有限要素法による平面熱応力解析プログラム "SASKE-S1"について

塚田悠治*・天田重庚*・町田明正* 村田克教**・山崎敏男**

Program "SASKE-S1" of Plane Thermal Stress Analysis by the Finite Element Method

Ву

Yuji Tsukada, Shigeyasu Amada, Akimasa Machida, Katsunori Murata and Toshio Yamazaki

Abstract

This paper presents a plane thermal stress analysis by the finite element method, the program of which is called "SASKE-S1". The heat conduction analysis for plane and axi-symmetric problem by the finite element method has been made so far. Hence the system of thermal stress analysis has been established, which can be applied to the plane problems subjected to thermal loadings.

The SASKE-S1 was applied to a rectangular plate with a circular hole under uni-axial tension, to a rectangular plate in non-uniform temperature field and to a ring. The solutions by SASKE-S1 were compared with the analytical ones and the errors were briefly discussed.

1. まえがき

機関部品の熱応力を求める目的として著者らは有限 要素法による平面熱応力解析プログラムの作成に取り 組んできたが、ここに当初の目的を達成したので報告 する。

有限要素法は解析法の壁である幾何学形状の複雑さを問題としないばかりか、その汎用性からいっても、最も有力な数値解析法であると思われる。もともと数値解析法は計算機を用いた数値実験と見なされるので、そこに使用される理論式が対象としている場の挙動を忠実に表すことが保証されていれば、ある精度内で解をうる可能性がある。したがって、計算機の使用を前提とした有限要素法プログラムの作成は数値実験

* 機関開発部 ** 工学院大学 原稿受付: 昭和49年9月11日

装置を組み立てることに相当し、モデルを作成する代わりに入力データを与えさえすれば所要の結果を得ることができる。

用いる理論式は応力解析の場合,仮想仕事の原理から導かれる変分式であり,汎関数が求まれば有限要素法の定式化が行える。一般に汎関数による停留値問題が与えられれば相当する境界値問題を導くことは容易であるが,その逆は非常に困難で,はたして汎関数が存在するのかどうかもわからない場合が多い。そのような場合,すなわち汎関数が求められない場合,有限要素法の定式化の過程で次の二つの方法が用いられる。一つは Least Square Method を用いる方法,他は Weighted Residual Method¹⁾ と呼ばれるものである。特に後者の方法は粘性流体力学の分野に多くの貢献をしている。

これまで著者らは平面熱伝導問題の有限要素法プロ

グラムについて下記のものを作成した。

- i) SASKE-H1²⁾.....定常, 固定境界条件
- ii) SASKE-H289.....定常, 一般境界条件
- iii) SASKE-H34 ……非定常,一般境界条件 ここに平面熱応力解析プログラム "SASKE-S1"の完成により,平面問題として温度の初期,境界条件と応力の境界条件を与えさえすれば,温度ならびに熱応力を求めるシステムが確立されたことになり,一つの数値実験装置として今後の研究におおいに役立つであろう。

2. 基礎理論5)

Fig. 1 のごとく物体の占めている領域を Ω , その境界を $\partial\Omega$ で表し、次のような偏微分方程式の境界値問題を考える。

$$\mathcal{L}u = f$$
 in Ω (1)

$$Bu=g$$
 on $\partial\Omega$ (2)

u は求めようとする未知関数, f と g は与えられる 関数とする。演算子 \mathcal{L} が次の性質を持つ場合に議論 をしぼる。 u_1 , u_2 , v, η をある関数とすれば

i) 線形である。

$$\mathcal{L}(a_1u_1+a_2u_2)=a_1\mathcal{L}u_1+a_2\mathcal{L}u_2 \quad (3)$$

ただし、 a_1 、 a_2 は定数。

ii) 対称である。

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle \mathcal{L}v, u \rangle$$
 (4)

iii) Positive Definite である。

$$\langle \mathcal{L}\eta, \eta \rangle > 0 \quad \text{for } \eta \neq 0 \quad (5)$$

ただし〈 〉なる記号は二つの関数の内積を示す。

すると次の定理が成立する。

[定理]

性質, i), ii), iii) を持つ \mathcal{L} に対して, (1), (2) 式の解は汎関数

$$J(u) = \langle \mathcal{L}u, u \rangle - 2\langle f, u \rangle \tag{6}$$

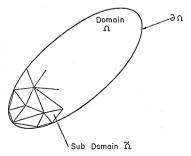


Fig. 1 Domain occupied by body

を最小にする。

[証明]

$$\mathcal{L}u^* = f \tag{7}$$

η を u* と同じ階まで微分可能な任意関数とすれば I(u*+ν)-/ C(u*+ν) u*+ν)-2/f u*+ν)

$$\begin{split} J(u^* + \eta) &= \langle \mathcal{L}(u^* + \eta), u^* + \eta \rangle - 2\langle f, u^* + \eta \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}u^*, u^* \rangle - 2\langle f, u^* \rangle \\ &+ \langle \mathcal{L}u^*, \eta \rangle + \langle \mathcal{L}\eta, u^* \rangle \\ &+ \langle \mathcal{L}\eta, \eta \rangle - 2\langle f, \eta \rangle \\ &= J(u^*) + 2\langle \mathcal{L}u^*, \eta - f, \eta \rangle + \langle \mathcal{L}\eta, \eta \rangle \\ &= J(u^*) + \langle \mathcal{L}\eta, \eta \rangle \\ &\geq J(u^*) \end{split}$$

[Q.E.D.]

それゆえ、(1)、(2) 式を満足する u を見つける代わりに (6) 式で定義された汎関数 J(u) を最小にするような Ω の subdomain $\tilde{\Omega}$ 上で定義された近似関数 \tilde{u} を見つける手順が有限要素法の骨子である。

3. 有限要素法の基礎式の導入

対象としている物体を **Fig. 1** のように有限個の三 角要素に分割する。要素内のある点において変位が次 のように定義されると仮定する。

$$\{u\} = [N]\{\delta\} \tag{8}$$

u は、x、y 方向の変位から成る変位ベクトル、 δ は 節点での変位ベクトル、 $\{$ $\}$ は列ベクトルを示す。 $\{\delta\}$ を $\{u\}$ に変換する線形演算子 [N] は Shape Function と呼ばれる。ひずみは $\{\delta\}$ を用いると

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [B]\{\boldsymbol{\delta}\} \tag{9}$$

のように表される。熱膨張によるひずみは初期ひずみ {e₀} として取り扱えるので、応力-ひずみ式は

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [D](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \tag{10}$$

となる。

仮想変位を $d\{u\}$ とすれば

$$d\{\mathbf{u}\} = [N]\{\boldsymbol{\delta}\} \tag{11}$$

となり、節点力を $\{F\}$ とすると $d\{\delta\}$ によってなされた仕事は

$$d\{\boldsymbol{\delta}\}^T\{\boldsymbol{F}\}\tag{12}$$

にて示される。一方,上記の仕事は物体内にて単位体 積あたり

$$d\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}\tag{13}$$

なる仕事とつり合うので, 次式を得る。

 $d\{\boldsymbol{\delta}\}^T\{\boldsymbol{F}\}$

$$=d\{\boldsymbol{\delta}\}^T\Big(\Big[\int [B]^T[D][B]\boldsymbol{d}(\text{vol})\Big]\{\boldsymbol{\delta}\}$$

(30)

$$-\int [B]^T[D]\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\} \boldsymbol{d}(\text{vol})$$
 (14)

簡単な形で示すと

$$\{\tilde{F}\} = [K]\{\delta\}_{\circ} \tag{15}$$

ただし

$$\{\widetilde{F}\} = \{F\} + \{F_0\}$$
$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol})$$
$$\{F_0\} = \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(\text{vol})$$

一方, (12), (13) の両式より

$$d[\{\boldsymbol{\delta}\}^T[\boldsymbol{F}]] - d\left[\frac{1}{2}\int ([D]\{\boldsymbol{\varepsilon}\})^T\{\boldsymbol{\varepsilon}\}d(\text{vol})\right] = 0$$

第1項は外力によるポテンミャルエネルギー,第2項はひずみエネルギーであり, それぞれ W と U で表すと

$$dW+dU=0$$

 $\chi = U + W$ とすれば

$$d(\chi) = 0 \tag{17}$$

となる。 χ は全ポテンシャルエネルギーと呼ばれる。結局,(17) 式は つり合い状態において全ポテンシャルエネルギー, χ が許容変位の変分に対して停留値となることを意味する†。前章で述べた J(u) に 相当する汎関数がことで導いた χ であることは容易に理解されよう。

4. 解の収束性について

2章で述べたように物体を有限個の三角要素に分割し、その要素間の節点での変位で要素の変位を表現するということは、もともと無限の自由度を有する物体を有限の自由度で置き換える考えが基本にある。したがって χ の近似、 $\tilde{\chi}$ が χ_{\min} から離れれば離れるほど、境界値問題の真の解 u^* と $\tilde{\chi}$ からえられる \tilde{u} との差も大きくなると想像される。では逆に分割を細かくして自由度を増してやれば真の解に近づくかどうかの疑問が残る。 $Tong^{6}$ らは、仮定する変位が

- i) $\Omega + \partial \Omega$ (Ω は物体の占める領域, $\partial \Omega$ はその境界) 内で連続であること。
- ii) その変位の1階微分が区分的連続であること。
- iii)変位があらゆるなめらかな関数を ϵ^2 (ϵ は三角 要素の1辺の大きさ) の大きさまで近似できる こと。

なる条件を満足するならば、 $\epsilon \to 0$ になるにつれて有限要素解は厳密解に近づくことを保証した。

5. プログラムについて

5.1 プログラムの概要

本プログラムは有限要素法による平面応力解析プログラムであり、変位・外力・温度を各節点に指定するとにより、各要素に働く応力を求めることができる。なお、使用した計算機は CDC6600 である。

5.2 適用範囲および制限事項

- i) 節 点 数 400 以下
- ii) 要 素 数 800 以下
- iii) 境界上の節点数 100 以下
- iv) 隣接した節点との節点番号差 40 以下

これらの制限事項は計算機の容量等により簡単に変 更できる。なお本プログラムは、物体力・圧力が作用 する場合には適用できないが、サブルーチンの形でプ ログラムを追加することにより、物体力・圧力の作用 する場合も計算可能となる。

5.3 プログラムの構成

本プログラムは下記に示すサブルーチン群から成る。本プログラムは文献 7) による部分が大きい。

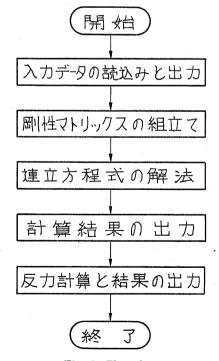


Fig. 2 Flow chart

[†] 弾性系ではχは最小となることが保証されてい

i) MAIN 主プログラムで全体の剛性マトリック スの組み立てを行う。

ii) SUB-1: DINPUT 入力データの読込みと印 刷。

iii) SUB-2: STFPAN 要素剛性マトリックスと温 度係数ベクトルの計算。

iv) SUB-3: SOLVE 一次元連立方程式の解法 〔対角化分割法〕。

v) SUB-4: OUTPUT 要素内の応力歪の計算と計 算結果の印刷。

vi) SUB-5: FORCE 未知節点力の計算。

vii) SUB-6: MATINV 逆マトリックスの計算。

viii) SUB-7: MATM マトリックスの積計算。

Fig. 2 に本プログラムのフローチャートを示す。

5.4 入 力

入力データの種類と書式を Table 1 に示す。入力

Table 1 Input date format

順番	入カデータ	データ形式	備考
0	NPOINT:節点の 総数 NELEMT:要素の 総数 NUNIT:隣接した節 点との最大 節点番号差	NPOINT NUNIT 14 14 14 NELEMT	
0	E:ヤング率(kg/zm²) AMU:ポアソン比 CHTHI:要素の厚さ (mn)	E AMU CHTHI E12.4 E12.4 E12.4	○E. AMUはどの要素でも 一定。 ○CHTHI>0·・・どの要素も 一定。 CHTHI≤ 0·・・・各要素こと (に違う。
3	IND :要素と節点との 組み合せ NELEM	J ₁ J ₂ J ₃ 1 14 14 14 T 14 14 14	Ja 任意の要素 k に 対して、その節 点番号を反映計 回りに、Ji, Jz, Jz Ja の順とする。
4	XX:節点のx座標(mn) YY:節点のy座標(mn) NPOIN	1 F10.3 F10.3	
\$	MOJI:出力のための 文字データ	MOJI(1) MOJI(2) A 1 A 1	MOJI(1)文字 X MOJI(2)文字 Y
6	THICK: 各要案の序 さ(mn)	THICK 1 E12.4 ELEMT E12.4	OCHTHI>0なら,このデータ は必要ない。
Ø	NUV1 : 変位が既知で 大きさが 0 の 成分の総数	NUV 1	
8	J: 既知変位 (大きさ = 0) の節点番号 K:変位の方向を表わ す	J K 1 14 12	ONUV1=0 なら、このデータ は必要ない。 OK=1・・・・

順番	入カデータ	デ - タ 形 成	(後 考
9	NUV2:変位が既知で 大きさが0で ない成分の総 数	NUV 2	
(0)	J: 既知宴位(大きさ * 0) の節点番号 K: 宴位の方向を表わ す UVK: 宴位の大きさ NUV	J K UVK 1 14 12 E12.4 2 14 12 E12.4	ONUV2=0 なら、このデータ は必要ない。 O K=1… x 方向を表わす。 K=2… y 方向を表わす。
(1)	NFF 外力が既知で大 きさが 0 でない 成分の総数	NFF I 4	
02	J: 既知外力 (大きさ ★ 0) の節点番号 K: 外力の方向を表わ す FFK: 外力の大きさ NI	J K FFK 1 14 12 E12.4 F 14 12 E12.4	ONFF=0なら、このデータ は必要ない。 ○K=1…x方向を表わす。 K=2…y方向を表わす。
(3)	TP(1): 節点番号1の 温度	TP(1) E13.5	
•	TP: 各節点(1以外) の温度 NP(TP 2 E13.5 PINT E13.5	OTP(1)≤ -300なら, このデー タは必要ない。
6	ALFAR:材料の線影 張係数	ALFAR E13.5	
(6	IJIKU :要素の厚さ決 定のための変 数	IJIKU I 4	OIJIKU≈ 0 なら、要素の厚さ はx軸に比例する。

データは, **5.2** の注意事項を厳守し **Table 1** の順序 に従って作成する。

5.5 出 力

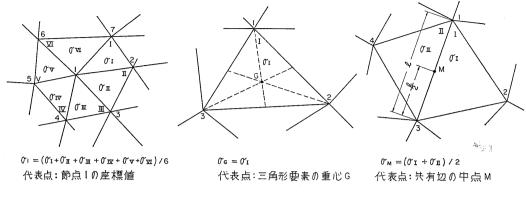
入力データは読込まれるとすぐに出力される。計算 結果として各節点の変位・各節点に働く力・各要素の 応力と歪が出力される。

6. 精度の検討のための計算例

本プログラムの精度の検討のため, a) 熱負荷を受ける平板, b) 引張り荷重を受ける穴あき平板, c) 熱負荷を受ける円板について計算を行った。

FEM 解では、一般に要素内の応力が一定であるとおくことから、任意断面の応力分布は階段状になってしまい、物体内の連続した応力分布が得られない。そこで、一般には代表的な点の応力を決定し、なんらかの補間を行い、滑らかな応力分布とする。この代表的な点の応力決定については、経験的に次に示す方法が良く用いられている(Fig. 3 参照)。

① 節点における応力を,隣接する要素の応力の平 均値とする。(節点平均)



- 1) 節点平均法
- 2) 重心近以法
- 3) 边平均法

Fig. 3 Representation of stress at point

- ② 要素内の応力を、その要素の重心の位置とする。(重心近似)
- ③ 辺の中点における応力を、その辺を共有する要素の平均値とする。(辺平均)

計算結果は上記の代表点の応力について,解析解と 比較した。なお,上記の問題は分割法に密接に関連す るので詳細な点は文献8)を参照されたい。

6.1 熱負荷を受ける平板9)

Fig. 4 に示すような,長辺と短辺の比が 5:2 の長方形平板の y 軸方向に 放物線状の温度分布がある場合について、熱応力の計算を行った。温度分布は一般に

- ① 要素の代表温度として、その要素の重心位置の 温度を与える。
- ② 各節点の位置の温度を与えて、要素の温度を各 頂点の温度の平均とする。

この二つの場合があり、本プログラムは各節点に温度を与えた。FEM解は、要素内で応力-歪が一定である

ので、Fig. 5 に示すような階段状の解となってしまう。そこで、前に述べた方法で応力の代表点を決定した。Fig. 6 からわかるように、 σ_{α} に関しては重心近似・節点近似が、 σ_{y} に関しては辺平均が解析解と良くあっていた。なお、重心近似において σ_{y} の値が大きいのは、要素の大きさ、要素分割の方法により生じたものと思われる。

6.2 引張り荷重を受ける穴あき平板

Fig. 7 に示すような穴のあいた長方形平板の y 軸方向に引張り荷重を加えた場合について計算した。計算結果は、Fig. 8 に示すように θ =0°, 45° の二つの断面について解析解と比較した。Fig. 9, 10 からわかるように、重心近似による値は他の方法でえられた値に比較して大きく振動した値となっているが、節点平均、辺平均の値は解析解と良く合っていた。

6.3 熱負荷を受ける円板

Fig. 11 に示すような,外径と内径の比が 2:1 の円

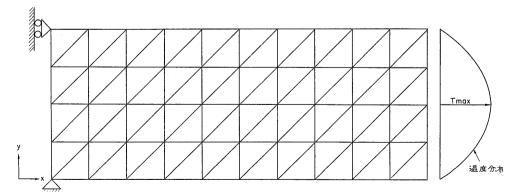


Fig. 4 Division of rectangular plate

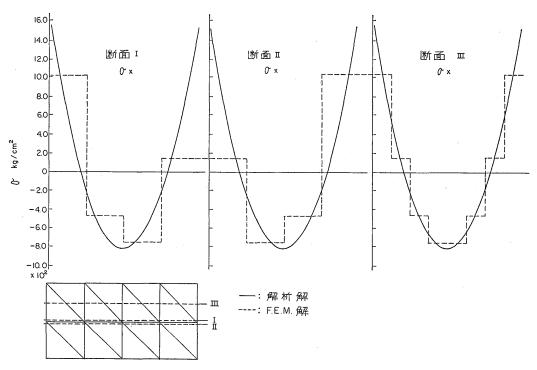


Fig. 5 Thermal stress in rectangular plate

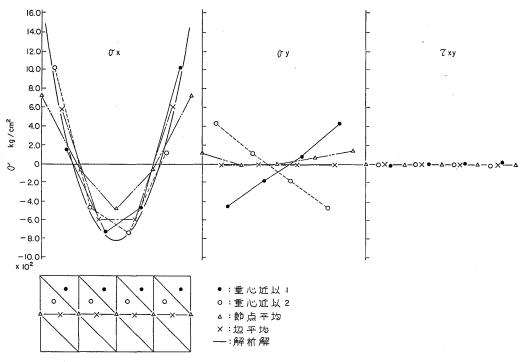


Fig. 6 Thermal stress in rectangular plate

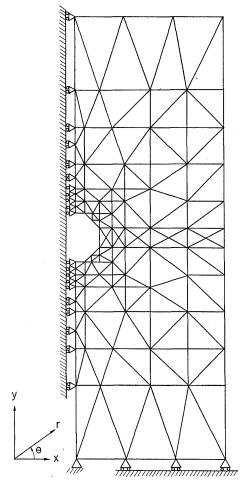


Fig. 7 Division of rectangular plate with circular hole

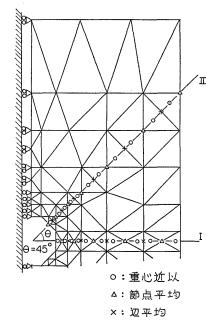


Fig. 8 Positions of stress by FEM

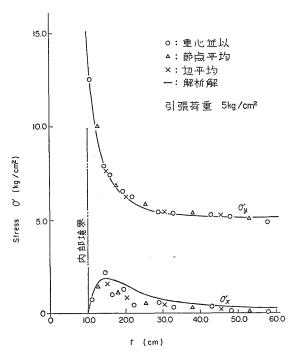


Fig. 9 Result of calculation by FEM

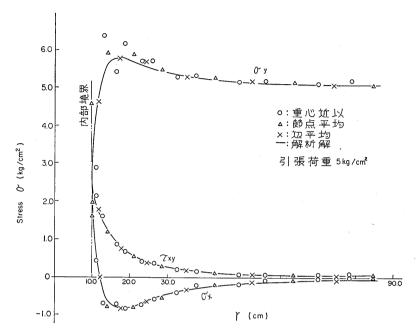


Fig. 10 Result of calculation by FEM

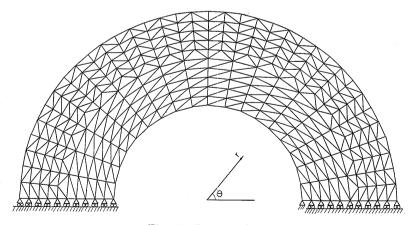


Fig. 11 Division of ring

板の、半径方向 r に対数関数状の温度分布すなわち,

$$T = T_0 \log \left(\frac{b}{r}\right) / \log \left(\frac{b}{a}\right) \tag{18}$$

がある場合について計算を行った。 $T_0=100^\circ$ C の場合の計算結果を Fig. 12 に示すような, $\theta=90^\circ$ 上の断面について解析解 10 と比較した。Fig. 13 からわかるように,節点平均,辺平均の値は解析解と良く合っているが,重心近似の値は誤差が大きかった。

以上のような結果より、本プログラムは実用に供し得ることがわかった。解の精度は要素を細かくすれば良くなるわけであるが、本例題においては、応力の代表点の決定について、重心近似とするよりも、辺平均節点平均とした方が精度が良かった。これについては鵜戸口らの論文⁶⁾があり、次の関係がある場合、辺平均、節点平均は、重心近似よりも誤差は少ないとしている。

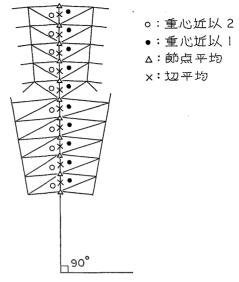


Fig. 12 Position of stress by FEM

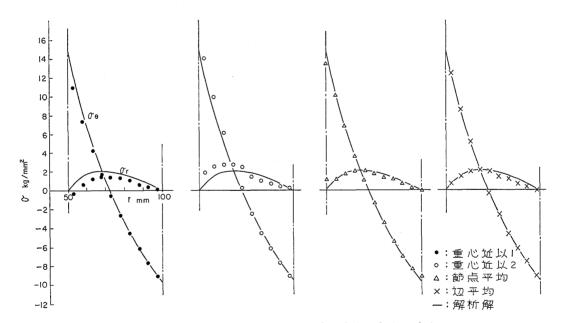


Fig. 13 Comparison between FEM and analytic solution of ring

- ① 辺平均の場合,関係する4点が点対称となる配置の場合。
- ② 節点平均の場合,関係するまわりの点が,内節点に対して対称に配置している場合である。

この関係は、Fig. 6, 8, 12 とそれぞれの解を見れば わかるように、上記の条件が良く合っていた。

7. 結 論

- (1) 有限要素法による応力解析プログラム (SASKE-S1) を完成し、実用に供し得ることを確かめた。
- (2) このプログラムは熱伝導解析プログラム (SASKE-H) と組み合わせることにより, 熱的境界条

件を与えられた場合の応力解析も行うことができる。

今後,とのプログラムの若干の訂正により,軸対称 問題への拡張が容易に行えるので,ピストンや弁など への適用を進めていく予定である。

なお、本プログラムの開発は FEM 研究グループ (著者らと前橋、塩出、高井 (機関性能部) 氏ら) の検 討されながら1971年に開始されたのであるが、種々の 事情で中断され、今日やっと完成にこぎつけた。 開発 当初には、特に高井元弘技官には多くの御協力を受けたのでことに感謝する次第である。

附録に本プログラムのリストをのせ、何らかの参考 に供したい。

参考文献

- Zienkiewicz; "The Finite Element Method in Engineering Science" McGraw-Hill (1971)
- 2) 高田,他; "有限要素法による熱伝導解析プログラム SASKE-H1" 船研報告 第9巻第5号 (1972)

- 場田,他; "有限要素法による熱伝導解析プログラム SASKE-H2" 船研報告 第10巻第3号 (1973)
- 4) 塚田,他;"有限要素法による熱伝導解析プログラムについて"船研報告 第10巻第5号 (1973)
- Yang; "Seminar Note on Advanced Numerical Analysis" Applied Mechanics Department, The University of Michigan (1973)
- Tong, Pian; "The Convergence of Finite Element Method in Solving Linear Elastic Problems" International J. of Solids and Structures, Vol. 3 (1967)
- 7) Zienkiewicz, Cheung; "マトリックス有限要素 法" 培風館 (1970)
- 8) 鵜戸口,他; "有限要素パターンの誤差解析" 日本機械学会論文集 39巻 320号 (1973)
- 9) 大西,他; "有限要素法による連続体の熱応力 解析について" 日立造船技報 第32巻 第1号 (1971)
- Timoschenko, et al.; "Theory of Elasticity" McGraw-Hill (1951)

```
PROGRAM
                                                                                                                                        HATH
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                CDC 6600 FTN V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 16.26.37.
                                                                                                                                                                    10
15
20
25
33
                                                                                                                   +0
  45
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             は計算に不要な出力文
  50
                                                                                                                        C****
C GOUSTI MATRIX NO KUMITATE
C**** DETERMINATION OF MPART ****
L=10
H=1
  55
                                                                                                                   00 200 LA=1,L
189=UC*LA
1F(:M.,GF,:HPOIRT) GO TO 201
1804/17(LA,)] = d
1804/17(LA,)
1804
       ٤n
       65
       70
          75
          85
          90
             95
                                                                                                                                                  | Internation | 
     105
                                                                                                                                                     #11=2*#6

:M1=L0

:M1=H1-60*(L-1)

:Ff(:M3.6E.L1.AH0.M3.LE.L2) GO TO "91

GO TO 206

431 dO '453 LE=1,3
     113
```

(40)

```
## COUNTY OF THE PROPERTY OF T
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             CDC 6600 FTN V3.0-P326 OPT=1 03/16/74 15.26.37.
                            PROGRAM
                                                                                                                                            MAIN
115
120
     123
     136
     135
                                                                                                                                                 IF(.HE.HPART) GO TO WEO

REPART

HE |

WENTE(E) ML1, HL, ((SK(I,J), I=1, ML1), J=1, ML1),

(GR(I,J), I=1, ML1), J=1 LL, ML2), (FF(I), I=ML3),

WENTE(E) SALE ML1, J=1 LL, ML2), GALAY, ML2, ML4, ML4,

WENTE(E) SALE ML4, ML2, ML4, ML4, ML4, ML4, ML4,

LAD DO 212 LB=ML3, ML4,

LA=LA+1,

210 (FF(LA)=FF(LB) +OF3(L4)

FF(L-TC, HPART) 40 TO +11

DO 412 KA1=H, ML1

DO 412 KA1=H, ML2

LAS KA1=H, ML1

WENTE(E) SALE ML4, ML2

LAS CASA = ML4 H

LAS CASA
     144
       150
       165
          150
          1.5
                                                                                                                                                    170
               175
               160
               185
               190
               195
                                                                                                                                            MM1=M
C**** HRITE MT (MO4) ****
                                                                                                                                                           200
               205
                                                                                                                                       --,-o,wHiXN=,ZI*,/

WRITE(3,507) (FF(KYK),LVECT(KYK),KYK=1,HPPO)

REMIND 4

C**** CALJULATION OF DISPLICEMENT ****

CALL SCLVE
               210
                                                                                                                                                           HRITE(3,504)
504 FOR:ART(141,11HDISPLOSHERT)
WRITE(3,502)
URITE(3,502)
WRITE(3,502)
WRITE(3,502)
S63 FOR:ART(141,11HLORD VESTOR)
               220
```

```
PROGRAM
                                                                                       HAIN
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     CUC 6600 FTH V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 18.26.37.
                                                                            URITE(3,502)
HRITE(3,507)(FF(HL),HL=1,HPP0)
HRITE(3,507)(LVEDT(KYK),KYK=1,NPP0)
507 FOR LAT(1H, 2215,E)
502 FOR LAT(1H, 2215,E)
503 FOR LAT(1H, 2215,E)
C--- OUTPUT OF GATA(STRESS AND STRAIN)
CALL GUTPUT
 225
                                                                             CALL SUTPUT
C**** CALUSULATION OF U-KMO-HN FORCE ****
230
                                                                            SALE FORJE
WRITE(3,430)
435 FORMAT (100,1340ALL FORGE OK)
                                                                                                                  STUP
 235
                                                               C**** SUI; OUTLINE FOR FORMATION OF ELEMT STIFFNESS MATRIX SUB-CUTTINE STEPAN(LA) TAU) OTTCHISTON AN(3,0) pdx(3,3) pdx(3,0) pdx(3
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               CDC 6600 FTN V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 18.26.37.
 16
 15
 20
 23
 30
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     3300
 35
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     3350
   46
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       3400
 50
 54
            SUBROUTINE STEPAN
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                CCC 6600 FTN V3.0-P326 OPT=1 03/16/74 18.26.37.
                                                                                                           AVIEME=(DTP(1)*UTP(2)*DTP(3))/3,0

CAL /=LFAR*L*AVIEMPTAU/(2,0*(1,0-AMU))

STIM(3)=GALV*(AV(2)-AV(3))

STIM(3)=GALV*(AV(3)-AV(1))

STIM(3)=GALV*(AV(3)-AV(2))

STIM(3)=GALV*(AV(3)-AV(2))

STIM(3)=GALV*(AV(3)-AX(2))

STIM(5)=GALV*(AX(3)-AX(2))

STIM(5)=GALV*(AX(3)-AX(1))

ETURN

ETURN

END
 65
```

```
C**** SUBROUTINE FOR SOLUTION

SUBROUTINE FOR SOLUTION

SUBROUTINE SOLVE

CUMMOR/SKI/MPOINT, NELEMT, NUMIT, NPART, IJIKU, NPPO/BKG/AM(60,60),
,/MKG0,60)/MS/YM(60,50), TF(600), MS(600), F(600), DIS(60),
,/MKG/CFF(600), NIMBURIT (10,2)

DU JOI I=1,00

TF(1)=0,0

"S(1)=1,00

"S(1)=1,00

TF(1)=1,00

TF(1)=1,0
                         5
16
15
     20
     25
          30
          35
               40
               45
               50
               55
```

```
CGC 6600 FTH V3.0-P326 OPT=1 03/16/74 16.20.37.
  2VJU2 SHITUUAEUZ
           IF(IPART-1) 910,310,911
911 HA= HPART-1
100 912 LL=1,NA
RACKSPACE 6
3ACKSPACE 6
             80
65
75
υS
```

COC 6600 FTN V3.0-P326 OPT=1 03/16/74 18.26.37.

```
COC 6600

SUSROUTINE FOR MATRIX INVERSION
SUSROUTINE MATRIX(N)
DIMENSION TRIVOT(60); INDEX (60,2); PIVOT (60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 34(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 35(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 35(60,60); 35(60,60)
DOMADN/SKA/A(80,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,60); 36(60,
                                                                   . с
10
15
21)
21:
3.3
                                                                                              A(L,|CCUM)=0.0

0 3:3 L=1,N

3:3 A(L,)-A(LL,L)-A(ICOLUM,L)*T

5:0 CONTINCE

10 3:4 L=1,N

L=1:1-1

IFTIMA(KK,1)-IMDEX(L,2)) 9:5,364,965

3:50 Und:1MEX(L,2)

10 3:0 K=1,N

SCAP=1K(N,R0M)

A(K,)-GCUM)=SWAP

3:0 CMTINUE

5:0 10 5:57
35
 40
 45
 r f.
                                                                                                  935 WRITE(3,1)
1 FOR AT(145,5X,20H:HOT MATRIX INVERSION)
937 RETURN
FRO
 55
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                ODC NAME FTW V3.8-P328 UPT=1 03/16/74 18.20.37.
                                                                                  24*** 503800TINE FOR HALTIPLICATION-1
SUB-001TINE MATH(4, m)
COMMON MAKA/AGO, 500, 934 (66, 600 / 3K5/YH(60, 600 ), TF(EU), RS(EO), F(eU),
H(50)
10 520 1=1, H
00 125 (61, H
920 011 = 1(1) *A(I,K)*F(K)
EIJSH
LU3
         15
   19
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   CDC 6688 FTN V3.8-P326 OPT=1 83/16/74 16.26.37.
                                                                                  C**** SUN:OUTINE FOR MALTIP-LCATION-2
SUN-COLINIE MATTH(M,N)
COMMONIZARA/AM(AU,00),9(60,00)/0Ks/YM(96,00),0(00),RS(60),F(60),
FT(30)
30 530 1=1,N
U(1)=2,0
90 350 K=1,N
30 0(1)=0(1)+0(K,I)*FT(K)
RETURN
LNO
         5
     10
```

CDC 6600 FTN V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 18.26.37.

```
C*** SU3:OUTLINE OF OUTPUT ****
SU3:OUTLINE OF OUTPUT ****
SU3:OUTLINE OUTPUT
DISCISION ALP(6)
COMMON/SKI/MPDI/I, RELEHT, HUNIT, NPART, IJIKU, NPPO/BKZ/E, ANU,
THISKOM INKS/ING(300, 35), XX(400), YY(400), TP(400)/BK5/UV(600),
FF(300)/SKJ/MPDI/I, RELEHT, HUNIT, NPART, IJIKU, NPPO/BK2/E, ANU,
THISK(400)/SKJ/MPX(10000, 35), XX(400), YY(400), TP(400)/BK5/UV(600),
FF(300)/SKJ/MPX(10000, 35), XX(400), YY(400), SIGX(600),
JSTANG(400), SCIO (400), ZARZ(1920)
JSTANG(400), SCIO (400), ZARZ(1920)
JSTANG(400), SCIO (400), ZARZ(1920)
JSTANG(400), ZARZ(1920), ZARZ(1
             زو
19
15
20
St.
   30
35
40
                                                                                                                                                         50
```

COC 6600 FTH V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 18.26.37.

```
£.
10
15
26
25
30
35
  40
45
50
35
```

```
C**** INPUT AND OUTPUT OF DATA
SURROUTINE DI PPUT
DI4-18-10-1 INI-10-1 (10.1(10.1-10.1(2).0V0(16)
G04.104/8K.7/PD141, SEE_511, HURIT, HPART, LJKU, HPPO
1/5K2/K_SHU, HICK (100.1/6X3/10.1(00.1).
1XK-0.00), YY(-0.0), TP(-0.0)/UK-7/NF0, HUVI, NF(10.0), HFK(15.0),
1XK (0.0), KY(-0.0), TP(-0.0)/UK-7/NF0, HUVI, NF(10.0), HFK(15.0),
1XK (0.0), KY(-0.0), TP(-0.0)/UK-7/NF0, HUVI, NF(10.0), HFK(15.0),
C****
                           5
                                                                                         1XX(900), YY (400), TP (400)) ZWK-ZPF0, HUV1, NF (100), HFK(150),

1 KK (00), NKHO(600) ZWK-ZPV(COU), FF (800) ZWKLD/ALFAN

PEAD(2,101) HODINT, MELENT, HUMIT

READ(2,102); SARU, SATTH

READ(2,102) (XX(1), YY(1), 1=1, NFCHT)

102 FORMAT(2F10-3)

103 FORMAT(2F10-3)

104 FOR MAT (410-3)

105 FOR MAT (410-3)

106 FOR MAT (410-3)

107 FOR MAT (410-3)

108 FOR MAT (410-3)

109 FOR MAT (410-3)

109 FOR MAT (410-3)

100 TIL = 1, HALE FUT

111 CONTINUE

WESTER (3, 121) HODINT, HILLENT, HUMIT

HOLT (3, 122)

HOSTER (3, 121) HODINT, HILLENT, HUMIT

HOLT (3, 122) (XX, XX(XX), YY(KX), XKE1, NFOLHT)

122 FORMAT (410, ZM, 100-XM, 100-XM,
                    10
                      26
                    25
                      36
                        40
                                                                                                  45
                        55
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   CDC 6600 FTH V3.0-P328 OPT=1 03/16/74 18.26.37.
                                    SUBSCULINE SIMPUT
                                                                                                              121
                                                                                           125
                 130
                 149
               145
                 150
155
               160
               165
```

SUBROUTINE DINPUT

```
HRITE(3,050) J,K

| 050 F03(AT(1H ,215)
| HF(K1)=27JK-2
| HRITE(3,050) K1,HF(K1)
| 143 50011102
| HRITE(3,105) (HV1)
| HRITE(3,105) (HV1)
| HRITE(3,105) (HV1)
| HRITE(3,105) (HV1)
                                                                                       | 143 | SEVII | 1885 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 1887 | 
    εū
    65
      75
      80
      65
      96
      95
                                                                                                                             HRITE(3,171) HUV2

IF(NUV2,EQ.6) 60 TO 175

UNITE(3,172)

171 FOCHAT (1H0), SHHF/UV/).

HIS-0

J=0
  105
110
                                                                                                                           CDC 6600 FTH V3.0-P326 QPT=1 03/16/74 18.26.37.
                             SUSROUTINE DINPUT
  170
    173
      189
      165
      190
        195
        250
```

COC 6600 FTH V3.0-P326 OPT=1 03/15/74 18.25.37.