

回転体の強度研究の展望

天 田 重 庚*

Review of Studies on the Strength of Rotating Bodies

by

Shigeyasu AMADA

Synopsis

A turbine disc is a typical model of rotating bodies which have been studied so far because it is the most essential component of a steam or gas turbine.

The accurate determination of the stress state and deformations in running discs have been regarded as the main problems in the design and construction of high-pressure and high-speed turbines, so that many studies have been done with respect to those problems.

This report shows the survey of researches related to the elasticity, elasto-plasticity, plasticity, fatigue, fracture and creep problems of rotating bodies which have been carried out by many researchers so far and have been collected by the author.

1. まえがき

タービン、超遠心機、発電機、送風機などの回転機械は、性能向上のための回転数の上昇や軽量化の結果として回転部分の負担が増加し、強度の面からの研究をますます必要としつつある。研究の対称となるのは、回転体に生ずる弾性的な遠心応力の解析問題、タービンディスクなどのように熱応力が付随する問題、許容応力を降伏応力以上に採った弾塑性問題などであり、また、機器の発停時に注目すると非定常問題が考えられる。発停のくり返しを考慮すると疲労強度が重要な課題であり、回転機械による災害防止の面からも回転体の破壊の研究が必要である。

理論解析の手法には、計算の簡易化のため種々の仮定がおかれるのが普通である。解析的に解くことが困難な場合は、基礎式を差分して数値計算による方法と近年発達した有限要素法による方法とがある。一方、実験的手法には光弾性凍結法、光弾性被膜法、ひずみゲージによる方法があり、それぞれ一長一短がある。

著者は数年来回転体の応力解析に取り組んできたが、その過程で著者が集めたか、または目を通した論文を整理の意味でこの小論にまとめた。

2. 回転体についての総説

現在まで遠心応力場での応力解析、とくに回転体についてまとまっているものとして、弾性の場合を扱っている Löffler の著者⁽¹⁾、弾性、塑性、疲労および破壊をも含んだ白鳥による講座⁽²⁾、Prasěk によるクリープと塑性を含んだ解説⁽³⁾が出されている。研究の動向をまとめたものとして鶴戸口による展望⁽⁴⁾があり、その後、回転円板の強度を主にして鶴戸口が解説⁽⁵⁾している。ひずみ増分理論と変形理論による塑性計算法については白鳥による解説⁽⁶⁾がある。

3. 弾性解析

蒸気タービンの構成要素であるディスクを対象として回転円板の研究⁽⁷⁾が生まれ、古くからソ連、アメリカ、ドイツなどで研究が展開された。Donath⁽⁸⁾、Holzer⁽⁹⁾、Grammel⁽¹⁰⁾らによって任意の厚手の円板を Fig. 1 のように幾つかの等厚のリングに分割して解く方法が得られた。Tumarkin⁽¹¹⁾は

$$y = B/\gamma^\alpha \quad (1)$$

で表わされるような Hyperbolic Profile を有する回転円板の応力解析を行ない、次式の応力成分を導いた。

* 機関開発部 原稿受付：昭和47年10月30日

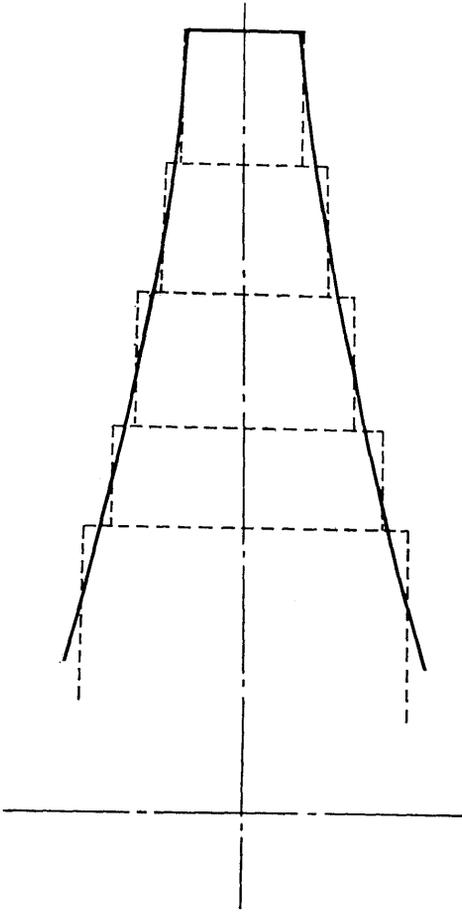


Fig. 1 任意の厚さを有する円板の分割

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} [(3+\nu)ar^2 + (\phi_1 + \nu)b_1 r^{\phi_1 - 1} \\ &\quad + (\phi_2 + \nu)b_2 r^{\phi_2 - 1}] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} [(1+3\nu)ar^2 + (1+\phi_1)d_1 r^{\phi_1 - 1} \\ &\quad + (1+\phi_2\nu)b_2 r^{\phi_2 - 1}] \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし、(1)式において y はディスクの厚さ、 r は半径 B と α は定数である。(2)式において b_1 、 b_2 は境界条件から決まる定数、 a は

$$a = -\frac{(1-\nu^2)\rho\omega^2}{E[8-(3+\nu)\alpha]} \quad (3)$$

であり、 ϕ_1 と ϕ_2 は次式の根である。

$$\phi^2 - \alpha\phi - (1+\alpha\nu) = 0 \quad (4)$$

また、Tumarkin の論文の参考文献にはそれまでの研究が記されており、初期段階の歴史的推移を知るには便利である。

Lee⁽¹²⁾ は、厚さ h が c 、 k 、 s を定数として

$$h = c \exp(krs) \quad (5)$$

(80)

で表わせる中空の回転円板の解を導いた。

溝口は物体力を有する二次元問題の基礎研究⁽¹³⁾、⁽¹⁴⁾、⁽¹⁵⁾、⁽¹⁶⁾ を行ない、それを羽根を有する回転円板⁽¹⁷⁾ に応用して解析解を得た。

弾性軸上に円板が固定されて、それが回転する場合の応力解析は Sabramanian ら⁽¹⁸⁾ によって行なわれた。ただし、Fig. 2 に示されるように、径 b の軸は平

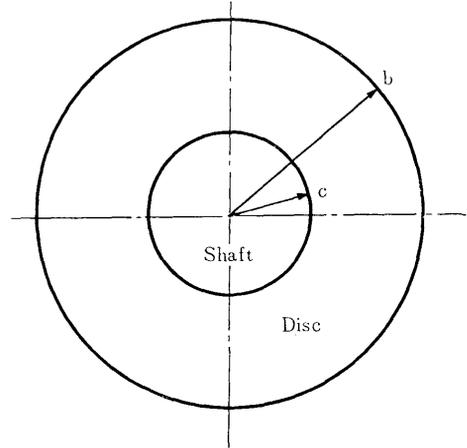


Fig. 2 軸上に固定された円板

面ひずみ問題として取扱う一方、内径 a 、外径 a の円板は平面応力問題として解き、両者の境界上で各応力成分が等しいという条件を用いた。結果は、材料が異方性を持つとして

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{disc} &= A_1 \xi^{-1+\lambda} + A_2 \xi^{-1-\lambda} - K_1 \rho \omega^2 c^2 \xi^2 \\ \sigma_\theta|_{disc} &= \lambda [A_1 \xi^{-1+\lambda} - A_2 \xi^{-1-\lambda}] - K_2 \rho \omega^2 c^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} (6)$$

となる。ここで、 $\xi = r/c$ 、 $\lambda = (E_\theta/E_r)^{1/2}$

$$K_1 = \frac{(3+\nu\alpha r)}{9-\lambda^2}, \quad K_2 = (3K_1-1),$$

A_1 と A_2 は積分定数である。

軸においては

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{shaft} &= B_1 \xi^{-1+\lambda'} + B_2 \xi^{-1-\lambda'} - K_3 \rho' \omega'^2 c'^2 \xi^2 \\ \sigma_\theta|_{shaft} &= \lambda' [B_1 \xi^{-1+\lambda'} - B_2 \xi^{-1-\lambda'}] \\ &\quad - K_4 \rho' \omega'^2 c'^2 \xi^2 \end{aligned} \right\} (7)$$

プライム記号は軸に関することを意味し、他の定数は(6)式中のそれらに相当するものである。同様な問題がセガль⁽¹⁹⁾ によっても取扱われは。Vazaj⁽²⁰⁾ は N 個の異なる材料よりなる変厚円板の応力を解析した。

回転円板の外周上にノッチがある場合について、Fessler ら⁽²¹⁾ が光弾性法にて解析し応力集中係数を求めた。また村上ら⁽²²⁾ は光弾性によって応力を求め、Neuber による帯板の引張の理論解とを比較した。

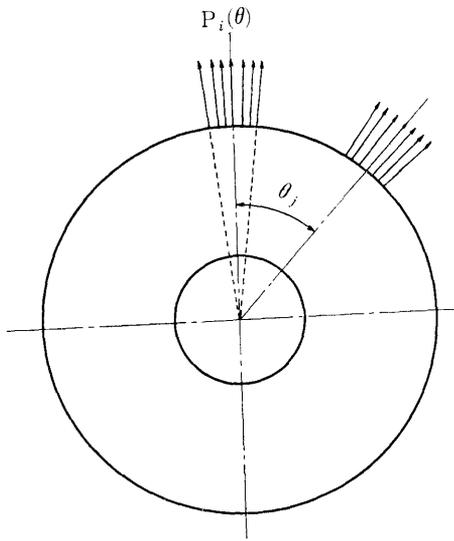


Fig. 3 外周上に discrete する荷重を受ける円板

Fig. 3 のようなタービンブレードによる荷重を考慮した解析解が菊地ら⁽²³⁾によって求められ、光弾性法による実験値と比較を行ない、ブレードのルート部の応力は中心孔周辺におけるそれよりも小さいという結論を得た。最近、弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させて解く方法が若干の研究者によって試みられるようになった。Gallus⁽²⁴⁾は上記の方法よりノッチ付きの円板の問題を解き、光弾性による実験値と比較して良好な結果を得た。

羽根を有する回転円板の研究については、先に記した溝口⁽¹⁷⁾による対数らせん状の羽根を有する場合がある。また Schilshatsle⁽²⁵⁾は Radial Flow-Rotor についてブレードと円板の相互作用を一次元的なものとして取扱ひ、Rimrott ら⁽²⁶⁾および Beglinger⁽²⁷⁾はインペラーの応力分布を求めた。同様な問題を Thurgood⁽²⁸⁾と Nill⁽²⁹⁾は光弾性凍結法により研究した。Fessler⁽³⁰⁾は円錐状の円板の応力を光弾性凍結法にて求めた。

面に回転軸を有する円形 Rotor の研究は Goldberg ら⁽³¹⁾により、円形と三角形板については Hodge⁽³²⁾によって行なわれた。

回転円板の最適設計に関する研究は Seireg ら⁽³³⁾および Surana ら⁽³⁴⁾によって取扱われた。

回転数が時間と共に変化する場合、円板内にせん断応力 $\tau_{r\theta}$ が生じて半径方向のつり合い式のほかに、周方向のつり合い式

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rt\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} t\tau_{r\theta} = \rho\alpha tr \quad (8)$$

が必要になる。ただし、 t は円板の厚さ、 α は θ 方向加速度である。Tang⁽³⁵⁾は等厚中空円板を、Phillips ら⁽³⁶⁾は変厚の中空円板の研究を行なった。異方性の円板が速度を変えながら回転している場合の応力解析は Samata⁽³⁷⁾によってなされた。Chowdhury ら⁽³⁸⁾、⁽³⁹⁾は円筒が任意に回転速度を変える場合と周期的に変える場合を取扱った。回転数が対数曲線的に増加する場合の等厚中空円板の解析が菊地⁽⁴⁰⁾によってなされた。

円板の外径に比して板厚が厚い場合は平面応力問題として取扱えなくなり、三次元弾性論の問題となる。回転円板の三次元的取扱ひは Timoshenko の著書⁽⁴¹⁾に近似解法が記述されている。斎藤は短円柱を対象⁽⁴²⁾としてその応力関数を求め、中実の回転円柱に應用⁽⁴³⁾して厳密解を求めた。中空の回転円筒内に生ずる応力解析は柴原ら⁽⁴⁴⁾によって研究された。Wu⁽⁴⁵⁾は級数解によって三次元回転円板を、Kroль⁽⁴⁶⁾は変厚の場合を差分方程式によって解いた。

回転円板が極異方性を有する場合、パラメータ

$$\lambda = (E_\theta/E_r)^{1/2} \quad (9)$$

を定義し、中実円板の応力を Tang⁽⁴⁷⁾が求めた。同様な結果は Мкртян⁽⁴⁸⁾によっても得られた。

近年、電子計算機の使用を前提として開発された周期的な応力解析の手法である有限要素法によって Cuntze⁽⁴⁹⁾がコンプレッサーのインペラーの応力を解析した。

4. 弾塑性、塑性解析

白鳥は全ひずみ理論とひずみ増分理論による回転円板の解析的研究⁽⁵⁰⁾を行ない、回転数が時間と共に増加する円板に対し両者の差はなく、したがって全ひずみ理論の使用が可能であるとの結論を得た。さらに白鳥は、公称ひずみを直線的に変化すると仮定した中実円板の塑性近似計算法⁽⁵¹⁾を開発した。ひずみ増分理論による塑性変形の研究は Takeyama⁽⁵²⁾によってもなされた。Hagiwara⁽⁵³⁾は白鳥の方法を変厚の中空円板に應用し、厚さが Fig. 4 のごとく直線的に変化する場合を、Parameter

$$\phi = -\frac{R_a}{h_a} \frac{h_a - h_c}{R_a - R_c} \quad (10)$$

を用いて数値解析した。(10)式にて R_a 、 R_c は円板の外径と内径、 h_a と h_c は外周と内周上の円板の厚さを示す。Карпин⁽⁵⁴⁾は応力ひずみ関係式として

$$\epsilon = \sigma/E + 0.002(c/\sigma_s)^k \quad (11)$$

を用いた解析法を提案した。ただし、 σ_s は降伏応力、

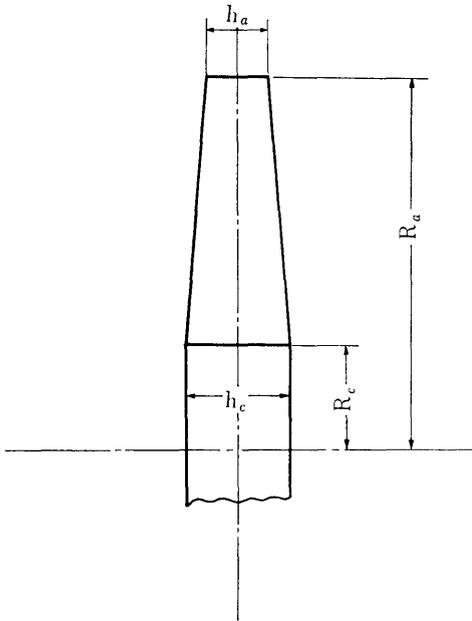


Fig. 4 厚さが直線的に変化する円板

c, k は定数である。Zaid は変形理論と Mises の降伏条件を用いて弾性と塑性の両者共存の場合⁽⁵⁵⁾ と、完全に塑性状態にある場合⁽⁵⁶⁾ について円板の応力を求めた。Wu は変形理論による中空円板⁽⁵⁷⁾、中実円板⁽⁵⁴⁾ の近似解法を提案した。

円筒の弾塑性解析は Tresca の降伏条件を用いて Hodge ら⁽⁵⁹⁾ によって研究された。

5. 弾性熱応力解析

Manson⁽⁶⁰⁾ は基礎方程式を差分方程式に変えて、電子計算機による数値解析の手順を確立した。回転円板の平衡方程式

$$\frac{d}{dr}(r h \sigma_r) - h \sigma_\theta + \rho \omega^2 r^2 = 0 \quad (12)$$

と、適合方程式

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\rho \theta}{E} \right) - \frac{d}{dr} \left(\frac{\nu \sigma_r}{E} \right) + \frac{d}{dr} (\alpha T) - \frac{(1+\nu)(\sigma_r - \sigma_\theta)}{E r} = 0 \quad (13)$$

を Fig. 5 のように差分化すれば

$$\left. \begin{aligned} C_n \sigma_{r,n} - D_n \sigma_{\theta,n} &= F_n \sigma_{r,n-1} + G_n \sigma_{\theta,n-1} - H^x \\ C_n' \sigma_{r,n} - D_n' \sigma_{\theta,n} &= F_n' \sigma_{r,n-1} - G_n' \sigma_{\theta,n-1} \\ &+ H_n' \end{aligned} \right\} (14)$$

のごとく表わせる。ここで $C_n, C_n', D_n, D_n', F_n, F_n', G_n, G_n', H_n, H_n'$ は ν, r よりなる係数である。上記の方法により逆に応力が与えられて円板の Profile を

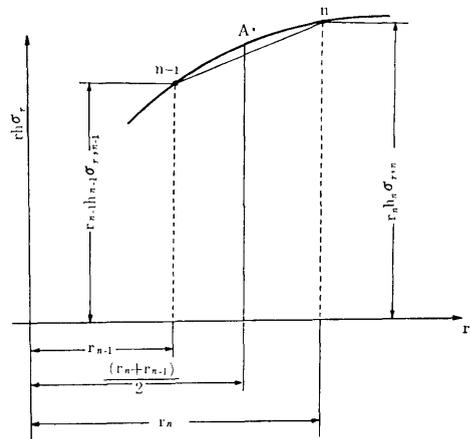


Fig. 5 n と $(n-1)$ 点の間の中点の近似

決定する問題⁽⁶¹⁾ が Manson によって研究された。円板の材料が異方性を有する場合について、菊地ら⁽⁶²⁾ および Chakrabarti⁽⁶³⁾ が取扱った。

6. 弾塑性熱応力解析

変形理論と Mises の降伏条件を用いて変形が大きい場合が Manson⁽⁶⁴⁾ により解析された。Merdelson ら⁽⁶⁵⁾ は平衡方程式と適合条件式を用いて、ひずみを次のような積分形で表わした。

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{8} + \frac{1+\nu}{r^2} \int_0^r \alpha T r r \, dr \\ &+ \frac{1-\nu}{2} \int_0^r \frac{\varepsilon_{rp} - \varepsilon_{\theta p}}{r} \, dr + \frac{1+\nu}{2r^2} \int_0^r (\varepsilon_{rp} + \varepsilon_{\theta p}) r \, dr + \frac{C_3}{2} \end{aligned} \quad (15 a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\varepsilon_\theta - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + (1+\nu) \alpha T + \varepsilon_{rp} + \nu \varepsilon_{\theta p} \\ &+ (1-\delta) \int_0^r \frac{\varepsilon_{rp} - \varepsilon_{\theta p}}{r} \, dr + C_3 \end{aligned} \quad (15 b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{r\theta} + \varepsilon_{\theta p}) \end{aligned} \quad (15 c)$$

ただし、 $C_3 = C_3(\varepsilon_{\theta p}, \varepsilon_{rp})$ 。上式において初めに塑性ひずみ $\varepsilon_{rp}, \varepsilon_{\theta p}$ を仮定して $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ を求め、この値を用いて $\varepsilon_{rp}, \varepsilon_{\theta p}$ を計算し、 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ が収束するまで同じ手順で反復計算するという逐次近似法を導入した。Plastic Flow とクリープを受ける円板の応力解析は Millenson ら⁽⁶⁶⁾ およびに Трухний⁽⁶⁷⁾ によって取扱われた。

実験的には Терехов⁽⁶⁸⁾ が外径 280mm、内径 70mm の円板を 3 分間で $0 \rightarrow 15,280 \text{rpm}$ に加速するとともにリム上を加熱し、中心部は冷却空気によって冷やすと

Table 1 タービンディスクの破壊

Failure Type	Cause	Rate of propagation	Inspection to determine incipient failure	Suggested frequency for inspection	Special warning measures	Design remedy
Serration shear	Shear-rupture	Time dependent	Determine tooth distortion	At blade replacement	Time-temperature rpm recorder	(1) Decrease stress on temperature (2) Controls to avoid overtemperature and overspeed (3) Reduce stress concentration for serration tensile
Serration tensile	(a) Stress-rupture (b) Material embrittlement	Time dependent	Surface inspection for cracks			
Radial rim cracks	Thermal fatigue	Cycle dependent	Surface inspection for cracks	At blade replacement	Log of number of starts	(1) Improved rim cooling (2) reduce temperature gradient
Pinhole crack	(a) stress concentration (b) Stress corrosion (c) Thermal fatigue	Cycle dependent	Surface inspection for cracks	At blade replacement	Log of number of starts	Use other method for retaining blades
Weld(weld) recking crack	(1) Defective weld (2) Overtemperature	Probably time dependent	(a) Dimensional (b) Weld inspection	After evidence of overtemperature	Time-temperature rpm recorder	Improved inspection in manufacture
Disk burst	Defective disk	Instantaneous				

いう方法で高温ひずみゲージにより弾塑性熱応力を測定した。Amada⁽⁶⁹⁾は白鳥の方法を用いて、温度分布が

$$T = T_0 \frac{\ln r/a}{\ln b/a} \quad (16)$$

で表わせる場合の定常弾塑性熱応力を解析した。さらに一定回転下の円板の外周部が高温流体によって加熱される場合、発生する非定常弾塑性熱応力の問題が天田ら⁽⁷⁰⁾によって取扱われた。上記の結果の拡張としてAmada⁽⁷¹⁾は非定常な熱負荷と遠心力負荷の下の回転円板内に生ずる応力を研究した。

7. 回転体の破壊

ガスタービン・ディスク破壊は大きな事故に連がるのが常で、その原因にはいくつかの形態が考えられる。ブレード取付部のセレーションの引張破壊、リムの熱疲労によるクラックの発生、ディスクのBurstなどが主なものであり⁽⁷²⁾、それらをTadle 1にかかげる。回転円板が破壊する場合、材料が延性材料であるか、あるいは脆性材料であるかによって破壊形態が異なる⁽²⁾。延性材料の破壊として白鳥⁽⁷³⁾はAl円板の回転による破壊と変形を観察した。Skidmore⁽⁷⁴⁾は鉄とAlの円板のBurst Testを行った。回転体では通常、中心部に生ずる応力値を低下させるために外周部に比較して厚くなっている。この厚肉部分であるボス部と破壊強さとの関係を菊地ら⁽⁷⁵⁾は実験的に研究した。Holmsら^{(76), (77)}は強度におよぼすDuctilityの影響について調べた。

Winnerら⁽⁷⁸⁾は

$$\left. \begin{aligned} (\pi/E)K^2 &= G \quad (\text{平面応力}) \\ K &: \text{Stress Intensity Factor} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

で定義されたGが材料、板厚、温度、切欠き長さなどによって定まるFracture Toughness Gcに等しくなると脆性破壊が発生すると考えたIrwin理論をディスクのBurstに応用した。桂ら⁽⁷⁹⁾は発電機の回転子材料であるNi-Mo-V鋼を使用して回転破壊試験を行い、ノッチ曲げ試験によって回転強度の推定が可能であることを示した。Sankey⁽⁸⁰⁾は平面ひずみ状態の下で、中心孔の周上に疲労クラックをつけたCr-Mo-V鋼のSpin Testを行ない、脆性破壊強さにおよぼす温度の影響を研究した。Fracture Mechanicsに基づいた設計基準をタービンホイールに応用することがBrandt⁽⁸¹⁾によって試みられた。Holmsら⁽⁸²⁾ Induction Heaterによってディスク外周上を加熱し、ディスクに温度分布を形成させてBurst Testする方法につい

て調べた。タービンローターが定常熱負荷とくり返し熱負荷を受ける場合の応力やクリープの影響についてChudd⁽⁸³⁾はいろいろな荷重条件の下で研究した。

8. 回転体の疲労

本下ら⁽⁸⁴⁾はG18B材の定ひずみ疲労試験を行ない、その値からRotorの疲労強度を推定した。現在までくり返し回転発停による疲労の実験は数編を数えるのみである。菟原⁽⁸⁵⁾はけい素鋼板と銅板の試験円板を用いて引張圧縮ひずみサイクル試験とくり返し回転試験を行ない、後者において前者よりも少ない回数で破壊する傾向にあるとの結果を得た。これは中心孔の変形によりちょうど前ひずみが与えられているとしての方法によって修正するとかなり良く一致すると述べている。しかし、白鳥やMattaviは前ひずみよりむしろ平均ひずみの影響であると考えた。白鳥⁽⁸⁶⁾はAl円板を用いて回転、停止のくり返し試験を行ない、引張圧縮のサイクル試験と比較して、後者より前者を予想すると安全側になることを示した。Mattavi⁽⁸⁷⁾は鉄とAl合金の2種についてタービンディスクと同形状の試験片をつくり、平均ひずみを変えて実験を行ない、その影響を調べた。またMiner仮説についても実験を行ない鉄合金については $\Sigma^n/N=0.99$ 、Al合金については1.44の結果を得た。

9. タービンブレードおよびその他

排気ガスタービン用の中空ブレード内の温度分布と応力分布についてPollmann⁽⁸⁸⁾により研究がなされ、また、IN100材についての同様な問題をKaufman⁽⁸⁹⁾が論じた。ブレードを次元問題としてGeradによって確立された熱光弾性法を用いてЛобнов⁽⁹⁰⁾は非定常熱応力を求めた。さらにПроткин⁽⁹¹⁾は非定常弾塑性熱応力を解析した。ブレードのクリスマスツリー部を等角写像により複素平面に変換し、ルート部の応力集中をНигин⁽⁹²⁾が解析した。

10. 偏心円孔を有する回転円板

Jefferyによって研究されたBi-polar Coordinateを用いて1円孔の場合をUdoguchi⁽⁹³⁾が、多円孔の場合を斎藤⁽⁹⁴⁾が解析した。Greenら⁽⁹⁵⁾は多円孔の場合について基礎式を差分化し数値計算により解いた。岡村ら⁽⁹⁶⁾は1円孔を有する場合について有限要素法と光弾性法を用いて比較を行なった。実験的にはBarnhartら⁽⁹⁷⁾によって光弾性法で、さらに直線的に厚さが増える円板を斎藤ら⁽⁹⁸⁾がひずみゲージにより調べた。

発電機の性能向上のために鉄心の応力を皮膜法を用いて佐藤ら⁽⁹⁹⁾が研究した。

11. クリープ解析

Wahl⁽¹⁰⁰⁾はひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と応力と時間 t の間に

$$\dot{\epsilon} = k\sigma^n f(t) \quad (18)$$

なる関係が存在すると仮定し、Mises-Mises 型と Mises-Tresca 型を用いて解析し、実験と比較することにあり次の結果を得た。すなわち、応力分布においては Mises 理論と Tresca 理論との差異はないが、クリープの経時変化は Tresca 理論の方が実験と良く一致することを示した。Prasek⁽¹⁰¹⁾は Mises-Henky 仮説を用い、さらに(17)式を仮定して次の基礎式を導入した。

$$\frac{d}{dr} (r h \sigma_r) - h \sigma_\theta + \rho \omega^2 h r^2 = 0 \quad (19)$$

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} \left[r(n-1) \frac{\sigma_r}{\sigma_\theta} - 2rn \right] + 3(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \quad (20)$$

上式にて線形粘弾性状態 $(n-1)$ と Ideal Plasticity 状態 $(n=\infty)$ の場合のみ厳密解が得られるが、その他の場合は解析的に解くことが困難なので差分式に変換して反復計算により解を求めた。Ma⁽¹⁰²⁾は Tresca の Flow Ruleを用いて円板を

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta > \sigma_r & \quad c \leq r \leq b \\ \sigma_\theta = \sigma_r & \quad a \leq r \leq c \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

の2つの領域に分けて解析した。Tresca-Tresca 型を用いた定常 Creep 解析⁽¹⁰³⁾ および 遷移 Creep の影響の研究⁽¹⁰⁴⁾が Wahl によってなされた。Saroja⁽¹⁰⁵⁾は Mises-Mises 型を用い、Mises の降伏条件を

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 &= \frac{3}{4} B [\phi(r)]^2 \\ \phi(r) &= r^{-1/12} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とにおいて Wahl⁽¹⁰⁰⁾の実験と比較し、そのバラツキの精固内におさまることを示した。Mendelson ら⁽¹⁰⁶⁾は Mises の Criterion と Prandtl-Reuss の式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (2\sigma_e/3\Delta\epsilon_e)(2\Delta\epsilon_{rp} + \Delta\epsilon_{op}) \\ \sigma_\theta &= (2\sigma_e/3\Delta\epsilon_e)(2\Delta\epsilon_{op} + \Delta\epsilon_{rp}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

および

$$\Delta\epsilon_e = 4, 41 \times 10^{-32} \sigma_e^{8.2} \Delta t \quad (24)$$

を用いて定常、遷移クリープを解析した。Wahl はそれまでの研究をまとめて Design Data⁽¹⁰⁷⁾として表わした。Mises-Mises 型と Mises-Tresca 型により定常クリープを解析し、18-8Mo ステンレス鋼の実験と比較し良好な一致が得られることが坂田⁽¹⁰⁸⁾によって示された。

12. まとめとこれからの研究課題

現在までに行なわれた回転体の強度の研究について述べた。回転体の対象はおもにタービンディスクに向けられていたが、近年、高速回転機械がいろいろな分野で使用されるようになった結果その対象の精固が拡がりつつある。特にウランの濃縮に遠心力を用いる方法が採用されたのは長時間の高速運転に耐える回転装置が開発されたことにはほかならないが、この装置は最近の高速回転機械の代表的な一例である。

タービンディスクを平面応力状態とする近似は計算を容易にするために導入されたものであるが、有限要素法の発達により三次元解析が可能となるにしたがい徐々にこの近似は取除かれつつある。以下、これからの研究課題になるとと思われる若干の点について述べる。

- i) 回転体の三次元弾塑性解析
- ii) i)に熱負荷が加わった場合
- iii) 回転体のくり返し回転疲労
- iv) iii)に熱負荷が同時に加わった場合
- v) タービンディスクの発停時における熱的状态 (ディスクの温度分布や燃焼ガスからの熱伝達)

さらに i)~iv) において回転体に切欠きや偏心円孔がある場合など、いろいろな組合わせが考えられる。また高温状態下での回転体の応力を実験的に測定する方法の確立も解決しなければならない重要な課題である。

参 考 文 献

- (1) Loffler K. "Die Berechnung von Rotierenden Scheiben und Schalen" Springer-Verlag (1961)
- (2) 白鳥 „材料力学の理論と実際一回転体” 金属材料 Vol. 4, No. 7~Vol. 5, No. 3
- (3) L. Prasek "Analysis of the Distribution of Stress and Deformation in the Running wheels of Thermal Turbines with Due Consideration of the States of Plasticity and Creep" Skoda Review 4 (1964), p. 5
- (4) 鶴戸口 "回転板の強さに関する研究の動向" 日本機械学会論文集, 20巻, 99号(昭29), p. 685
- (5) 鶴戸口 "回転板の強さ" 日本機械学会誌, 64巻513号(昭36), p. 1432
- (6) 白鳥 "回転円板の塑性計算法とその応用" 日本機械学会誌, 65巻519号(昭37), p. 568

- (7) Stodola "Dampf und Gas Turbinen"
Springer (1924)
- (8) Donath "Die Berechnung Rotierenden Scheiben und Ringen "nach einem neuen Verfahren" Julius Spring (1912)
- (9) Holzer "Die Berechnung der Scheibenrader"
Zeit. f. das Gesamte Turbinenwesen, 20 (1913)
- (10) R. Grammel "Ein Neues Verfahren zur Berechnung Rotierenden Scheiben"
Dinglers Polyt. J., Vol. 338(1923), p. 127
- (11) S. Tumarkin "Methods of stress Calculation in Rotating Discs"
NACA TM. No. 1064(1944)
- (12) T. C. Lee "On the Stresses in a Rotating Disc of Variable Thickness"
J. of Appl. Mech., Vol. 19, No. 3(1952) p. 263
- (13) 溝口 "任意の質量力または慣性力の作用する場合の二次元問題とその応用 (第1報)"
日本機械学会論文集 6巻22号(昭15), p. 30
- (14) 溝口 "任意の質量力または慣性力の作用する場合の二次元問題とその応用 (第2報)"
日本機械学会論文集 6巻24号(昭15), p. 1
- (15) 溝口 "任意の質量力または慣性力の作用する場合の二次元問題とその応用 (第3報)"
日本機械学会論文集 6巻26号(昭16), p. 1
- (16) 溝口 "任意の質量力または慣性力の作用する場合の二次元問題とその応用 (第4報)"
日本機械学会論文集 7巻26号(昭16), p. 8
- (17) 溝口 "任意の質量力または慣性力の作用する場合の二次元問題とその応用 (第5報)"
日本機械学会論文集 7巻26号(昭16), p. 19
- (18) G. Subramanian, et al., "Rotating Orthotropic Discs Mounted on Elastic Shafts"
J. of the Aeronautical Soc. of India. Vol. 23, No. 2(1971), p. 91
- (19) В. Ф. Сегаль "Исследование Напряженного Состояния Составных Дисков Турбин Путем Приравнивания Радиальных Перемещений его Элементов"
Энергомашиностроение No. 10 (1969), p. 32
- (20) D. K. Bazaj "Stress Analysis of Compound Rotating Discs"
J. of the Franklin Inst., Vol. 202, No. 4(1971) p. 265
- (21) H. Fesster, et al., "Centrifugal Stresses in Turbo-alternator Rotors"
PIME Vol. 173, No. 29(1959), p. 717
- (22) 村上他 "回転円板の応力集中軽減について"
立命館大学理工学部研究所紀要 16号(1967), p. 61
- (23) 菊地他 "原動機部品の熱疲労寿命に関する研究 (その3, 翼車リム部の応力分布)"
防衛庁技術研究本部技報 第8巻第75号(昭44), p. 105
- (24) H. E. Gallus "Contributions to the Measurement and Calculation of Stresses in Plane Rotating Discs without Rotational Symmetry"
ASME Paper NO-70-GT-26(1970)
- (25) M. J. Schilhansl "Stress Analysis of a Radial Flow Rotor"
J. of Eng. for Power, Vol. 84, No. 1 (1962), p. 124
- (26) F. P. J. Rimrott "Stress and Strain Determination in Impellers of Asymmetrical Profile"
Canadian Aeronautics and Space J., Narch (1968), p. 79
- (27) V. Beglinger "Zur Analytischen Bestimmung der Spannungsverteilung in Rotierenden"
Forsch. Ing.-Wes. 35, Nr. 2(1969), p. 55
- (28) D. A. Thurgood "Stresses in Asymmetric Discs"
J. of Strain Analysis Vol. 4, No. 1(1969), p. 65
- (29) B. Nill "Spannungsoptische Untersuchung eines Turboladerrades"
MTZ 29, 10(1968), p. 414
- (30) H. Fessler, et al., "Centrifugal Stresses in Rotationally Symmetrical Gas-Turbine Disc"
J. of Strain Analysis, Vol. 3, No. 2 (1968), p. 135
- (31) M. A. Goldberg, et al. "Stresses in an Ellipsoidal Rotor in a Centrifugal Force Field"
J. of Appl. Mech., Vol. 26, No. 4(1959), p. 549
- (32) P. G. Hodge "Stress Function for Rotating Disc"
J. of Appl. Mech., Vol. 23, No. 2(1956), p. 273
- (33) A. Seireg, et al. "Optimum Design of Rotating Discs"
J. of Eng. for Industry, Vol. 92, No. 1(1970),

- p. 1
- (34) K. S. Surana, et al. "Design of Rotating Discs with Integral Shafts"
J. of Eng. for Industry, Vol. 93, No. 3(1971), p. 805
- (35) S. Tang "Note on Accretion Stress in a Rotating Discs"
Int. J. of Mech. Sci., Vol. 12, No. 2 (1970), p. 205
- (36) J. W. Phillips, et al. "Note on Shear Stresses in Accelerating Discs of Variable Thickness"
Int. J. of Mech. Sci., Vol. 13, No. 5 (1971), p. 445
- (37) B. K. Samanta "Stress Distribution in an Anisotropic Circular Thin Disc Rotating with Variable Angular Velocity"
- (38) K. L. Chowdhury, et al. "Dynamic Stress in Rotating Cylinder (I. Arbitrary Angular Velocity)"
Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Vol. 15, No. 5(1966), p. 329
- (39) K. L. Chowdhury, et al. "Dynamic Stresses in a Rotating Cylinder (II. Periodic Angular Velocity)"
Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, Vol. 15, No. 5(1966), p. 339
- (40) 菊地他 "回転数が変化する場合の回転円板の応力分布"
第12回航空原動機に関する講演会講演集 (昭47) p. 1
- (41) Timoshenko, et al. "Theory of Elasticity"
McGraw-Hill (1951)
- (42) 斎藤 "短円柱および円板の軸対称変形"
日本機械学会論文集, 18巻68号(昭27), p. 21
- (43) 斎藤 "厚さ一様な厚肉回転円板の応力分布について"
日本機械学会論文集, 18巻75号(昭27), p. 40
- (44) 柴原他 "回転円筒の三次元応力解析"
日本機械学会論文集, 35巻270号(昭44), p. 278
- (45) C. H. Wu "An Asymptotic Solution of a Rotating Disc"
J. of Appl. Mech., Vol. 38, No. 4(1971), p. 971
- (46) A. П. Крель "Исследование Напряженного Состояния Толстых Вращающихся Дисков"
Энергомашиностроение No. 12, (1968), p. 16
- (47) S. Tang "Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Discs"
Int. J. of Mech. Sci., Vol. 11, No. 6 (1969), p. 509
- (48) З. Мкртыян "Расчет Вращающегося Диска Изготовленного из Разнородного Материала"
Изв. вуз. Машиностр. 5 (1965), p. 58,
- (49) R. Cuntze "Theoretical Ermittlung der Drei-Dimensionalen Spannungsverteilung in Radial-Verdichterradern"
Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, 70-16 (1970)
- (50) 白鳥 "回転円板における全ひずみ理論の検討"
日本機械学会論文集 25巻151号(昭34), p. 199
- (51) 白鳥 "中実回転円板の塑性変形の近似計算法"
日本機械学会論文集 26巻161号(昭35), p. 124
- (52) H. Takeyama "Analytical Investigation on the Plastic Deformation of Rotating Discs by Strain Incremental Theory"
Technology Report, Tohoku Univ., Vol. 34, No. 2 (1967), p. 129
- (53) S. Hagiwara, et al. "Elasto-Plastic Stress Analysis on the Rotating Discs of Non-Uniform Thickness"
Proc. of the 11th Jap. Nat. Congr. of Appl. Mech., (1961), p. 67
- (54) Е. Б. Карпин "Исследование Упруго-Пластического Состояния Вращающегося Диска"
- (55) M. Zaid "Partially Plastic Rotating Disc"
J. of the Aeronautical Sciences, Vol. 19, No. 10 (1952), pp. 697
- (56) M. Zaid "Fully Plastic Rotating Disc with Large Strains"
J. of the Aeronautical Sciences, Vol. 20, No. 6 (1953), p. 369
- (57) M. H. Lee Wu "Analysis of Plane-Stress Problem with Axial Symmetry in Strain-Hardening Range"
NACA TN 2217 (1950)
- (58) M. H. Lee Wu "A Simple Method of Determining Plastic Stresses and Strains in Rotating Discs"

- ting Discs with Non-Uniform Metal Properties”
J. of Appl. Mech., Vol. 19, No. 4 (1952), p. 489
- (59) P. G. Hodge, et al. “Elastic-Plastic Analysis of a Rotating Cylinder”
Int. J. of Mech. Sci., Vol. 4 (1962), p. 465
- (60) S. S. Manson “Determination of Elastic Stresses in Gas Turbine Discs”
NACA Report No. 871
- (61) S. S. Manson “Direct Method of Design and Stress Analysis of Rotating Discs with Temperature Gradient”
NACA Report No. 952
- (62) 菊地他 “エンジン構造強度に関する研究 (その 2 異方性材料の回転体への適用に関する考察)”
防衛庁技術研究本部技報, 9 卷 8 号 (昭45), p. 107
- (63) S. K. Chakrabarti “Plane Thermal Stresses in a Non-Homogeneous Transversely Isotropic Rotating Circular Disc”
Rev. Roum. Sci. Techn., Tom 13, No. 5 (1968). p. 923
- (64) S. S. Manson “Analyses of Rotating Discs of Arbitrary Contour and Radial Temperature Distribution in the Region of Plastic Deformation”
Proc. 1st Nat. Congr. Appl. Mech. (1952) p. 569
- (65) A. Mendelson, et al. “Practical Solution of Plastic Deformation Problems in Elastic-Plastic Range”
NASA TR, R-28
- (66) M. B. Millenson, et al. “Determination of Stresses in Gas-Turbine Disks Subjected to Plastic-Flow and Creep”
NACA Report No. 906
- (67) А. Д. Трухний “Приближенный Метод Расчета Турбинного Диска С учетом Знакопеременной Пластичности и Ползучести”
- (68) Р. Г. Терехов “Экспериментальное Исследование Упруго-Пластического Деформирования Вращающихся Неравномерно Нагретых Дисков”
Прикладная Механика Том 2, В, 10 (1966) p. 100
- (69) S. Amada “Elasto-Plastic Stress Analysis of Discs (The 1st Report: In Steady State of Thermal and Centrifugal Loadings)”
Papers of Ship Research Inst., No. 36 (1971)
- (70) 天田他 “回転円板の非定常弾塑性熱応力”
日本機械学会論文集, 38 卷 316 号 (昭47)
- (71) S. Amada “Elasto-Plastic Stress Analysis of Discs subjected to Transient Thermal and Centrifugal Loadings”
Proc. of the 14th Jap. Congr. on Material Research (1971), p. 83
- (72) Lewis Center Staff “Factors that affect Operational Reliability of Turbojet Engines”
NASA TR, R-54 (1960)
- (73) 白鳥他 “高速回転体の破壊 (第 1 報 A1 回転円板の回転による破壊と変形)”
日本機械学会論文集 21 卷 103 号 (昭30), p. 181
- (74) W. E. Skidmore “Bursting Tests of Rotating Discs Typical of Small Gas Turbine Design”
Exp. Stress Analysis, Vol. 8, No. 2 (1951), p. 29
- (75) 菊地他 “エンジン構造強度の研究 (その 1 回転体の遠心強度におよぼすボス寸法の影響)”
防衛庁技術研究本部技報, 8 卷, 76 号 (昭44), p. 183
- (76) A. G. Holms, et al. “Effect of Strength and ductility on Burst Characteristics of Rotating Discs”
NACA TN, No. 1667 (1948)
- (77) A. G. Holms, et al. “Influence of Tensile Strength and Ductility on Strengths of Rotating Discs in Presence of Material and Fabrication Defects of Several Types”
NACA TN, No. 2397
- (78) D. H. Winne, et al. “Application of the Griffith-Irwin Theory of Crack Propagation to the Bursting Behavior of Discs, including Analytical and Experimental Studies”
ASME Trans, Vol. 80, No. 8 (1958), p. 1643
- (79) 柱他 “回転試験機による大型タービン発電機用軸材の研究”
日本機械学会誌 64 卷 507 号 (昭36), p. 583
- (80) G. O. Sankey “Spin Tests to Determine Brittle Fracture under Plane Strain”
Exp. Mech., Vol. 8, No. 12 (1968), p. 529

- (81) D. E. Brandt "The Development of a Turbine Wheel Design Criterion Based upon Fracture Mechanics"
J. of Eng. for Power, Vol. 93, No. 4 (1971), p. 411
- (82) A. G. Holms, et al. "Hot Spin-and-Burst Test Methods for Aircraft Turbine Wheels" Exp. Mech., Dec. (1961), p. 185
- (83) F. J. Chubb "An Investigation into the Non-Elastic Behavior of Turbine Rotor Discs at high Temperatures"
J. of Strain Analysis, Vol. 7, No. 2 (1972), p. 109
- (84) 木下他 "ガスタービン, ロータディスクの熱疲労強度"
材料試験 11巻102号 (昭37), p. 191
- (85) 穂原 "回転円板のくり返し回転停止による破壊試験"
日本機械学会論文集 31巻22号 (昭37), p. 191
- (86) 白鳥他 "高速回転円板の低くり返し疲れ強さ"
日本機械学会論文集 36巻287号 (昭45), p. 1045
- (87) J. L. Mattavi "Low-Cycle Fatigue Behavior under Biaxial Stress Distribution"
J. of Basic Eng., Vol. 91, No. 1 (1969), p. 23
- (88) E. Pollmann "Temperatures and Stresses on Hollow Blades for Gas Turbines"
NASA TM No. 1183 (1947)
- (89) A. Kaufman "Steady State Stress Relaxation Analysis of Turbine Blades Cooling Design"
NASA TN, D-5282
- (90) Л, М, Лобнов "Исследование Нестационарных Теплых Напряжений в Лопатке Турбин Методом Фотоупругости"
- (91) Е. Р. Проткин "Упруго-Пластическое Напряженное Состояние Турбинной Лопатки при Тепловом Ударе"
- (92) А, А. Нигин "Напряженное Состояние Зуба Елочного Замка Ламка Лопатки Газовой Турбин"
Изв вуз Машиностр32 (1971), p. 13.
- (93) T. Udoguchi "Stress Concentration in a Rotating Eccentric Circular Holes"
Proc. of the 11th Jap. Nat. Congr. of Appl. Mech. (1961), p. 61
- (94) 斎藤 "多数の偏心円孔を有する静止および回転円板の応力分布について"
日本機械論文集 20巻95号 (昭29), p. 473
- (95) W. A. Green et al "Stress Distribution in Rotating Discs with Non-Central Holes"
The Aeronautical Quart, Vol. 15 (1964), p. 107
- (96) 岡村他 "有限要素法と光弾性法による回転板の遠心応力解析"
日本機械学会講演論文集, No. 720-2 (昭47), p. 249
- (97) K. E. Barnhart, et al. "Stresses in Rotating Discs due to Noncentral Holes"
Exp. Stress Analysis, Vol. 9, No. 1 (1951), p. 59
- (98) 斎藤他 "偏心円孔を有する回転ターバ円板の応力"
機械の研究 17巻5号 (1965年), p. 52
- (99) 佐藤他 "電動発電機鉄心の回転強度に関する実験解析"
三井造船技報, 76号 (昭47), p. 17
- (100) A. M. Wahl, et al. "Creep Tests of Rotating Discs at Elevated Temperature and Comparison with Theory"
J. of Appl. Mech., Vol. 21, No. 3 (1954), p. 205
- (101) L. Prasek "Berechnung der Spannungen in Rotierenden Scheiben beim Kriecher"
Archwum Budowy Maszyn, Tom 16, Zes. 2 (1969), p. 279
- (102) B. M. Ma "Creep Analysis of Rotating Solid Discs with Variable Thickness and Temperature"
J. of Franklin Inst., Vol. 271, No. 1 (1961), p. 40
- (103) A. M. Wahl "Analysis of Creep in Rotating Discs Based on the Tresca Criterion and Associated Flow Rule"
J. of Appl. Mech., Vol. 23, No. 2 (1956), p. 231
- (104) A. M. Wahl "Effects of the Transient Period in Evaluating Rotating Disc Tests under Creep Conditions"
J. of Basic Eng., Vol. 85, No. 1 (1963), p. 66
- (105) B. V. Saroja "Analysis of Creep in a Thin Rotating Disc with a Central Hole"
Aircraft Engineering, Vol. 32, No. 372 (1960), p. 34

- (106) A. Mendelson, et al. "A General Approach to the Practical Solution of Creep Problem" J. of Basic Eng., Vol. 81, No. 4 (1959), p. 585
- (107) A. M. Wahl "Stress Distributions in Rotating Discs Subjected to Creep at Elevated

Temperature"

J. of Appl. Mech., Vol. 24, No. 2 (1957), p. 299

- (108) 坂田 "中実回転円板の定常クリープ"

日本機械学会論文集 29巻203号 (昭38), p. 1137