

# 有限要素法による熱伝導解析プログラム SASKE-H1

高田 良夫\* 塚田 悠治\* 天田 重庚\* 町田 明正\*  
前橋 正雄\*\* 塩出敬二郎\*\* 高井 元弘\*\*

SASKE-H1 Program of Heat Conduction Analysis  
by the Finite Element Method

By

Yoshio TAKADA, Yuji TSUKADA, Shigeyasu AMADA, Akimasa MACHIDA,  
Masao MAEBASHI, Keijiro SHIODE and Motohiro TAKAI

## Abstract

SASKE-H1 program based on the finite element method was completed for the purpose of analyzing two-dimensional heat conduction problems in steady state. Without any modifying this program, it can be applied to the problems of two-dimensional body with arbitrary shape.

The temperature distribution in a piston was computed using this program and the satisfactory result was obtained.

As a result, it was made sure that this program was possible to be applied to practical problems with good accuracy.

## 1. ま え が き

1954年1月のアメリカ航空学会の年会にて発表された Turner, Clough, Martin, Topp 等の論文 "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures"<sup>1)</sup> に端を発した Matrix 法がまたたく間に構造解析の主役になった。さらにこの概念を用いて連続体を有限の要素によって分割し、隣接要素との相互作用はこれら要素の境界上の点にて行なわれるという "有限要素法" が開発された。もちろんこれらの方法は膨大な計算量と記憶容量を必要とするため電子計算機の発達がなければ考えられなかったことは明らかである。有限要素法の主流は連続体の応力解析であったが、徐々にその拡張がなされてきた<sup>2)</sup>。その中で熱伝導解析においては著しい成果をあげつつあるように思われる。特に有限要素法の最大の特徴である汎用性、すなわち一つのプログラムで任意の形状の物体に利用できる利点は、複雑な形をしている熱機関の部品の解析に最適である。現在まで有限要素法による熱伝導問題の論文はかなりの数にのぼるが、代表的なものを記

すと初期の研究的なもの<sup>3),4)</sup>、解説<sup>5)</sup>、ピストンの応力解析の一部に組込まれたもの<sup>6)</sup> 等になる。

1971年の6月に熱機関部品の強度解析のために実用に供し得る有限要素法プログラムの開発を目的として著者等で研究グループを作った。研究グループの最初の成果として二次元熱伝導解析プログラム、SASKE-H1 を完成した。プログラムの名称 SASKE-H1 は、本プログラムが応力解析のプログラムを基本にしているところから、Stress Analysis at SENKEN-Heat Conduction 1 より採用した。当所の共用計算機、「FACOM 270-20」の使用を前提としたために、プログラムの大きさにある程度の制限が課せられたが、大型計算機を対象とする場合への拡張は容易に可能である。

## 2. SASKE-H1 の概要

- i) 任意形状を有する二次元定常熱伝導解析用プログラム
- ii) 与えられる境界条件は固定境界条件 (温度が指定される場合) のみ

\* 機関開発部 \*\* 機関性能部 原稿受付: 昭和47年7月15日

- iii) 等方性物体に限る
- iv) 有限要素の数は最大 600 まで、節点の総数は 320 まで
- v) 使用原語は FORTRAN-IV
- vi) プログラムの構成はメインプログラムと 7 つのサブプログラムより成る

### 3. 基礎理論

一般に二次元定常熱伝導の現象は、 $\lambda$ ,  $Q$  を熱伝導率、単位面積当たりの熱発生量とすると次式で表わされる。

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0 \quad (1)$$

前章の ii) により境界条件は、

$$T = T_s \quad (2)$$

にて与えられる。(1)式は数学的には連続的な表現の微分方程式であるが有限要素法は変分原理に基礎をおく間接的な離散化手続きで、問題とする現象がある不変量(汎関数)を極値とするように進行する性質を利用するものである<sup>7)</sup>。(1)式が停留関数としての Euler 方程式となる汎関数  $\chi$  は、

$$\chi = \iint \left\{ \frac{1}{2} \lambda \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] - QT \right\} dx dy \quad (3)$$

によって与えられる。(3)式の第 1 変分をとり、変分と微分を入れ換える。

$$\delta \chi = \iint \left\{ \lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta T) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta T) \right] - Q \delta T \right\} dx dy \quad (4)$$

(4)式を Green の定理\* を用いて書き換えると、

$$\delta \chi = - \iint \left\{ \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \right\} \delta T dx dy + \int \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds \quad (5)$$

となる。 $\chi$  の停留条件は、

$$\delta \chi = 0 \quad (6)$$

にて与えられるから、(5)式の第 2 項は境界条件(2)によって消え Euler 方程式として(1)式が得られる。それ故(2)式の下で(1)式を解くという問題は汎関数  $\chi$  の停留問題に帰着される。

Fig. 1 (a) なる物体を (b) のように有限個の三角要素に分割する。その中の任意の一つの三角要素  $\Delta 123$

\*  $u, v$  を  $x, y$  の関数とすると Green の定理は次式にて与えられる。

$$\iint \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = - \iint v \nabla^2 u dx dy + \int v \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

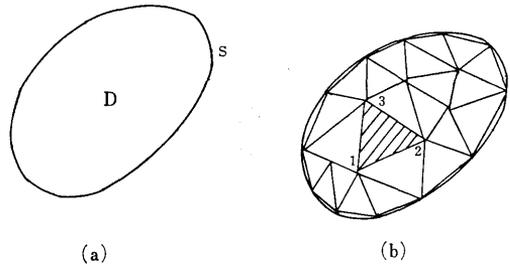


Fig. 1 連続体の分割

を取り出し直交座標系と共に Fig. 2 に示す。1, 2, 3 は頂点の節点番号、 $(x_i, y_i)$  は  $i$  点 ( $i=1, 2, 3$ ) の座標とし、節点番号 1, 2, 3 は反時計回りにとるものとする。要素内の温度分布は節点 1, 2, 3 の温度  $T_1, T_2, T_3$  により一般に次式で与えられるものとする。

$$T = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \left\{ T_1 \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + T_2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + T_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \right\} \quad (7)$$

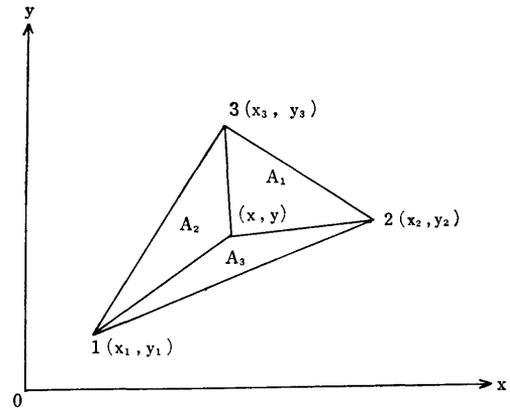


Fig. 2 三角形要素

Fig. 2 を参照すると、

$$T = \frac{1}{A} (A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3) \quad (8)$$

と書ける。ただし、 $A$  は三角要素の面積で、

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i \quad (9)$$

なる関係を有する。また、面積座標  $\xi_i = A_i/A$  を用いると(8)式は、

$$T = \xi_1 T_1 + \xi_2 T_2 + \xi_3 T_3 = \sum_{i=1}^3 \xi_i T_i \quad (10)$$

とも書ける。(7)式のように要素内の温度分布を座標の一次関数に採ると熱流は要素の境界で不連続になるが要素を細かくすれば厳密解に収束することが保証されている<sup>8)</sup>。

ある三角形要素を  $j$  とし、その頂点に 1, 2, 3 と番号をつけてその汎関数を  $\chi_j$  とする。これを  $T_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) で微分すれば、

$$\frac{\partial \chi_j}{\partial T_i} = \chi_{1j} + \chi_{2j} \quad (11)$$

ただし、

$$\chi_{1j} = k \iint_{j123} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (12)$$

$$\chi_{2j} = - \iint_{j123} Q_j \frac{\partial T}{\partial T_i} dx dy \quad (13)$$

(11)式を全体の要素について加え合わせると、

$$\frac{\partial \chi}{\partial T_i} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial \chi_j}{\partial T_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

(7)式を(12), (13)式に代入して(14)式の形にすれば、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} T_1 + a_{12} T_2 + \dots + a_{1n} T_n + Q_1 &= 0 \\ a_{21} T_1 + a_{22} T_2 + \dots + a_{2n} T_n + Q_2 &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1} T_1 + a_{n2} T_2 + \dots + a_{nn} T_n + Q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。マトリックスの形にて表わすと、

$$[k] \{T\} + \{Q\} = 0 \quad (16)$$

のようになる。(16)式にて  $[k]$  は計算にて求められる係数マトリックス、 $\{Q\}$  は与えられるものであり、従って未知の  $\{T\}$  は求められる。なお  $[k]$  の計算は補一IIを参照のこと。

#### 4. プログラム構成

- i) メインプログラム
- ii) サブプログラム—1 INPUT: 入力データの読み込みと出力
- iii) サブプログラム—2 OUTPUT: 計算結果の出力
- iv) サブプログラム—3 SALVIA: 要素マトリックスの計算
- v) サブプログラム—4 SOLVE: 連立方程式の計算
- vi) サブプログラム—5 MATINV: 逆マトリックスの計算
- vii) サブプログラム—6 MATM: マトリックスの積
- viii) サブプログラム—7 MATTM: 転置マトリックスの積

#### 5. 計算手順

プログラムの Flow Chart を Fig. 3 に示す。以下これにしたがって説明する。

##### 1) 入力データの読み込み:

入力データとして、下記に示すものがある。

- INODAL ..... 節点の総数
- IELEMT ..... 要素の総数
- IBOUND ..... 境界上の節点の総数
- XLAMD ..... 熱伝導率 (kcal/mm. sec. °C)
- Q L ..... 発熱量 (kcal/mm<sup>2</sup>)
- X (INODAL) ..... 節点の  $x$  座標
- Y (INODAL) ..... 節点の  $y$  座標
- IND (IELEMT, 3) ..... 要素と節点番号の組合わせ
- IX (IBOUND) ..... 境界上の節点番号
- TIX (IBOUND) ..... 境界上の節点温度

入力データの形式については6章に詳しく述べる。

なお、( ) のついているデータは配列で定義されていることを意味する。

##### 2) 入力データの印刷:

入力データを読み込むと、ただちにこれを印刷してデータチェックのために供する。しかし、これのみでは完全なチェックは不可能なので、本プログラムとは独立して要素番号と要素分割を  $x-y$  プロッターに図示させるプログラムが完備されている。これについては8章にて述べる。

##### 3) 要素の $[k]$ マトリックスの計算:

要素の  $[k]$  マトリックスは(11)式から計算される。節点番号 I, J, M を有する任意の要素の  $[k]$  マトリックスは下記に示すように  $3 \times 3$  の対称マトリックスとなる。( $a_{ij} = a_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ )

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} I & J & M \end{matrix} \\ \begin{matrix} I \\ J \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

##### 4) 全体の $[k]$ マトリックスの組立て:

全体の  $[k]$  マトリックスは節点の総数を  $N$  とすれば、 $N \times N$  の大きさを持つ対称マトリックスとなり、各要素の  $[k]$  マトリックスの成分 ( $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ ) は、全体の  $[k]$  マトリックスに加え込まれる。Fig. 4 に節点番号 I, J, M を持つ任意の要素の  $[k]$  マトリックスの成分を全体の  $[k]$  マトリックスに組み入れる方法を示す。ところで、この全体の  $[k]$  マトリックスは節点総数を 300 と仮定 (本プログラムで扱える) すれば  $300 \times 300$  の大きさとな

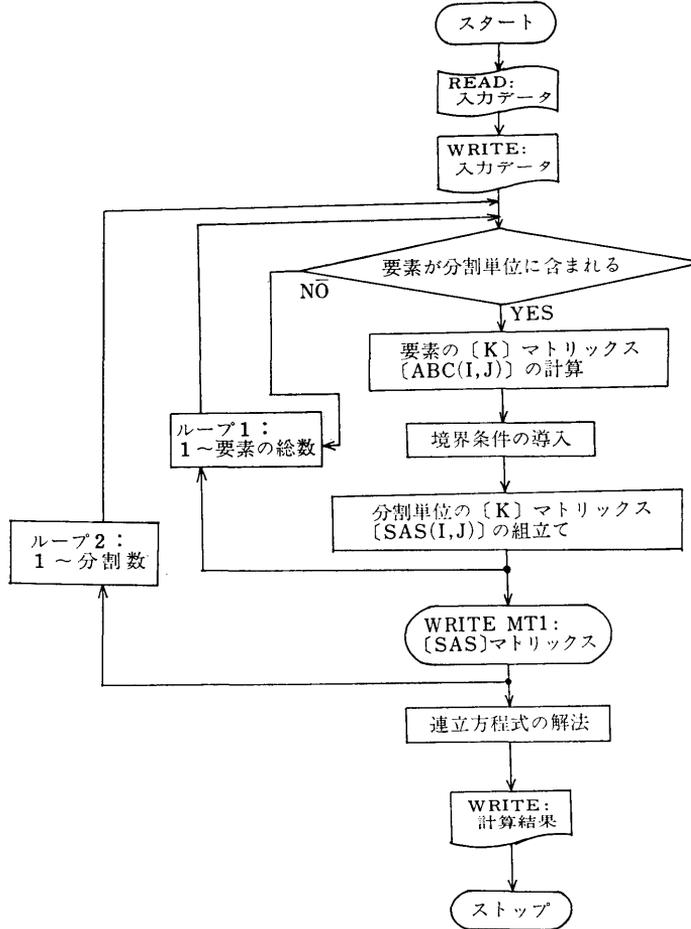


Fig. 3 SASKE-H1 プログラムのフローチャート

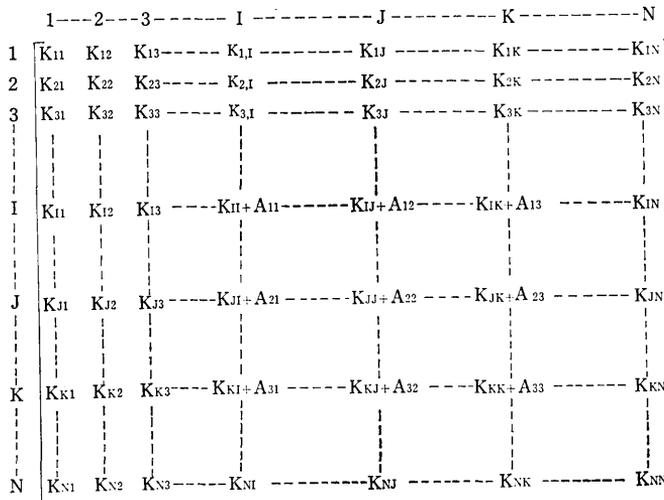


Fig. 4 全体の [k] マトリックスの組立

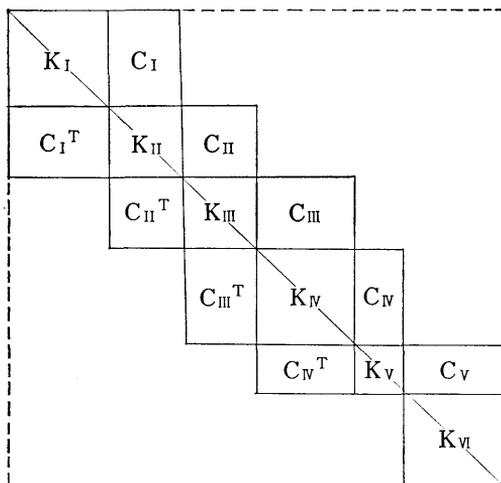


Fig. 5 全体の  $[k]$  マトリックスの対角分割

り、この逆マトリックスを求めるためには膨大な記憶と計算領域を必要とする。しかし、これまでに上記の困難を避けて大きな線形計算を処理する幾つかの方法が開発された。本プログラムはそのうちの一つである対角化分割法を用いる<sup>9)</sup>。この方法は全体の  $[k]$  マトリックスの成分が対角線付近以外では 0 となるような場合に適する。

Fig. 5 のように、対角線付近を中心に適当な大きさのサブマトリックスに分割し、計算は各分割単位  $[k_N, C_N]$  ごとに取り扱う。即ち、分割単位の  $[k]$  マトリックスを組立て、それを磁気テープに記憶し、次の分割単位の  $[k]$  マトリックスを組立てる。この手順を繰返して最後の分割単位の  $[k]$  マトリックスまで計算する。ここで  $[C_N]^T$  とは  $[C_N]$  マトリックスの転置マトリックスである。

#### 5) 連立方程式の解法：

詳細については補一Ⅱを参照のこと。

#### 6) 計算結果の印刷：

各節点の温度が求まれば、それを印刷して終了となる。

### 6. 本プログラムの使用について

この章において SASKE-H1 を使用する場合の制限と入力データの作成の方法について述べる。本プログラムは当所共用計算機「FACOM 270-20」(MT 2 台を含む)の使用を前提として組立てられており、実行は BATCH 処理にて行なわれる。

#### 1) 使用できる範囲：

a) 節点の総数が 320 以下。

b) 要素の総数が 600 以下。

c) 境界条件として温度が与えられている場合のみに限る。さらに境界上の節点の総数は 100 以下。

d) 発熱条件はあらゆる要素で同じとする。ただし要素と共に発熱量が変化する場合は本プログラムに若干の変更を加えれば計算できる。

#### 2) 入力データの形式：

本プログラムを使用する場合は、Table 1 の順序と形式でデータを作成すればよい。各記号については 5 章の 1) 入力データの項を合わせて参照のこと。

### 7. 精度の検討のための計算例

SASKE-H1 の精度を検討するために、長方形平板と扇形平板の温度分布を本プログラムを用いて計算し解析解と比較した。

#### 7.1 長方形平板

長方形平板の大きさは幅  $a=100\text{mm}$ 、高さ  $b=150\text{mm}$  とする。Fig. 6 は三角要素による分割を示す。平板の節点総数は 285、要素の総数は 504 である。分割において温度こう配が急な場所では、要素による分割を細かくすると精度の改善に役立つことを留意すべきである。図中、境界のまわりの数字は境界の節点番号であり、( ) 内の数字は要素番号を示す。 $y=0$  の辺を  $T_{\max}=100^\circ\text{C}$  とし、残りの三辺を  $T=0^\circ\text{C}$  とすれば、次式で表わされる境界値問題となる。

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} = 0, \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq \bar{x} \leq 1 \\ 0 \leq \bar{y} \leq \bar{b} \end{array} \right\} \quad (17)$$

境界条件

$$\left. \begin{array}{ll} \bar{T}=1 & \text{at } \bar{y}=0 \\ \bar{T}=0 & \text{at } \left\{ \begin{array}{l} \bar{y}=\bar{b} \\ \bar{x}=0, 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (18)$$

上式の解は次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$\bar{T} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(n+1)\pi \bar{x} \sinh(\bar{b}-\bar{y})(2n+1)\pi \times \text{cosech}(2n+1)\pi \bar{b} \quad (19)$$

ただし記号の上の  $-$  は無次元形を表わし、それぞれ次式で書かれる。

$$\bar{T} = T/T_{\max}, \quad \bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{b} = b/a \quad (20)$$

Fig. 7 に、 $\bar{y}=0.05, 0.3, 0.9$  における  $x$  方向断面の温度分布を示す。図において実線は(19)式で表わされる解析解、○印が本プログラムによる計算結果である。温度分布が左右対称なので左半分のみを示す。いずれの断面においても解析解と良い一致を示している。

Fig. 8 に、 $\bar{x}=0.05, 0.1, 0.5$  における  $y$  方向断面

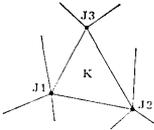
順番	入力データ・ステートメント	データ形式																								
①	<p>READ (n,m1) INODAL, IELEMT, IBOUND m1 FORMAT (3I5)</p>	<p>節点の要素の境界節点 総数 総数 の総数</p> <table border="1"> <tr> <td>I5</td> <td>I5</td> <td>I5</td> </tr> </table>	I5	I5	I5																					
I5	I5	I5																								
②	<p>READ (n,m2) XLAMD, QL m2 FORMAT (2E12.4)</p>	<p>熱伝導率 発熱量</p> <table border="1"> <tr> <td>E 12.4</td> <td>E 12.4</td> </tr> </table>	E 12.4	E 12.4																						
E 12.4	E 12.4																									
③	<p>READ (n,m3) (X(I),I=1, INQDAL) m3 FORMAT (E12.5)</p>	<p>節点の X座標</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>E 12.5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>E 12.5</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> </tr> <tr> <td>INODAL</td> <td>E 12.5</td> </tr> </table>	1	E 12.5	2	E 12.5	...		INODAL	E 12.5																
1	E 12.5																									
2	E 12.5																									
...																										
INODAL	E 12.5																									
④	<p>READ (n,m4) (Y(I),I=1, INODAL) m4 FORMAT (E12.5)</p>	<p>節点の Y座標</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>E 12.5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>E 12.5</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> </tr> <tr> <td>INODAL</td> <td>E 12.5</td> </tr> </table>	1	E 12.5	2	E 12.5	...		INODAL	E 12.5																
1	E 12.5																									
2	E 12.5																									
...																										
INODAL	E 12.5																									
⑤	<p>READ (n,m5) ((IND(I,J), J=1,3),I=1,IELEMT) m5 FORMAT (3I5)</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>※任意の要素K に対してその 節点番号を反 時計回りにJ1 J2, J3と定義 する</p> </div> </div>	<table border="1"> <tr> <td></td> <td>J1</td> <td>J2</td> <td>J3</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>I5</td> <td>I5</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>I5</td> <td>I5</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>I5</td> <td>I5</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>IELEMT</td> <td>I5</td> <td>I5</td> <td>I5</td> </tr> </table>		J1	J2	J3	1	I5	I5	I5	2	I5	I5	I5	3	I5	I5	I5	...				IELEMT	I5	I5	I5
	J1	J2	J3																							
1	I5	I5	I5																							
2	I5	I5	I5																							
3	I5	I5	I5																							
...																										
IELEMT	I5	I5	I5																							
⑥	<p>READ (n,m6) (IX(I),I=1, IBOUND) m6 FORMAT (I5)</p>	<p>境界節点番号</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>I5</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> </tr> <tr> <td>IBOUND</td> <td>I5</td> </tr> </table>	1	I5	2	I5	...		IBOUND	I5																
1	I5																									
2	I5																									
...																										
IBOUND	I5																									
⑦	<p>READ (n,m7) (TIX(I),I=1, IBOUND) m7 FORMAT (E10.3)</p>	<p>境界節点番号</p> <table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>E 10.3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>E 10.3</td> </tr> <tr> <td>...</td> <td></td> </tr> <tr> <td>IBOUND</td> <td>E 10.3</td> </tr> </table>	1	E 10.3	2	E 10.3	...		IBOUND	E 10.3																
1	E 10.3																									
2	E 10.3																									
...																										
IBOUND	E 10.3																									

Table 1 入力データの作成

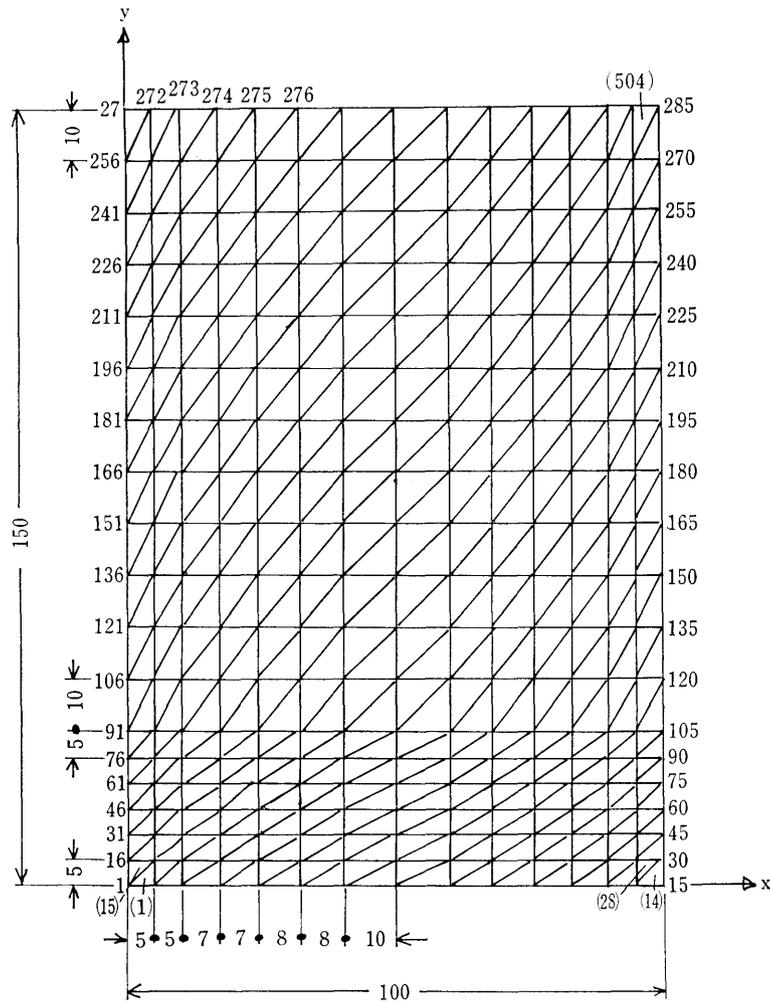


Fig. 6 長 方 形 平 板 の 分 割

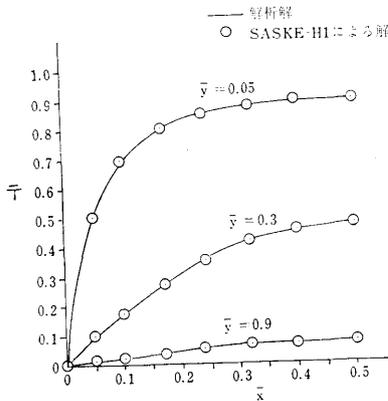


Fig. 7 x 方向断面の温度分布

面の温度分布を示す。温度こう配の急と思われる  $\bar{x} = 0.05$  断面で  $y$  の小さな場所においても、解析解とは良好な一致が見られる。

本プログラムによる計算結果と解析解との最大の差が生じた場所は、 $\bar{x} = 0.05$  断面の境界から二つ内部に入った節点（節点番号：32）で、その差は3.0%であった。所要計算時間は「FACOM 270-20」を用いて、約25分要した。

### 7.2 扇形平板

扇形平板の大きさを Fig. 9 のように、半径  $a = 150$  mm、開角  $\alpha = \pi/3$  とし、三角要素によって図のように分割した結果、節点の総数は 231、要素の総数は 400 となった。温度の境界条件は  $r = a$  周上で、 $T_{\max} = 100^\circ\text{C}$ 、 $\varphi = 0$  と  $\alpha$  の辺は  $0^\circ\text{C}$  とする。熱伝導の

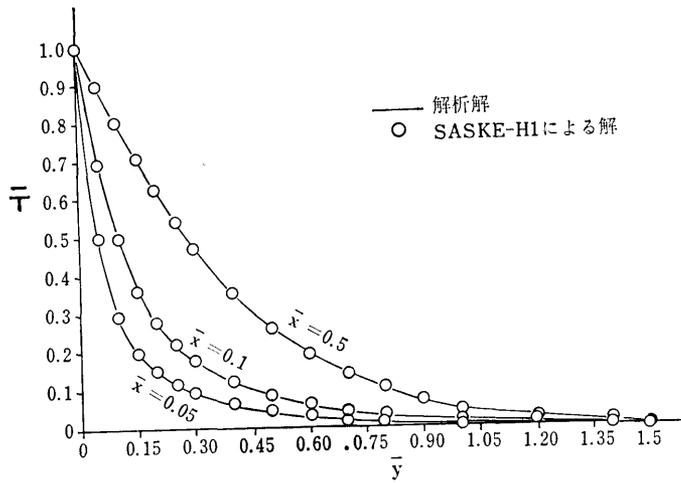


Fig. 8 y 方向断面の温度分布

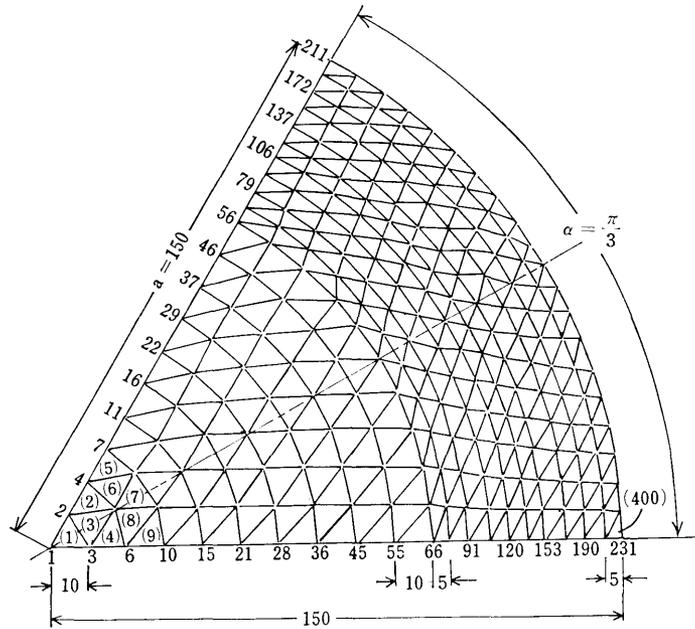


Fig. 9 扇形平板の分割

基礎方程式は極座標系にて表わすと次のようになる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (21)$$

境界条件,

$$\left. \begin{aligned} T &= T_{\max} & \text{at } r &= a \\ T &= 0 & \text{at } \varphi &= 0, \pi/3 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

次式のごとき無次元形を用いると,

$$\bar{T} = T/T_{\max}, \quad \bar{r} = r/a, \quad \bar{\varphi} = \varphi/\alpha \quad (23)$$

(21), (22)式の境界値問題の解は, 等角写像を使用して簡単に得られる<sup>10)</sup>。

$$\bar{T} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left[ \sin \pi \bar{\varphi} \operatorname{cosech} \left( \frac{\pi}{\alpha} \log \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] \quad (24)$$

Fig. 10 に  $\bar{r} = 0.2, 0.73, 0.97$  における円周方向の温度分布を示す。 $\varphi = \pi/6$  に関して対称な温度分布形となるので, 図ではその半分を示す。温度こう配の最も急な場所である  $\bar{r} = 0.97$  断面の場合でも, (24)式

の解析解と良く一致する。

Fig. 11 に  $\bar{\varphi}=0.5$  における半径方向の温度分布を示す。解析解との差が最も大きかった場所は節点番号5の場所 (Fig. 9 にて節点番号4と6の間の節点) で、その差は10%であったが、これはコーナー部の分割方法が良くなかったために生じたものと思われる。他は4%以下におさまっている。なお所要計算時間は20分である。

## 8. ピストンへの応用

本プログラムの実際の熱機関部品への応用としてディーゼルエンジンのピストンを取りあげる。井ノ内、塩出<sup>12)</sup>が先に中型船用ディーゼルエンジン (形式: 4サイクル単動立形無気噴油直接燃焼式, シリンダ径×ピストン行程: 275mm×400mm, 連続最大出力: 80ps, 毎分回転数: 500rpm) のピストン温度を測定し、このデータを既知の値として差分法により温度分布を

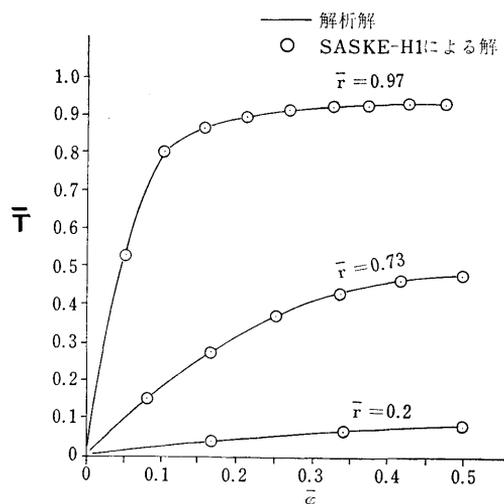


Fig. 10 周方向の温度分布

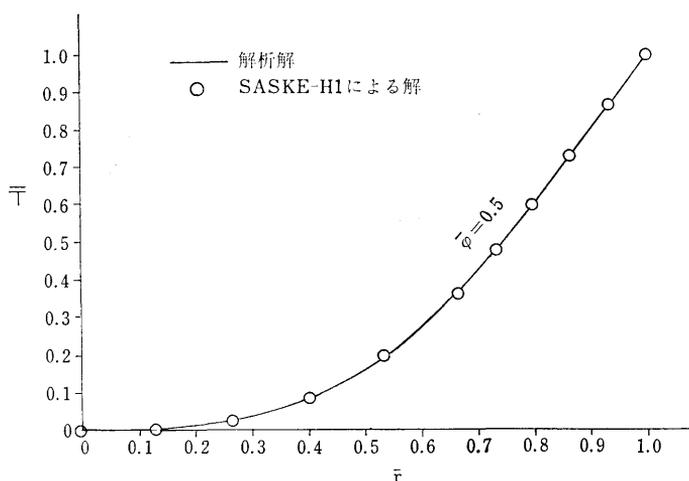


Fig. 11 半径方向の温度分布

計算した。本プログラムによる数値計算の境界条件として、前記の境界上の値を用いて解析し、両者の温度分布を比較する。ただし解析は軸対称を仮定し、二次元問題として取扱う。

Fig. 12 には三角要素によるピストンの左半分の分割を示す。三角形内の番号は要素番号を表す。本図は計算機を用いて、X-Yプロットに描かせたもので入力データのチェックとして使用できる。節点総数は316、要素の総数は530である。

Fig. 13 は要素と節点を結ぶ表であり、NO は要素番号を、J1, J2, J3 はそれぞれ要素に属する節点の番号を示す。この表では530の要素のうちその一部の150

要素が記されている。Fig. 14 は節点座標の一部で、NO は節点番号、X, Y はその  $x$  座標と  $y$  座標の値である。Fig. 15 は要素17, 4, 5の  $k$  マトリックスであり、それらを加え合わせた全体の  $k$  マトリックスを Fig. 16 に示す。全体の  $k$  マトリックスは、 $316 \times 316$  の大きさであるが此所では対角化分割された一部を表す。

Fig. 17 はピストンの温度分布を示す。×印は実測点 (実験条件は  $1/4$  負荷, 過給圧力  $1\text{kg/cm}^2$ ) でその傍に実測温度を記してある。実線は本プログラムによる等温線, 点線は実測値を基にした差分解である。両者の差は最大  $5^\circ\text{C}$  であり、これは差分解が実測点を

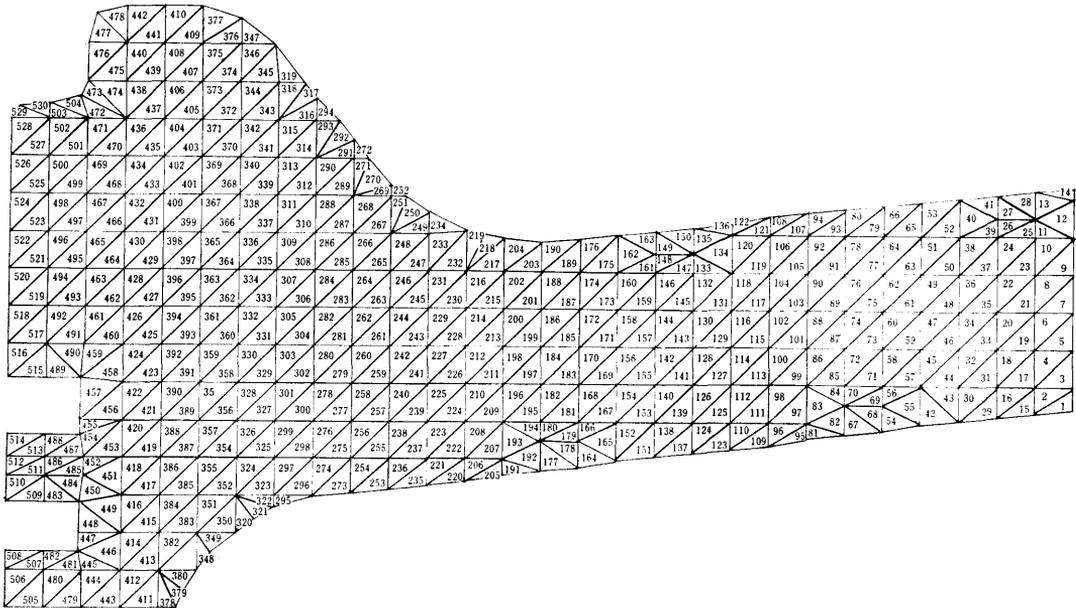


Fig. 12 三角要素による分割

NO	J 1	J 2	J 3	NO	J 1	J 2	J 3	NO	J 1	J 2	J 3
1	9	1	2	2	9	2	10	3	10	2	3
4	10	3	11	5	11	3	4	6	11	4	12
7	12	4	5	8	12	5	13	9	13	5	6
10	13	6	14	11	14	6	15	12	15	6	7
13	15	7	16	14	16	7	8	15	17	9	10
16	17	10	18	17	18	10	11	18	18	11	17
19	19	11	12	20	19	12	20	21	20	12	13
22	20	13	21	23	21	13	14	24	21	14	22
25	22	14	15	26	22	15	23	27	23	15	24
28	24	15	16	29	25	17	18	30	25	18	26
31	26	18	19	32	26	19	27	33	27	19	20
34	27	20	28	35	28	20	21	36	28	21	29
37	29	21	22	38	29	22	30	39	30	22	23
40	30	23	31	41	23	24	31	42	32	25	33
43	33	25	26	44	33	26	27	45	33	27	34
46	34	27	28	47	34	28	35	48	35	28	29
49	35	29	36	50	36	29	30	51	36	30	37
52	37	30	31	53	37	31	38	54	39	32	40
55	40	32	33	56	40	33	41	57	41	33	34
58	41	34	42	59	42	34	35	60	42	35	43
61	43	35	36	62	43	36	44	63	44	36	37
64	44	37	45	65	45	37	38	66	45	38	46
67	47	39	48	68	48	39	40	69	48	40	41
70	48	41	49	71	49	41	42	72	49	42	50
73	50	42	43	74	50	43	51	75	51	43	44
76	51	44	52	77	52	44	45	78	52	45	53
79	53	45	46	80	53	46	54	81	55	47	56
82	56	47	48	83	56	48	57	84	57	48	49
85	57	49	50	86	57	50	58	87	58	50	51
88	58	51	59	89	59	51	52	90	59	52	60

91	60	52	53	92	60	53	61	93	61	53	54
94	61	54	62	95	63	55	56	96	63	56	64
97	64	56	57	98	64	57	65	99	65	57	58
100	65	58	66	101	66	58	59	102	66	59	67
103	67	59	60	104	67	60	68	105	68	60	61
106	68	61	69	107	69	61	62	108	69	62	70
109	71	63	64	110	71	64	72	111	72	64	65
112	72	65	73	113	73	65	66	114	73	66	74
115	74	66	67	116	74	67	75	117	75	67	68
118	75	68	76	119	76	68	69	120	76	69	77
121	77	69	70	122	77	70	78	123	79	71	72
124	79	72	80	125	80	72	73	126	80	73	81
127	81	73	74	128	81	74	82	129	82	74	75
130	82	75	83	131	83	75	76	132	83	76	84
133	84	79	85	134	85	76	77	135	85	77	86
136	86	77	78	137	87	79	80	138	87	80	88
139	88	80	81	140	88	81	89	141	89	81	82
142	89	82	90	143	90	82	83	144	90	83	91
145	91	83	84	146	91	84	92	147	92	84	85
148	92	85	93	149	93	85	94	150	94	85	86

Fig. 13 要素番号と節点番号を結ぶテーブル

NO	X	Y									
1	137.5	26.5	2	137.5	29.5	3	137.5	34.4	4	137.5	39.3
5	137.5	44.2	6	137.5	49.1	7	137.5	54.0	8	137.5	55.5
9	132.6	26.0	10	132.6	29.5	11	132.6	34.4	12	132.6	39.3
13	132.6	44.2	14	132.6	49.1	15	132.6	51.6	16	132.6	55.0
17	127.7	55.5	18	127.7	29.5	19	127.7	34.4	20	127.7	39.3
21	127.7	44.2	22	127.7	49.1	23	127.7	51.6	24	127.7	54.5
25	122.8	25.0	26	122.8	29.5	27	122.8	34.4	28	122.8	39.3
29	122.8	44.2	30	122.8	49.1	31	122.8	54.0	32	117.8	24.6
23	117.8	29.5	34	117.8	34.4	35	117.8	39.3	36	117.8	44.2
37	117.8	49.1	38	117.8	53.5	39	112.9	23.6	40	112.9	27.0
41	112.9	29.5	42	112.9	34.4	43	112.9	39.3	44	112.9	44.2
45	112.9	49.1	46	112.9	53.0	47	108.0	23.1	48	108.0	27.0
49	108.0	29.5	50	108.0	34.4	51	108.0	39.3	52	108.0	44.2
53	108.0	49.1	54	108.0	52.5	55	103.1	22.6	56	103.1	24.6
57	103.1	29.5	58	103.1	34.4	59	103.1	39.3	60	103.1	44.2
61	103.1	49.1	62	103.1	52.1	63	98.2	21.6	64	98.2	24.6
65	98.2	29.5	66	98.2	34.4	67	98.2	39.3	68	98.2	44.2
69	98.2	49.1	70	98.2	51.6	71	93.3	21.1	72	93.3	24.6
73	93.3	29.5	74	93.3	34.4	75	93.3	39.3	76	93.3	44.2
77	93.3	49.1	78	93.3	50.6	79	88.4	20.6	80	88.4	24.6
81	88.4	29.5	82	88.4	34.4	83	88.4	39.3	84	88.4	44.2
85	88.4	46.6	86	88.4	50.1	87	83.5	20.1	88	83.5	24.6
89	83.5	29.5	90	83.5	34.4	91	83.5	39.3	92	83.5	44.2
93	83.5	46.6	94	83.5	49.6	95	78.6	19.6	96	78.6	24.6
97	78.6	29.5	98	78.6	34.4	99	78.6	39.3	100	78.6	44.2
101	78.6	49.1	102	73.6	18.7	103	73.6	22.1	104	73.6	24.6
105	73.6	29.5	106	73.6	34.4	107	73.6	39.3	108	73.6	44.2
109	73.6	48.6	110	68.7	18.2	111	68.7	22.1	112	68.7	24.6
113	68.7	29.5	114	68.7	34.4	115	68.7	39.3	116	68.7	44.2
117	68.7	48.1	118	63.8	17.7	119	63.8	19.6	120	63.8	24.6
121	63.8	29.5	122	63.8	34.4	123	63.8	39.3	124	63.8	44.2
125	63.8	48.6	126	61.4	49.1	127	58.9	16.8	128	58.9	19.6
129	58.9	24.6	130	58.9	29.5	131	58.9	34.4	132	58.9	39.3
133	58.9	44.2	134	58.9	49.6	135	54.0	16.2	136	54.0	19.6
137	54.0	24.6	138	54.0	29.5	139	54.0	34.4	140	54.0	39.3
141	54.0	44.2	142	54.0	49.1	143	54.0	52.1	144	51.1	54.0
145	49.1	15.7	146	49.1	19.6	147	49.1	24.6	148	49.1	29.5
149	49.1	34.4	150	49.1	39.3	151	49.1	44.2	152	49.1	59.1

Fig. 14 節 点 座 標



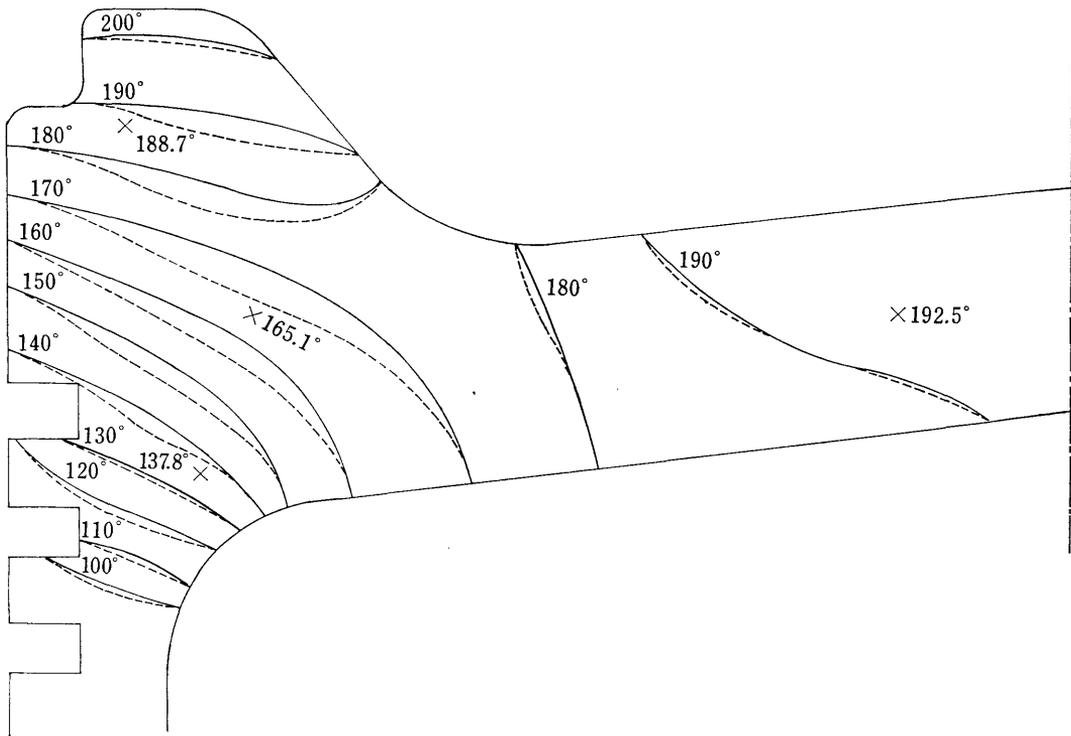


Fig. 17 ピストンの温度分布

to Heat Conduction Analysis]

Nuclear Engineering and Design, 4, (1966),  
p. 276

5) 藤野

「熱伝導, 熱応力, 流体力学への応用」

日本機械学会主催, 第327回講習会「機械工学にお  
ける有限要素法の応用」テキスト, (昭和45年),  
p. 111

6) 葛

「有限要素法による三次元軸対称問題の熱伝導, お  
よび応力解析プログラムとピストン強度解析への応  
用」日本機械学会論文集, 37巻, 303号, (昭和46  
年), p. 2082

7) 藤野

「自己随伴微分方程式と変分原理 (第1報)」

三菱重工技報, 74, (1971), p. 1

8) O. C. Zienkewicz, Y. Y. Cheung

「The Finite Element Method in Structural  
and Continuum Mechanics」  
McGraw-Hill, (1967), p. 155

9) Carslaw, Jager

「Conduction of Heat in Solids」  
Oxford, (1967), p. 166

10) 川下

「熱伝導論」オーム社 (昭和41年), p. 131

11) 井ノ内, 塩出

「中型ディーゼル機関における高出力化の基礎研  
究」

日本舶用機関学会第5回講演会前刷集, (昭和43年  
5月), p. 68

〔補〕— I

$\chi$  の積分の中に現れる積分形をここで示す。

$$\iint_{\Delta_{123}} dx dy = A \quad (\text{補-1})$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta_{123}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_{\Delta_{123}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} dx dy \\ &= \iint_{\Delta_{123}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} dx dy = \frac{2}{3} A^2 \quad (\text{補-2}) \end{aligned}$$

$$\iint_{\Delta_{123}} T dx dy = \frac{A}{3} (T_1 + T_2 + T_3) \quad (\text{補-3})$$

(12)式に(7)式を代入し、これに(補-1)式を用いると

$$\begin{aligned} \chi_{1j} = & \frac{\partial}{\partial T_i} \left\{ \frac{\lambda}{8A} [(y_2 - y_3)^2 T_1^2 + (y_3 - y_1)^2 T_2^2 \right. \\ & + (y_1 - y_2)^2 T_3^2 + (x_3 - x_2)^2 T_1^2 + (x_1 - x_3)^2 T_2^2 \\ & + (x_2 - x_1)^2 T_3^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) T_1 T_2 \\ & + 2(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) T_2 T_3 + 2(y_1 - y_2) \\ & \quad (y_2 - y_3) T_3 T_1 + 2(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) T_1 T_2 \\ & + 2(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) T_2 T_3 + 2(x_2 - x_1) \\ & \quad \left. (x_3 - x_2) T_3 T_1 \right\} \quad (\text{補-4}) \end{aligned}$$

(13)式は(補-3)を用いて

$$\chi_{2j} = - \frac{\partial}{\partial T_i} \left\{ \frac{Q_j A}{3} (T_1 + T_2 + T_3) \right\} \quad (\text{補-5})$$

〔補〕— II

対角化分割法による連立方程式の解法

Fig. 補-1に解法のフローチャートを示す。対角化分割によって表わされた連立方程式のマトリックス形は、

$$\begin{pmatrix} k_1 & C_1 & O & O \cdots O & O \\ C_1^T & k_2 & C_2 & O \cdots O & O \\ O & C_2^T & k_3 & C_3 \cdots O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O \cdots k_{N-1} & C_{N-1} \\ O & O & O & O \cdots C_N^T & k_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \end{pmatrix} \quad (\text{補-6})$$

のようになる。 $T_i$  は節点温度で、これ以外はすべて既知量である。(補-6)式の第1行目と2行目より、

$$[k_1] \{T_1\} + [C_1] \{T_2\} = \{Q_1\} \quad (\text{補-7})$$

$$[C_1]^T \{T_1\} + [k_2] \{T_2\} + [C_2] \{T_3\} = \{Q_2\} \quad (\text{補-8})$$

(補-7)式より、

$$\{T_1\} = [k_1]^{-1} \{Q_1\} - [k_1]^{-1} [C_1] \{T_2\} \quad (\text{補-9})$$

(補-9)式を(補-8)式に代入すれば、

$$(310)$$

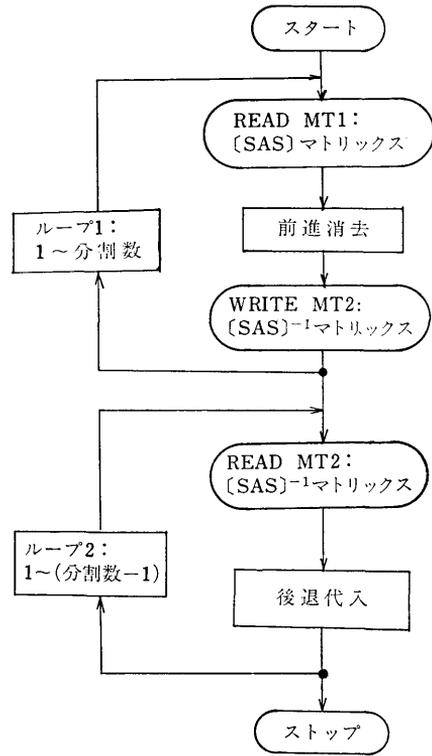


Fig. 補-1 連立方程式の解法プログラムのフローチャート

$$\begin{aligned} & ([k_2] - [C_1]^T [k_1]^{-1} [C_1]) \{T_2\} + [C_2] \{T_3\} \\ & = \{Q_2\} - [C_1]^T [k_1]^{-1} \{Q_1\} \quad (\text{補-10}) \end{aligned}$$

ここで新しい記号、

$$[\bar{k}_2] = [k_2] - [C_1]^T [k_1]^{-1} [C_1]$$

$$\{\bar{Q}_2\} = \{Q_2\} - [C_1]^T [k_1]^{-1} \{Q_1\}$$

を用いると、(補-10)式は、

$$[\bar{k}_2] \{T_2\} + [C_2] \{T_3\} = \{\bar{Q}_2\} \quad (\text{補-11})$$

のように書き表わされる。上式から  $\{T_2\}$  を求め、次の行の方程式に代入すれば、 $[\bar{k}_3]$ 、 $\{\bar{Q}_3\}$  が得られる。この過程は磁気テープ1より分割単位のマトリックスを読み出し、 $[\bar{k}_i]$ 、 $\{\bar{Q}_i\}$  を計算し、その時の逆マトリックスは磁気テープ2に書き込んでおく。以上の過程は前進消去と呼ばれ、最後に次の式が得られる。

$$[\bar{k}_N] \{T_N\} = \{\bar{Q}_N\} \quad (\text{補-12})$$

上式より  $\{T_N\}$  が求められ、上に述べた過程を逆にたどる、 $\{T_{N-1}\}$ 、 $\{T_{N-2}\}$ 、 $\dots$ 、 $\{T_1\}$  が求まる。この過程を後退代入と呼び、磁気テープ2から  $[k_i]$  の逆行列を読み出して代入計算すればよい。