# 有限要素法による熱伝導解析プログラム SASKE-H2

高田 良夫\* 塚田 悠治\*\* 天田 重庚\*\* 町田 明正\*\* 前橋 正雄\*\*\* 塩出敬二郎\*\*\* 高井 元弘\*\*\* 村田 克教\*\*\*\*

SASKE-H2 Program of Heat Conduction Analysis by the Finite Element Method

By

Yoshio TAKADA, Yuji TSUKADA, Shigeyasu AMADA, Akimasa MACHIDA, Masao MAEBASHI, Keijiro SHIODE, Motohiro TAKAI and Katsunori MURATA

#### Abstract

The program of heat conduction analysis by the finite element method was studied. In this program, the boundary conditions can be given in the form of heat transfer coefficient, heat flux or temperature. This program was applied to calculate the temperature distributions in the plate and exhaust valve, and the results are also presented in this paper.

## 1. まえがき

形状の複雑な熱機関部品の熱や強度の解析には汎用 性のある有限要素法の解析プログラムは有効であると 考えられる。一般に有限要素法は大容量の計算領域を 必要とするため大型の電子計算機を用いなければなら ないが,計算時間をある程度犠牲にすれば小型の計算 機でも使用可能となる。本プログラムは当所共用計算 機「FACOM 270-20」の使用を前提として,実 用に供しうる能力を備えたものを目標とした。

すでに前報<sup>1</sup>にて固定境界条件(境界上で温度が指 定される場合)を伴う有限要素法熱伝導解析プログラ ムSASKE-H1について述べた。一般の場合にお いては前述の温度が指定される条件よりも,熱伝達 率,熱量などの条件で与えられる場合が多い。本報告 はそれらの境界条件の場合も使用可能としたプログラ ムSASKE-H2について述べる。

## 2. 基礎理論

Fig. 1 のような二次元領域 D を考える。境界 C上で熱量が与えられている部分を  $\Gamma_q$ , 熱伝達の境界 条件が与えられている部分を  $\Gamma_h$ , 温度の境界条件が 与えられている部分を  $\Gamma_T$  とする。ただし,

 $C = \Gamma_T + \Gamma_q + \Gamma_h$  ……(1) 二次元定常熱伝導方程式は k, Qを熱伝導率,単位面



\*機関開発部(現三菱原子力工業),\*\*機関開発部 \*\*\*機関性能部 \*\*\*\*工学院大学(昭和47年5月~48年3月,当所機関開発部) 原稿受付:昭和48年2月7日

(145)

積あたりの熱発生量とすれば次式によって表わせる。

境界 C 上で次の条件が与えられているとする。 ここ で  $T_s$  は境界上の温度, n は C の法線方向,  $Q_n$  は  $\Gamma_{q}$ を構切って流れる単位長さあたりの熱量,  $T_{\infty}$  は  $\Gamma_n$ と接する媒質の温度を表わす。

$$T = T_{s} \qquad \text{on } \Gamma_{T}$$

$$-k\frac{dT}{dn} = Q_{n} \qquad \text{on } \Gamma_{q}$$

$$h(T_{\infty} - T) = k\frac{dT}{dn} \qquad \text{on } \Gamma_{h}$$

(2), (3)式を考慮した汎関数 x として次の 形を採用す る。

$$x = \iint_{D} \left\{ \frac{1}{2} k \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^{2} + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^{2} \right] - QT \right\} dx dy \\ + \int_{\Gamma q} QnT ds + \int_{\Gamma h} \left( \frac{1}{2} hT^{2} - hT_{\infty}T \right) ds \\ \cdots \cdots (4)$$

ただし ds は C の微小部分とする。(4)式の第1変分 をとり、二次元における Green の定理を応用して変 形すると次式が得られる。

$$\delta x = -\iint_{D} \left\{ k \left[ \frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} T}{\partial y^{2}} \right] + Q \right\} \delta T dx dy$$
$$+ \int_{C} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds + \int_{\Gamma h} h(T - T_{\infty}) \delta T ds$$
$$+ \int_{\Gamma g} Q_{n} \delta T ds \qquad \dots \dots (5)$$

上式の第2項の積分は次のように3つの部分に分けら れる。

$$\int_{C} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds = \int_{\Gamma T} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds + \int_{\Gamma q} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds + \int_{\Gamma h} \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds + \int_{\Gamma h} \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds = \cdots \cdots (6)$$

(6)式を(5)式に代入すると

$$\delta x = -\iint_{D} \left\{ k \left[ \frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} T}{\partial y^{2}} \right] + Q \right\} \delta T dx dy \\ + \int_{\Gamma T} k \frac{\partial T}{\partial n} \delta T ds + \int_{\Gamma Q} \left( k \frac{\partial T}{\partial n} + Q_{n} \right) \delta T ds \\ + \int_{\Gamma h} \left\{ k \frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_{\infty}) \right\} \delta T ds \quad \dots \dots (7)$$

が得られる。x の停留条件は,

.....(8)  $\delta x = 0$ 

にて与えられるから、(3)式を考慮することによって、 Euler 方程式として(2)式が求まる。それゆえ, (2), (3) 式の境界値問題の代わりに汎関数xの停留値問題を解 く手段を採る。

前報"と同じように Fig. 2 のような三角形要素を (146)





考え,その内部では温度が線形近似されると仮定す る。

$$T = \frac{A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3}{A} \qquad \dots \dots (9)$$

ただし,

 $A = A_1 + A_2 + A_3$ .....(10) 一つの三角形要素, jをとりだし, その頂点に1, 2, 3と番号をつけてその汎関数を xi とする。(4)式 を

$$\frac{\partial x_j}{\partial T_i} = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} \quad (i = 1, 2, 3)$$
.....(1)

 $x_{3j}$ と $x_{4j}$ について計算する。Fig. 3のように要素1 が境界上に現われる場合を考える。(9)式より j 内の温 度は

辺23が  $\Gamma_q$  であれば,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{3j} &= \frac{\partial}{\partial T_i} \int_0^L Q_n \Big[ T_2 + \frac{T_3 - T_2}{L} S \Big] ds \\ &= \frac{\partial}{\partial T_i} \Big[ \frac{Q_n}{2} L (T_3 + T_2) \Big] \end{aligned}$$

また辺23が  $\Gamma_h$  であれば,

56





$$x_{4j} = \frac{\partial}{\partial T_i} \{ \int_0^L \frac{h_j}{2} \Big[ T_2 + \frac{T_3 - T_2}{L} \Big]^2 ds \qquad \dots \dots (18) \\ - \int_0^L h_j T_\infty \Big[ T_2 + \frac{T_3 - T_2}{L} \Big] ds \\ = \frac{\partial}{\partial T_i} \Big[ h_j L \frac{T_3^2 + T_2^2 + T_3 T_2}{6} \\ - h_j L T_\infty \frac{T_3 + T_2}{2} \Big] \qquad \dots \dots (18)$$

となる。したがって要素が  $\Gamma_q$  に接する場合には(17)式 を、 $\Gamma_h$  に接する場合には(18)式を加えればよい。 (11)式を全体の要素について加え合わせる。

$$\frac{\partial x}{\partial T_i} = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial x_j}{\partial T_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

ただし、N は節点の総数、M は要素の総数である。 (19式をマトリックスの形で表わすと

$$[k] \{T\} + \{Q\} = 0 \qquad \cdots \cdots (20)$$

のようになる。ここで (T)  $- [T, T, \dots, T_n]^T$ 

$$\{Q\} = [Q_1 Q_2 \cdots Q_N]^T$$

である。 [k] は係数マトリックスで入力データによって計算でき、  $\{Q\}$  は与えられるものであり、したがって未知の  $\{T\}$  は求められる。

## 3. プログラムの構成

i )	メインプログラム	:全体のマトリ
		ックスの組立て
ii)	サブプログラム―1	INPUT:入力データの
		読込みと出力
iii)	サブプログラムー2	<b>OUTPUT</b> :計算結果の出
		力
iv)	サブプログラム―3	SALVIA:要素マトリッ

クスの計算
SOLVE: 連立方程式の
計算
<b>MATINV</b> : 逆マトリック
スの計算
MATM:マトリックス
の積の計算
MATTM:転置マトリッ
クスの積の計算

## 4. 計算手順

計算の手順と方法は,前報いで報告したSASKE —H1とまったく同じであるが、本プログラムでは一 般の境界条件を対象にしているので,境界条件の指 定,要素マトリックスの修正などの計算が付け加えら れている。以下、入出力と境界条件の指定方法につい て説明する。 1) 入力 入力データとして下記に示すものがある。 INODAL……節点の総数 IELEMT……要素の総数 **IBOUND**……境界上の節点の総数 NXPART ……全体のマトリックスの予定分割数 (>実際の分割数) XLAMD……熱伝導率(kcal/mm·sec·°C) ITMGG……熱伝達条件を与えられた境界上の節 点の総数 IWQH………異種の境界条件にはさまれている境 界上の節点の総数 IQL………発熱要素の総数 X(INODAL)……節点のX座標 Y(INODAL)……節点のY座標 **IND(IELEMT, 3)**……要素と節点番号の組合 せ IX(IBOUND)……境界条件の種類と境界上の節 点番号 TQH(IBOUND)…各境界節点に 与えられる温 度,熱伝達率,熱量の値 TMGG(IBOUND)…熱伝達条件が与えられてい る節点と接する媒質温度 **ISQS(IWQH)**……異種の境界条件にはさまれて いる境界上の節点番号 SQS(IWQH)……異種の境界条件にはさまれて いる節点はTQHで一方の境 界条件の値が与えられている

クスの計算

57

(147)



Fig. 4 境界条件の指定(フローチャート)

のでもう一方の境界条件の値 を与える

QL(IELEMT)……発熱要素の 発熱量 (kcal/m m<sup>2</sup>·sec)

入力データの形式については5章に詳しく述べる。な お,境界条件を指定するためのデータ(ITMGG, **IQL**, **TQH**など) については3) で詳細を述べる。()のついたデータは配列で定義されている。

2) 出力

- i)入力データの印刷:
- (入力データは読込まれるとただちに印刷される)
- ii) 計算結果の印刷:

(148)

**Fig. 4** に各境界条件の判断とそれに供なう計算を 行なう部分の簡単なフローチャートを示す。

境界条件としては次の4種類が指定できる。

- i)温度が指定されている場合
- ii) 断熱条件が与えられている場合
- iii) 熱量が与えられている場合
- iv) 熱伝達率および加熱媒質温度が与えられている場合

境界条件の種類と境界上節点の番号は、データ IX によって指定する。境界条件は境界上の各節点に対し て指定する。IXは4桁の整数値から成り、Fig.5に



Fig. 5 データ I X の内容

示すように一番上の1桁で境界条件の種類を,残りの 3桁で境界上の節点番号を示す。各境界条件に対する

(a)



Fig. 6 単位熱量,熱伝達率,媒質温度の与え方 温度,熱伝達率,熱量の各値は,データTQHで指定 する。固定境界条件は温度を,断熱条件は0.0をデー タIXに対応する場所に入れる。熱伝達率(kcal/m m<sup>2</sup>·sec·°C),単位熱量(kcal/mm·sec),熱伝達境 界に接する媒質温度は境界上の各辺に対して与えなく てはならない。しかし,データTQHは境界上の各節 点に対して,各値を与えているので,本プログラムで

Table—1 Fig. 7 における節点 n<sub>2</sub> に対するデ ータ

	境界条件 の 種 類	デ ー タ TQH	データ SQS
aの場合	1	温度	<u>単位熱量</u> 熱伝達率
bの場合	1	温度	
cの場合	3 or 4	単位熱量 熱伝達率	_
dの場合	5	熱伝達率	単位熱量





は Fig. 6 に示すように境界上の一辺にある値Cを指定したい場合には,その辺を共有する2節点に対して,その平均値がCとなるようにC1, C2を指定する。 媒質温度はデータTMGGで指定する。 次に異種の境界条件がとなり合う場合について説明 する。異種の境界条件がとなり合う場合 Fig. 7 に示 すような場合が考えられる。前で説明したように異種 の境界条件にはさまれた節点はデータ ISQSに指定

順番	入力データ・ステートメント	データ形式
1	READ (n.m1) INODAL, IELEMT, IBOUND, NXPART, IWQH, ITMGG, IQL m 1 FORMAT (715)	
2	READ (n,m 2)X(I)XLAMD m2 FORMAT (E12.4)	E12.4
3	READ (n,m3) (X (I),I=1; INODAL) m3 FORMAT (E13.5)	1 E13.5 INODAL E13.5
4	READ (n,m 4) (Y (I),I=1, INODAL) m 4 FORMAT (E13.5)	I E13.5
5	RARD (n,m 5) (IND(I,J),J=1,3) ,I=1,IELEMT) m 5 FORMAT (I6,2I5) j3 ※任意の要素に対してその 節点番号を反時計回りに J1,J2,J3と定義する	j1 j2 j3 1 16 15 15 1 16 15 15 1 ELEMT 16 15 15
6	READ(n,m6) (IX(I),I=1, IBOUND) m6 FORMAT (I5)	1 <u>15</u> IBOUND <u>15</u>
1	READ(n, m 7) (TQH(I), I=1, IBOUND) m 7 FORMAT(E12.5)	I E12.5 IBOUND E12.5
1	READ(n,m 7) (QL(I),I=1, IBOUND) m 7 FORMAT(E12.5)	1 E12.5 IBOUND E12.5
8	READ(n, m8)(TMGG(I),I=1, IBOUND) m8 FORMAT(E11.4)	1 E11.4 IBOUND E11.4
9	READ(n,m 9) (ISQS(I), SQS(I),I=1,IWQH) m 9 FORMAT(I5,E12.5)	1 15 E12.5 IWQH 15 E12.5

Table—2 入力データの作成

(150)

され(ただし、断熱条件と他の種類の境界条件にはさ まれた節点は指定する必要はない)一方の境界条件の 値をデータTQHに、もう一方の境界条件の値をデー タSQSで指定する。Table—1に Fig. 7  $\sigma(a)\sim(d)$ の各場合の節点  $n_2$  に対するデータの与え方を示す。 入力データのITMGG, IWQH, IQLの値が0 の場合は、それぞれTMGG, ISQS, SQS, Q Lの各データは作成する必要はない。

# 5. 本プログラムの使用について

この章においてはSASKE一H2を使用する場合の制限と入力データの作成方法について述べる。本プ ログラムは当所共用計算機「FACOM 270-20」 (MT2台含む)の使用を前提として組立てられてお

- り,実行はBATCH処理にて行なわれる。
- 1) 使用できる範囲
  - a) 節点の総数が 350 以下。
  - b) 要素の総数が 600 以下。
  - c)境界条件は4章の3)境界条件の指定の項で述べたように、4種の境界条件を与えることができる。境界上の節点の総数は150以下。
  - d) 発熱条件は各要素単位に指定する。
- 2) 入力データの形式

木プログラムを使用する場合は Table-2の順序と 形式でデータを作成すれば良い。ただし、物体の境界 条件によっては不必要なデータもできるので、4章の 1)の入力の項も合せて参照のこと。

# 6. 精度の検討のための計算例

#### 6.1 長方形平板の熱伝導解析

Fig. 8に示すような長方形平板の熱伝導問題を考える。内部熱発生がないと仮定すれば、基礎式は

境界条件は次のように定める。

$$T = T_s \text{ at } y=0, \ 0 < x < a$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ at } x=0, \ 0 \le y \le b$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ at } y=b, \ 0 < x < a$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h}{k} (T_{\infty} - T) = -h'T'$$

$$at \ x=a, \ 0 \le y \le b$$

(21), (22)式の厳密解2)は

$$T = 2h' T_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n \cosh \alpha_n (b-y)}{k \cos \alpha_n a \cos \alpha_n b} \quad \dots \dots 23$$



ただし  $k=(\alpha_n^2+h'^2)a+h'$ 

αn は下式を満足する固有値である。

 $\alpha \tan \alpha a = h'$ 

SASKE-H2を用いて数値計算を行なった。長 方形平板の三角形要素による分割は Fig. 9 のとおり である。節点総数=285,要素総数=504,a=100mm, b=150mm, h'=1.556 1/m,  $T_s$ =100°C,  $T_{\infty}$ =0°C を入力データとして使用している。 Fig. 10 に x=a上の無次元温度(100°Cで除したもの)分布を示した もので、〇印がFEM解、実線が23式による解析解で

(151)



62

Fig. 10 x=a 上の温度分布(未修正)

Table—3 x=a, y=0 付近の節点温度

位置 $(\bar{x}=1.0)$	解析解	FEM 解	位置 $(\bar{x}=1.0)$	解析解	修正分 割FE M解
$\bar{y} = 0.0$	50.61	12.85	$\bar{y} = 0.0$	50.61	52.91
0.033	8.05	5. 55	0.007	37.87	31.36
0.07	4.11	3. 70	0.027	9.92	7.99
0.10	2.74	2.60	0.06	4.56	3.87
0.13	2.05	1.99	0.01	2.74	2.62
0.17	1.63	1. 58	0.15		1.82
0. 20	1.35	1.40	0.20	1.35	1.40

ある。Table-3に x=a上の隅に近い7個の節点の 温度をかかげる。角の節点では解析解との差が38°C, 約76%もの誤差が生じ yが増加するにつれて減少して いる。このような大きい誤差が生じたのは分割方法の 不適当さに起因すると考えられる。(2)式によると, y=0 上の境界温度は x=a 点を含まない 範囲で与え られており、x=a 点は 0°C の媒質にさら されるた め x=a 点を中心にして急激な温度こう配が形成され る。この領域では Fig. 9 のごとき分割では粗すぎる ため誤差が生じたものと思われる。精度の改善のため 角の部分を Fig. 11 のように細かく分割し 再度, S ASKE-H2より計算を行なった。 x=a 上の温度 分布を Fig. 12 に隅の数個の節点の温度を Table-3 にかかげる。この結果, y=0, x=aの点の解析解と の温度差は、約 2.3°C, 4.8%であり、計算過程にお ける丸めの誤差を考えれば、ほぼ満足できる結果が得



Fig. 12 x=a 上の温度分布(修正)

られたことになる。Fig. 13, 14 に  $\bar{x}$ =0.5,  $\bar{y}$ =0.05 断面の温度分布を示す。いずれの場合も解析解とFE M解は良好な一致を示している。

# 6.2 境界条件を熱量で与える場合の誤差

本プログラムを使用する場合,境界条件として温度 や熱伝達率で与える場合は,特に注意をはらう必要は ないが,流出入熱量のみで境界条件を与える場合は,

(152)



Fig. 15 長方形平板の要素分割-2

二,三の注意が必要となってくる。

注意を要する第一の点は、基準となる温度を与える ことである。境界条件を熱量で与えることは温度勾配 のみ指定することであり、温度の絶対値は指定されな い。したがって熱量境界条件のみでは物体内の相対温 度は求められるが、温度の絶対値は与えられないので 木プログラムでは解は得られない。このような場合 は、境界上の少なくとも一点には温度の値を与えてお く必要がある。

注意すべき第二の点は、与えた境界条件での熱の流 入出のバランスをとることである。定常状態の解析で あるから、物体内の発熱量と境界の流入出熱量の総和 は0になるはずであり、誤ってバランスのとれていな い条件を与えると大きな誤差の原因となる。境界条件 として与えた流入熱量と流出熱量の差が大きい場合, 解析結果に与える影響をしらべるため Fig. 15 に示す ような長方形平板について計算を行なった。境界条件 は次のように定めた。

$$T = T_{s} \quad \text{at } x = 50, \quad y = 0$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = Q_{1} \quad \text{at } x = 0, \quad 0 \le y \le 40$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = Q_{2} \quad \text{at } x = 100, \quad 0 \le y \le 40$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } 0 < x < 100$$

$$y = 0, \quad 40$$

(153)

63













Fig. 16~21 に流入熱量過少,過大,適正の場合の 計算結果を示す。流出入熱量の違いによる余分な熱量 は計算上はすべて温度の基準点を通って流出入するこ とになるため,温度の基準を与えた点を中心に著るし い温度分布の乱れが生じていることがわかる。

#### 7. 排気弁の温度分布の解析への応用

本プログラムの実際の熱機関への応用としてディー ゼル・エンジンの排気弁の温度分布の解析を行なった 例を示す。日本造船研究協会は「巨大船用ディーゼル 機関に関する基礎研究」<sup>3)</sup>の中で,ディーゼル・エン ジン(日立B&W774-VT2BF-160型機関シリン ダ数:7 Cyl,シリンダ径×ピストン行程:740mm× 1,600mm, 連続最大出力:1,650 PS/Cyl, 回転数: 119rpm)の排気弁の温度分布を実測しているので, これを解析解の対象として取上げた。本プログラムの 境界条件として,前記の実測温度分布の境界上の値を 用いて、SASKE-H2により解析し両者の温度分 布の比較を行なった。ただし本プログラムによる解析 は二次元問題として取扱っている。Fig. 22 に三角形 要素による排気弁の右半分の分割を示す。弁座当り部 付近では熱流れが大きいので三角形要素は細かくして ある。Fig. 23 に排気弁の温度分布を示す。実線は実 測値, 点線は本プログラムにより求めた 等温線 であ り,両者の最大の温度差は約10°C で中心軸上に見ら



Fig. 22 排気弁の三角形要素による分割



Fig. 23 排 気 弁 の 温 度 分 布

れている。この誤差は先に述べたように三次元軸対称 体を二次元物体として取扱ったために生じたものと思 われる。なお本計算の所要時間(コンパイルから計算 結果の印刷まで)は約25分であった。

# 8. まとめ

SASKE-H1の拡張として,一般の境界条件の

場合に使用できる,有限要素法熱伝導解析プログラム SASKE-H2を完成した。温度こう配が急な領域 において要素の分割方法を考慮しさえすれば精度の良 い結果が得られる事を確認し,十分実用に供しうる事 を示した。

なお,本報告の第7章は伝熱研究室の森下, 菅の両 技官の資料提供による部分が多くここに感謝の意を表

(156)

する。

# 参考文献

- 高田,塚田,天田,町田,前橋,塩出,高井 「有限要素法による熱伝導解析プログラム SA SKE-H1」,船舶技術研究所報告,第9巻第 5号,昭47-9, p. 297.
- Carslaw, Jager
   [Conduction of Heat in Solids]
   Oxford, (1967).
- 第100研究部会「巨大船用ディーゼル機関に関する基礎研究」報告書、日本造船研究協会、研究資料 第77号