹上げを w^* で表わし

$$-w^* = \iint \gamma^* K d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(2.1.8)$$

$$-\bar{w}^* = \iint \bar{\gamma}^* \bar{K} d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(2.1.9)$$

の様定義する。(2.1.1)の γ を総て $\gamma^*, \bar{\gamma}^*$ で置換えると

$$J = \iint (\bar{w}\gamma^* + w\bar{\gamma}^* - w^*\bar{\gamma}^*) d\xi d\eta \dots\dots\dots(2.1.10)$$

となる。

揚力面を解いて求めたいと考える流体力 F が

$$F = \iint \bar{w}\gamma d\xi d\eta \dots\dots\dots(2.1.11)$$

で表わされるものとする。

F と J の差をとると¹²⁾,

$$F - J = \iint (\bar{w}\gamma - \bar{w}\gamma^* - \bar{w}\gamma^* + \bar{w}^*\gamma^*) d\xi d\eta$$

$$= \iint \{ \bar{w}(\gamma - \gamma^*) - \gamma^*(\bar{w} - \bar{w}^*) \} d\xi d\eta$$

である。(2.1.8), (2.1.9) の定義と, reverse flow theorem により

$$F - J = \iint \{ \bar{w}(\gamma - \gamma^*) - \gamma\bar{w}^* - \gamma^*\bar{w}^* \} d\xi d\eta$$

$$= \iint (\bar{w} - \bar{w}^*)(\gamma - \gamma^*) d\xi d\eta \quad \dots\dots(2.1.12)$$

または reverse flow theorem によって

$$F - J = \iint (\bar{w} - \bar{w}^*)(\gamma - \gamma^*) d\xi d\eta \quad \dots\dots(2.1.13)$$

と書かれる。

(2.1.12) を (2.1.11) と比較対照すると, (2.1.12) は流体力 F の誤差を表わすことがわかる。したがって Flax の変分原理は流体力の誤差を極小にすることを意味している。この流体力は

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{w} = \text{const} \text{ のとき} & F: \text{揚力} \\ \bar{w} = \xi \text{ のとき} & F: \text{モーメント} \\ \bar{w} = w \text{ のとき} & F: \text{誘導抵抗} \end{array} \right\} (2.1.14)$$

となる。

翼面上において $(\bar{w} - \bar{w}^*)(\gamma - \gamma^*)$ は正にも負にもなり得ると考えられるから, (2.1.1) が極値をとる様に近似解を求めても, それが最も誤差の少ないものと断定することは出来ない。これは Flax の方法の一つの欠点であろう。

2.2 揚力面全面に変分原理を適用する方法

Flax の解法は (2.1.1) の汎関数の変分問題を Rayleigh-Ritz の方法にならって, 直接法によって解こうとするものである。

揚力分布の試験関数 (trial function) を

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{rj} \xi^r \eta^j$$

.....(2.2.1)

$$\bar{\gamma}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{rj} (-\xi)^r \eta^j$$

.....(2.2.2)

とすると, これの第1変分は

註: 非定常翼の場合は普通に用いられる reverse flow theorem では力は計算出来ない。筆者の導いた reverse flow の第II定理¹³⁾を用いる必要がある。そのときは変分原理に適用する積分方程式の形が少し変わる。

$$\delta \bar{\gamma} = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \delta A_{rj} (-\xi)^r \eta^j$$

.....(2.2.3)

である。 $\delta \gamma$ についても同様の式で表わすことができる。

δA_{rj} は任意の値にとってよいものであるから, (2.2.3) を (2.1.5) に代入した場合, $\delta \bar{A}_{rj}$ の係数関数は0となる。よって

$$\left. \begin{array}{l} - \iint \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} w d\xi d\eta \\ = \iint \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} d\xi d\eta \iint \gamma K d\xi' d\eta' \\ - \iint \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \xi w d\xi d\eta \\ = \iint \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \xi d\xi d\eta \iint \gamma K d\xi' d\eta' \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \dots\dots\dots(2.2.4)$$

様な A_{rj} についての $n \times m$ 元の連立1次方程式が得られる。それを解いて A_{rj} を求めれば, (2.2.1) によって γ が得られる筈である。

(2.2.4) の形は (2.1.14) に示した F の種類には関係なく, 最初に仮定した試験関数 (2.2.1), (2.2.2) にも依存する。これでは初めに意図した所は殆んど充たされていない。その原因は汎関数 J が γ と $\bar{\gamma}$ の双1次形式で表わされているのに, γ と $\bar{\gamma}$ を互に無関係な変関数として取扱い, しかも direct flow のみを取上げているからで, この方法では変分問題の解法として, その効果を表わさない。

翼が前後対称な平面形をもつ平板のときは, $A_{rj} = A_{rj}$ であるから, 汎関数 J は A_{rj} の2次式となり, 上記の方法によって誘導抵抗の誤差が極小となる様な解が得られる筈である。

もし $\bar{\gamma}$ が既知ならば, reverse flow theorem により, 単に $\bar{\gamma}$ を積分するだけで流体力が得られるので, direct flow の積分方程式を解く必要はない。 $\bar{\gamma}$ の近似値が得られているときは, それを用いれば, (2.2.4) によって流体力の誤差の少ない解が得られる。例えば reverse flow の積分方程式として (1.1.6) の形の近似式を用いると, $\bar{\gamma}$ は近似的に

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{j=0}^{m-1} A_{0j} \eta^j \dots\dots\dots(2.2.5)$$

$w = \xi$ のとき

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \sum_{j=0}^{m-1} (A_{0j} - A_{1j}\xi) \eta^j \dots\dots\dots(2.2.6)$$

の様に表示される。

したがって揚力だけを必要とするときは、(2.2.4)の第1式だけ、またモーメントを必要とするときは第1式と第2式を解いて A_{0j} 、 A_{1j} を求めれば、或程度満足出来る解が得られるであろう。

2.3 揚力面の翼弦方向に変分原理を適用する方法

γ の翼幅方向の分布形は翼の平面形及び迎角分布に左右されるものであるから、翼の種類に応じてかなり変わるが、翼弦方向の分布形は翼端附近を除けば、翼型の二次元流としての特性から、略々推定できるものである。したがって γ を (2.2.1)、(2.2.2)の形の級数で表わしたとき、 ξ に関しては少しい項数で充分近似し得るものとみなして差支えない。

それで γ 、 $\bar{\gamma}$ を η の方向には単なる未知関数として表わし、

$$\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{r=0}^{n-1} A_r \phi_r(\eta) v_r(-\xi) \dots\dots\dots(2.3.1)$$

$$\bar{\gamma}(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sum_{r=0}^{n-1} \bar{A}_r \phi_r(\eta) v_r(\xi) \dots\dots\dots(2.3.2)$$

と置く。但し $v_r(\xi)$ は ξ の r 次の多項式である。これを Flax の変分原理に適用すると、

$$\delta \bar{\gamma} = \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \sum_{r=0}^{n-1} \delta \bar{A}_r \phi_r(\eta) v_r(\xi) \dots\dots\dots(2.3.3)$$

であるから、direct flow の項だけを書く

$$\left. \begin{aligned} & - \iint \bar{\phi}_0 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_0(\xi) w d\xi d\eta \\ & = \iint \bar{\phi}_0 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_0(\xi) d\xi \iint \gamma K d\xi' d\eta', \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (2.3.4)$$

である。 $\phi_r(\eta)$ は任意の値にとってもよいものであるから、(2.3.4)の η に関する積分は脱落して

$$\left. \begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_0(\xi) w d\xi \\ & = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_0(\xi) d\xi \iint \gamma K d\xi' d\eta', \\ & - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_1(\xi) w d\xi \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.5)$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v_1(\xi) d\xi \iint \gamma K d\xi' d\eta', \dots\dots\dots$$

と書かれる。これが Flax の連立積分方式で、この式の γ に (2.3.1) を適用して、 ϕ_r について解くのが Flax の方法である。

(2.3.5) は積分方程式 (1.1.4) に Galerkin の方法を適用した形になっている。もし (1.1.4)の両辺が

$$\int_{-1}^1 v_r(\xi) v_s(\xi) \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi = \delta_{rs} \dots\dots\dots(2.3.6)$$

を満足する直交関数列 $v_r(\xi)$ で展開出来るものとする、(2.3.5)は積分方程式 (1.1.4) の両辺でその係数関数が等しくなると置いた式である。

(2.3.6)の変数 ξ を $-\xi$ に置換えると、(1.2.5)と同形になるので、 $v_r(-\xi)$ は $l_r(\xi)$ に等しいことがわかる。したがって $v_r(\xi)$ が (1.2.7)の $w_r(\xi)$ と同等になることは既に最適標点法の所で述べた通りである。こうしてみると、Flax の方法は最適標点法の考えを局所適合ではなく積分平均の形で表現したものと解釈出来る。

Flax は (2.3.1)、(2.3.2)として Birnbaum 級数を用いているが、(2.3.6)を満足する $v_r(\xi)$ による級数を用いると (2.3.5)の連立方程式の対角元素が大きくなるので、数値計算には、この方が好都合であろう。

変分問題に Rayleigh-Ritz の方法が適用できる場合や、積分方程式が Fredholm の第2種の場合には Galerkin の方法を理論的に導くことが出来るが、Flax の方法はその何れにも属しない。したがってこの方法は変分問題の処理としては、理論的根拠に十分明らかでない所があるが、変分問題から離れて、単なる数値解析の方法として考えれば不都合はないし、事実、数値計算の結果では、他の方法によるものとよく一致すると言われる。⁹⁾

揚力面を近似的に揚力線として計算するとき、(2.3.5)の第1式が屢々用いられる。この式は (1.1.9)と同形であるから、揚力線の積分方程式を導く手段として適切なものである。

Flaxの変分問題をもっと完全な形で解くには direct flow と reverse flow を同時に解く様に工夫しなければならない。波の散乱の問題に関する積分方程式の数値解法として、Flax の変分問題と全く同形のものを取扱った例があるが、そこでは direct flow と reverse flow とに相当するものを同時に解いている。¹⁴⁾

3. 最小二乗法の方法

これは吹上げの誤差が極小になる様に積分方程式の数値解を求めるという、極めて常識的な方法であるが、計算に非常な手数を要するため、これ迄殆んど取上げられなかった。それが最近、W.P.Rodden & J.D.Revell, J.A.Fromme 等によって、その有用さが強調され、人々の関心を引く様になって来た。

この方法の利点は誤差の評価が比較的容易な所にあるが、複素数に対する最小二乗法の適用について、理論的に解明しなければならない所が残されている様である。

3.1 揚力面全面に最小二乗法を適用する方法

最小二乗法を吹上げに適用する手段としては幾つかのものが考えられるが、ここでは揚力分布を有限項級数で表わし、吹上げの誤差が極小になる様な上記有限項級数の係数の値を求めるという方法を取上げる。

揚力分布を (2.2.1) の形で表わすことにし

$$-w_{rj} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\xi, \xi'; \eta - \eta') \xi'^r \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} \eta'^j \sqrt{1-\eta'^2} d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(3.1.1)$$

と書くと、吹上げ w の近似値 w^* は

$$w^* = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{rj} w_{rj} \dots\dots\dots(3.1.2)$$

の様に表示される。

w の正確な値に対する二乗平均誤差 Ω は、

$$\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (w - w^*)^2 d\xi d\eta \dots\dots\dots(3.1.3)$$

で与えられる。これが極小になる様な A_{rj} を求めるのであるが、それは Ω の A_{rj} に関する微係数が 0 になるとすればよい。(3.1.3) は A_{rj} の二次式になっているので、 A_{rj} について

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w w_{00} d\xi d\eta \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{rj} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_{00} w_{rj} d\xi d\eta, \\ &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w w_{10} d\xi d\eta \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{rj} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_{10} w_{rj} d\xi d\eta, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.1.4)$$

の連立方程式が得られる。

(3.1.4) は A_{rj} について $n \times m$ 元の連立一次方程式であるから、これを解いて A_{rj} を求めれば、(2.2.

1) によって揚力分布の値が得られる。

この方法は最も明快であるが、 A_{rj} を未知数とする連立方程式の係数の計算に手間取るので、これ迄計算された例が少い様である。

非定常翼の場合は吹上げ w が複素数になるので、絶対値と偏角に分けて、(3.1.3) を処理しなければならぬと言ふめんどろが生じて来る。

3.2 揚力面の翼弦方向に最小二乗法を適用する方法

既に 2.3 節で述べた様に (2.2.1) の級数は翼弦方向には項数を少くとも十分な近似が得られることが多いので、この項数を節約して、近似をよくするため、最小二乗法を翼弦方向にだけ適用する。

γ を (2.3.1) の形で表わす。

$$-w_r^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(\xi, \xi'; \eta - \eta') \phi_r(\eta') v_r(-\xi') \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} d\xi' d\eta' \dots\dots\dots(3.2.1)$$

と書くと、 w の近似値 w^* は

$$w^* = \sum_{r=0}^{n-1} A_r w_r^* \dots\dots\dots(3.2.2)$$

の様に表示される。

η_0 なる断面の二乗平均誤差は

$$\Omega = \int_{-1}^1 (w - w^*)^2 f(\xi) d\xi \dots\dots\dots(3.2.3)$$

で与えられる。ここに $f(\xi)$ は weight function である。

(3.2.3) を極小にするには Ω の A_r に関する微係数が 0 になるとすればよいので

$$\left. \begin{aligned} &\int_{-1}^1 w w_0^* f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 w^* w_0^* f(\xi) d\xi, \\ &\int_{-1}^1 w w_1^* f(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 w^* w_1^* f(\xi) d\xi, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.2.4)$$

が得られる。

w_r^* の中には未知関数 $\phi_r(\eta)$ が含まれているから、(3.2.4) はこのままの形で解くことはむづかしい。それで (3.2.1) の計算に際して、(1.1.4) の代わりに、(1.1.5) の近似を採用して、(1.1.6) を用いると

$$\begin{aligned} -w_r^* &= \frac{\phi_r(\eta)}{2\pi} \int_{-1}^1 v_r(-\xi') \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} \frac{1}{\xi-\xi'} d\xi' \\ &+ \frac{1}{4b} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 \frac{c' \phi_r(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' \\ &\times \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v_r(\xi') \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} d\xi' \dots\dots\dots(3.2.5) \end{aligned}$$

である。

$$-w_r = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} \frac{v_r(-\xi')}{\xi-\xi'} d\xi' \dots (3.2.6)$$

と書くと、(3.2.5) は、

$$w_r^* = \phi_r(\eta)w_r + k_r(\eta)w_0 \dots (3.2.7)$$

の様に表示することが出来る。ただし w_0 は (3.2.6) で $r=0$ としたもので、これは常数である。

(3.2.7) を (3.2.4) に適用し、 w および w^* に $wf(\xi)$ のかかったものについて整理しなおすと、

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^1 w w_0 f(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 w_0 f(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma K d\xi' d\eta', \\ & \int_{-1}^1 w w_1 f(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 w_1 f(\xi) d\xi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma K d\xi' d\eta', \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (3.2.8)$$

と書かれる。

(3.2.8) の weight function を

$$f(\xi) = \sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)}$$

にとり、 $v_r(-\xi)$ が (2.3.6) を満足する直交関数列とすると、(3.2.8) は (2.3.5) と一致する。

以上の解析の結果は Flax の積分方程式が、Flax の意図とは異なるが、極値問題に対する一つの解答であることを示している。

4. 結 言

以上に述べた方法はどれも数値計算の工夫さえよければ、連立方程式の元数を増すことによって、いくらでも厳密解に近附くことが出来るが、それ迄の道程の長短は試験関数の基底の選定に左右される所が少くない。

最適標点法と Flax の連立積分方程式の方法はどれも揚力線の近似式を利用して、原理的に類似する部分が多い事に気付く。翼端附近を精度よく計算するには何等かの工夫が必要であろう。

渦格子の方法は既に廃れたかの如く見えたのであるが、再び見直されて来ている。¹⁵⁾ その理由は渦格子の解法は計算の手数が少く、精度が揚力面の解法に比べて遜色ないことがわかったためであろう。Falkner の渦格子¹⁶⁾ が矩形型であるのに対し、新しい渦格子は翼外縁形にならって傾斜した梯形型であるのがその新しい特徴である。翼が平面形でないときにこの方法は好都合である。

参 考 文 献

- 1) H.Multhopp, "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting Surface Theory)," R & M, No. 2884, 1950
- 2) J.R.Richardson, "A Method for Calculating the Lifting Forces on Wings (Unsteady Subsonic and Supersonic Lifting Surface Theory)," R & M No. 3157, 1955
- 3) D.E.Davies, "Calculation of Unsteady Generalised Airforces on a Thin Wing Oscillating Harmonically in Subsonic Flow," R & M, No. 3409, 1963
- 4) A.H.Flax, "General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory," J. of Aero. Sci. Vol. 19, No. 6, 1952
- 5) V.J.E.Stark, "On the Approximation of the Normal Velocity on Oscillating Wing," AIAA Journal, Vol. 4, No. 12, 1966
- 6) J. A. Formme, "Least-Squares Approach to Unsteady Kernel Function Aerodynamics," AIAA Journal, Vol. 2, No. 7, 1964
- 7) J.D.Revell and W.P.Rodden, "Remarks on Numerical Solutions of the Unsteady Lifting Surface Problem," AIAA Journal, Vol. 4, No. 1, 1966
- 8) Pao-Tan Hsu, "Some Recent Developments in the Flutter Analysis of Low-Aspect-Ratio Wings," Proceedings of the National Specialists Meeting on Dynamics and Aeroelasticity, 1958, Inst. of Aero. Sci.
- 9) W.S.Rowe, "Collocation Method for Calculating the Aerodynamic Pressure Distributions on a Lifting Surface Oscillating in Subsonic Compressible Flow," AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity, 1965
- 10) H.Ashley, S.Windall, M.T.Landall, "New Direction in Lifting Surface Theory", AIAA Journal, Vol. 3, No. 1, 1965
- 11) H.Multhopp, "Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflugeln," Luftfahrtforschung, Vol. 15, 1938
- 12) 別所正利, "境界値問題におけるガウスの積分について" 水槽委員会資料, 1967
- 13) T.Hanaoka, "On the Reverse Flow Theorem

- Concerning Wave-Making Theory," Proc. 9th Japan National Congress for Appl. Mech., 1959
- 14) N.Cameron, "The Numerical Solution of the Singular Integral Equation for Diffraction by a Soft Strip," Quart. Jour. Mech. and Appl. Math. Vol. 19, 1966
- 15) M.T.Landahl and V.J.E.Stark, "Numerical Lifting-Surface Theory—Problems and Progress," AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, 1968
- 16) V.M.Falkner, "The Solution of Lifting Plane Problems by Vortex Lattice Theory," R & M, No. 2591, 1947