船舶技術研究所報告　第14巻　第5号　資料（昭和52年9月）

プロペラ理論と揚力面理論

花　岡　達　郎*

Propeller Theory and Numerical Lifting-Surface Theory

By
Tatsuro HANAOKA

In the present paper applications of numerical lifting-surface theory to marine propeller problems are reviewed. The first part is a summary report of propeller-lifting-surface theory and the second is a report on the status of recent lifting-surface theory in the aerodynamics.

内　容

ま　え　が　き

最近の航空力学研究を見ると揚力面理論そのものの研究は既に終ったという印象を受ける。つまり航空技術の分野では揚力面理論の実用化に殆んど成功したということであろうか。

揚力面理論は飛行機翼にかかる荷重分布の計算法の理論である。流体力学的に見ると，舶用プロペラの翼は飛行機翼と同等なものであるから，揚力面理論には舶用プロペラ理論に転用できる部分が多く含まれている。折角完成された技術があるのだから利用しないのはつまらない。ただプロペラ翼と飛行機翼とではその置かれる環境条件が全く同じというものではないから，理論の運用には注意を要する箇所が幾つかある。

本文はプロペラ理論の概要と最近の揚力面理論の要点を記載したものである。まずプロペラ翼が飛行機翼と際立って異なるところから述べ始め，第2章ではプロペラ理論の形式が揚力面理論と同形になるように記述してある。第3章は最近の揚力面理論の概略の紹介である。 mode function 法は既にプロペラ理論にかなり利用されているので問題点に触れるだけ，あとの大部分は揚力分布密度注）を離散的関数で表わして計算する doublet-lattice 法，finite panel 法，非線型理論に関することである。doublet-lattice 法，finite panel 法，potential flow 法等は互いに関連するところが多いので，一括して discrete function 法と

*運動性能部　原稿受付：昭和52年1月26日

注）かつて近藤一夫教授は揚力面理論の記述に当って揚力線理論の揚力分布の中身という意味で圧力飛躍（pressure jump）にこの名称を用いられたが，定着したわけではなく，むしろながが過ぎて使いにくい。現在の揚力面理論でも定まった邦訳名はないが，「揚力分布」では揚力線のものと混同されそうである。「圧力差」又は「荷重」ではどうだろうか。前者は物理的，後者は工学的な意味で，航空力学でもこの二様の使い方がされている。揚力面を渦理論で書くときは循環分布密度とせずに「循環」又は「循環密度」だけで不都合は生じないと思う。

呼ぶのがよいだろう。

揚力面理論の利用に当って最も注意しなければならないのは，mode function 法では数値積分における妥当な分割数，discrete function 法では妥当な網目数の選定で，それらと解の収束に関する概略は文献1)に述べてある。

1. 船用プロペラ揚力面の特徴

船用プロペラでは一般に流体の圧縮性を考えなくてすむので，飛行機翼の場合より単純に見えるが，工学的応用面でもっと厳密なことが問題とされるので，計算はむつかしいことになる。以下に船用プロペラ揚力面と飛行機翼のそれとの相違点を列記してみる。

1) 飛行機翼が直進運動をするのに対し，プロペラ翼は螺旋運動をするので，積分方程式の核関数はかなり複雑になる。しかし微小部分で見れば，いずれも揚力要素の集まりであるから，核関数の特異性はほぼ同じ形，解の特徴（前縁で無限大になる等）も同じ筈，したがって圧力差の mode function は同じものを用いてよい。

2) 飛行機翼には舵フラップなどが付いていて矢高線の形が一般に複雑になるが，船用プロペラの矢高線は放物線形に近い単純なものである。したがって後者では翼弦方向の吹上げ標点（境界条件を与える点）の数は少くてすまされる。

3) 飛行機翼と船用プロペラの翼端平面形を比較すると前者が梯形，後者では一般に円形である。この二つは翼端特異性に著しい違いがある。

4) 工学の目的に対しては，飛行機では圧力差分布，誘導抵抗分布が求められればすむが，船用プロペラでは更に圧力分布，特に前縁，翼端近傍のそれが必要である。それにはそこでの圧力差を正確に求めなければならないのであるが，ここが現在の揚力面理論の最もむつかしいところとなっている[1]。

5) プロペラの誘導速度は直進翼よりもかなり強いので，それによる自由渦変形の効果を計算に入れる必要がある。つまり非線型の計算を行わなければならない。

このほか船用プロペラでは，中心部翼端がボスにつながるという特徴があるが，ここは飛行機翼の胴体つけ根又はエンジン取付部と同じ取扱いをすればすまされる。むしろこうする方が翼端の難問[1] から解放されるので具合がよい。

2. プロペラ揚力面

2.1 一般のプロペラ理論

プロペラ理論といっても，均一流中のもの，不均一流中のもの，ノヅルプロペラ等様々であるが，最も一般性のある不均一流中のプロペラを取上げる。ここでいう不均一流は船体のようにプロペラ以外のものによる撹乱に基づくもののことで，プロペラノヅル等の付加物も撹乱源の一つと考えてよい。不均一流はプロペラに対し，定常的と非定常的に流入するものに分け，前者を定常プロペラ理論により，又後者は流場が調和振動をしているとする非定常プロペラ理論の積み重ねで解を得るようにする。

非定常プロペラ理論の概要は次の通りである。流場の振動率を ν，速度ポテンシャルを $\Phi_0 e^{i\nu t}$ の実数部で表わすことにする。プロペラ翼面およびその後流渦面は渦で覆われているので，速度ポテンシャルはここに不連続面をもつことになる。したがってその速度ポテンシャルは Lamb の参考書[2] にあるように，

$$\Phi_0(x,\ r,\ \theta)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S+\overline{W}}(\Phi_u-\Phi_l)\frac{\partial}{\partial n'}\ \frac{1}{R}dS \tag{2.1.1}$$

の形となる。ただし S は翼面，$\overline{W}$ は後流渦面，Φ_u，Φ_l はそれぞれ渦面の上側および下側における Φ_0，n' は渦面の上側における外向法線，R は点 $(x,\ r,\ \theta)$ と点 $(x',\ r',\ \theta')$ の距離である。以下では上下面のポテンシャル差を $\Phi_u-\Phi_l\equiv\Delta\Phi_0$ と書く。

プロペラは翼数 l の軸対称とし，x 軸の負の向きに角速度Ωで回転しているものとする。又プロペラ回転面における不均一流の軸方向成分 v_a および接線方

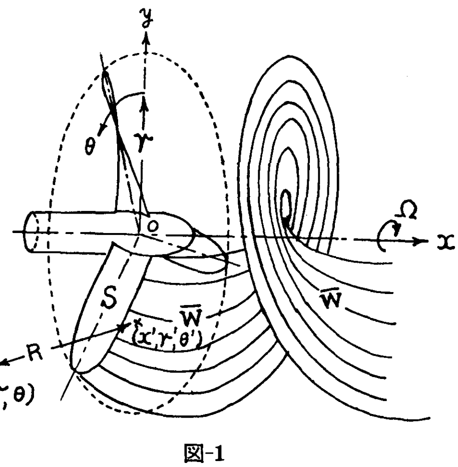

図-1

向成分 v_t が与えられている場合，それを調和分析して

$$\left.\begin{aligned} v_a&=Re\sum_{p=1}^{\infty}\{iC_p(r)+d_p(r)\}e^{-ip\theta} \\ v_t&=Re\sum_{p=1}^{\infty}\{ie_p(r)+f_p(r)\}e^{-ip\theta} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.2)$$

のように表わす。これを角速度Ωで回転しているプロペラから見るときは，θ の代りに $\theta-\Omega t$ で置き変えればよい。そうすると v_a，v_t の各周波数成分はプロペラ翼に対して振動率 $p\Omega$ で振動していることになる。それの周期 $2\pi/(p\Omega)$ に対するプロペラの回転周期 $2\pi/\Omega$ の比率は整数 p である。即ち各翼に対する流入速度はプロペラの一回転の間にp回変動し，したがって位相は $2p\pi$ 進む。又どの翼も回転中不均一流に対し，ある定まった位置にくると，周囲の流れは同じ，したがって各翼面上の特異点分布は位相がずれているだけで，全く相似になる。その位相のずれは，1回転で $2p\pi$ であるから，各翼間では $2p\pi/l$ ということになる。よって (2.1.1) は

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0(x,\ r,\ \theta)&=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l} \\ &\iint_{S'+\overline{W'}}\Delta\Phi_0(x',\ r',\ \theta') \\ &\frac{\partial}{\partial n'}\ \frac{1}{R}dS \\ R&=\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'^* \\ &\quad {}^*\cos(\theta-\theta'-2m\pi/l)} \end{aligned}\right\} \quad (2.1.3)$$

のように表わされる。この式のS'，$\overline{W'}$ は一翼だけの翼面および後流渦面を意味する。即ち流場全体を求めるのに一つの翼についての計算だけですまされるわけで，この簡潔さが人々の心を捉えたということであろうか。この理論の実用計算の研究は目下発展途上にある。

次に定常プロペラであるが，その速度ポテンシャル Φ は

$$\Phi(x,\ r,\ \theta)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\iint_{S'+\overline{W'}}\Delta\Phi(x',\ r',\ \theta')\frac{\partial}{\partial n'}\ \frac{1}{R}dS \quad (2.1.4)$$

のように表わすことができる。これは (2.1.3) とほぼ同形であるが，各翼の特異点分布に位相差が無く，又 $\Delta\Phi$ は実数である。

現実の流れでは非定常と定常の流場は重なったもので，後流渦は同じ螺旋面上にあり，次の境界条件を満足する。

1) 翼面上では流れは翼面に沿って流れる。

2) 後流渦面上では渦糸に対する法線流速は0である。

これは3.5節の厳密な記述を具体的に要約したものである。もし0でないと，渦糸に Kutta-Joukowski の揚力が働くので，それが無くなる位置まで渦糸は移動する。したがって，はじめ翼の運動軌跡上に置き去られた後流渦は2）の条件を満たすまで変形を受ける。それを計算に取入れるのが非線型翼理論である。既に1章で述べたように航空力学の揚力面理論は殆んど2）を考慮しない線型理論ですまされるのに対し，船用プロペラの流場は後流渦が稠密な螺旋面に分布するので誘導速度が大きく，線型理論のままでは殆んど実用にならない。そのため航空力学の揚力面理論をプロペラ理論に利用するにはその点の工夫が大切である。普通，後流渦面の形状は時間的に変動しないとして計算する。こうすると取扱いはかなり簡単で，非定常流場の誘導速度は周期的であるから，後流渦面変形には無関係，後流渦面の形状は定常流場の計算だけですまされることになる。

2.2 定ピッチ非線型理論

前節の2）の境界条件を満足させる計算を行うのは並大抵でないということから考えられたのが本節に述べる定ピッチ非線型理論である。[3),4)] この方法は線型理論に近い計算で，かなりよい結果が得られる。

2.2.1 定常プロペラ

定ピッチ非線型理論では，後流渦面の変形に寄与する誘導速度は軸方向および回転方向流速のみとし，半径方向のものは省略する。しかも前二者は半径方向および x 軸方向に一定と仮定する。いまそれを $\overline{w_a}$，$\overline{w_t/r}$，又プロペラ回転面への軸方向平均流入速度を V の記号で表わし

$$h=\frac{V+\overline{w_a}}{\Omega+\overline{w_t/r}}\quad \text{または}\quad h=\overline{r\tan(\varepsilon+\alpha_i)} \quad (2.2.1)$$

と書いて，$2\pi h$ を後流渦の螺旋のピッチにとると，2）の境界条件はプロペラの近傍で概略満たされる。この単純な非線型理論は表―1のように記号の意味を多少変えるだけで，全体の表示式は線型理論そのままの形となるので，実用上大変具合がよい。

(2.1.4) の変数を

$$\left.\begin{aligned} &\mu=r/h,\ \ \mu'=r'/h,\ \ \sigma=\theta-x/h, \\ &\sigma'=\theta'-x'/h,\ \tau=\theta+x/h,\ \tau'=\theta'+x'/h \end{aligned}\right\} \quad (2.2.2)$$

表—1

	線　型　理　論	非　線　型　理　論
翼素への流入速度	$W=\sqrt{V^2+\Omega^2r^2}$	$W^*=\sqrt{(V+\overline{w_a})^2+r^2(\Omega+\overline{w_t/r})^2}$
法　線　微　分	$\frac{\partial}{\partial n}=-\cos\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon\frac{\partial}{r\partial\theta}$	$\frac{\partial}{\partial n_I}=-\cos\varepsilon_I\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon_I\frac{\partial}{r\partial\theta}$
ピ　ッ　チ　角	$\frac{h}{r}=\tan\varepsilon=\frac{V}{\Omega r}$	$\frac{h}{r}=\tan\varepsilon_I=\frac{V+\overline{w_a}}{r(\Omega+\overline{w_t/r})}$
圧　力　差	$\Pi=\rho W\gamma$	$\rho W^*\gamma$

と置き換え，少し運算を行って整理すると注)

$$\Phi(\tau,\ \sigma,\ \mu)=\frac{1}{2(\Omega+\overline{w_t/r})}\int_{-\infty}^{\tau}\phi^*(T,\ \sigma,\ \mu)dT \tag{2.2.3}$$

$$\phi^*(\tau,\ \sigma,\ \mu)=\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{m=0}^{l-1}\iint_S \Delta p(r',\ s')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS \tag{2.2.4}$$

と書かれる。ただし Δp は揚力面の上下面の圧力差である。Δp と $\Delta\Phi$ の関係は

$$\Delta\Phi=\int_{s_1}^{s}\frac{\Delta p}{\rho W^*}ds \tag{2.2.5}$$

で，これは Bernoulli の定理から導くことができる。ただし s はプロペラ翼面および後流渦の分布する螺旋にそって測った長さ，s_1 はそれの翼前縁位置を表わす。又 W^* の意味は表—1および図—2に示す。

(2.2.4) は翼面の位置に複源を分布させたポテンシャルを表わしている。それに (2.2.3) の演算を行うと速度ポテンシャルが得られる。ここの運算は線型理論と全く同じである。τ, σ, μ の変数を用いると

$$\left.\begin{aligned}
&R=h\sqrt{(\tau-\tau'-\sigma+\sigma')^2/4+\mu^2+\mu'^2 -2\mu\mu'\cos\{(\tau-\tau'+\sigma-\sigma'-4m\pi/l)/2\}}\\
&\frac{\partial}{\partial n'}=\frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\right\}\\
&ds=h\sqrt{1+\mu^2}\,d\tau/2
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.6}$$

のように表わされるから，(2.2.3)，(2.2.4) の演算にはこれを利用するとよい。

螺旋渦のピッチを定める $\overline{w_a}$, $\overline{w_t/r}$ としてはプロペラを揚力線とみなしたときの翼面上における軸方向および回転方向誘導速度の半径方向平均値を用いると結果はよいようである。この場合は (2.2.3) を

$$\left.\begin{aligned}
w_a&=-w_I\cos\varepsilon_I=\partial\Phi/\partial x|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}},\\
w_t&=w_I\sin\varepsilon_I=\partial\Phi/(r\partial\theta)|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}}
\end{aligned}\right. \tag{2.2.7}$$

に代入して得られる式により w_a と w_t/r を求め，それの半径方向平均値を計算すると，$\overline{w_a}$, $\overline{w_t/r}$ が得られる。実際の計算では $h=V/\Omega$ を第1近似として逐次近似計算を行う。

翼面上の境界条件は次のようになる。プロペラの半径 r の位置の翼素の平均矢高面の x 座標が θ の関数として

$$x=f(\theta,\ r) \tag{2.2.8}$$

で与えられているものとすると，流体がこの面に沿って流れるためには

$$\frac{\partial f}{r\partial\theta}=\left[\frac{V+\partial\Phi/\partial x}{\Omega r+\partial\Phi/(r\partial\theta)}\right]_{\sigma=\sigma'} \tag{2.2.9}$$

でなければならない。

$$\partial f/(r\partial\theta)=\tan\varepsilon_0 \tag{2.2.10}$$

であるから (図—2参照)，n_0 を平均矢高面への法線とすると

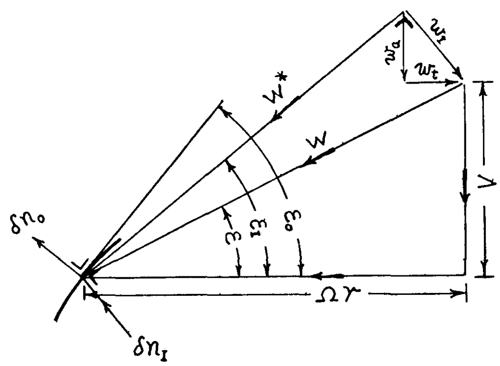

図-2

注) ここは文献3)，p. 14 に示す運算を逆にたどればわかる。

$$\frac{\partial}{\partial n_0}=-\cos\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon_0\frac{\partial}{r\partial\theta}$$
$$=-\cos\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial f}{r\partial\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}\right)\qquad(2.2.11)$$

である。(2.2.11) を (2.2.9) に適用すると

$$\Omega r\frac{\partial f}{r\partial\theta}-V=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial f}{r\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\right]_{\sigma=\sigma'}$$
$$=-\frac{1}{\cos\varepsilon_0}\frac{\partial\Phi}{\partial n_0}\bigg|_{\sigma=\sigma'}$$

となる。この式の両辺に $\cos\varepsilon_0/W$ を乗じ

$$\sin\varepsilon=V/W,\ \cos\varepsilon=\Omega r/W\qquad(2.2.12)$$

の関係を用いると

$$\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)=-\frac{1}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial n_0}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\qquad(2.2.13)$$

が得られる。守屋の定理[4] によると，翼面上では w_I は W^* に直交するので（図—2参照），$W\fallingdotseq W^*$, $\partial\Phi/\partial n_0\fallingdotseq\partial\Phi/\partial n_I$ としてもそれによる誤差は $\varepsilon_0-\varepsilon$ の2次以下の微小量，即ち揚力面理論の誤差範囲内にある。よって境界条件式は，線型理論と同形の式

$$\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)=-\frac{1}{W^*}\frac{\partial\Phi}{\partial n_I}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\qquad(2.2.14)$$

によって与えることができる。

(2.2.14) はプロペラ翼の形状および作動状態と翼面上の圧力差 Δp を結ぶ関係式である。Δp を与えて翼形状を求めたいときは，単に積分を行うだけで翼形状 ε_0 が得られる（設計理論)。それとは逆に ε_0 を与えて Δp を求めるのは積分記号内の未知関数を求めることであるから，揚力面理論と同じ積分方程式の問題となる（性能計算)。

2.2.2 非定常プロペラ

非定常プロペラの渦理論はむつかしいし，又記述が長くなるので，詳しくは文献5）を参照されたい。

ここでは以下の解説に必要な結果だけの記載に止めておく。

γ^*, γ_f をそれぞれ束縛渦および自由渦の循環密度とすると，Prandtl の渦保存則[6] は

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}+\frac{\partial\gamma_f}{\partial t}+W^*\frac{\partial\gamma_f}{\partial s}=0\qquad(2.2.15)$$

である。線型理論では s はプロペラ翼の軌跡螺旋に沿って測った長さであるが，非線型理論では後流渦の螺旋に沿って測った長さとする。こうすると或る瞬間に束縛渦の変化分として軌跡上に置き去られた自由渦が誘導速度で移動させられた効果が考慮されたことになる。

後流渦が定ピッチの螺旋面状であると仮定し，又その循環分布が (2.2.15) に従うものとすると

$$\Phi_0(\tau,\ \sigma,\ \mu)=\frac{1}{2(\Omega+\overline{w_t/r})}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-ip/2(\tau-T)}\phi^*(T,\ \sigma,\ \mu)dT\qquad(2.2.16)$$

$$\phi_0^*=\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\iint_{S'}\Delta p_0(r',\ s')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)dS\qquad(2.2.17)$$

のように表わされる。ただし束縛渦の循環分布および揚力面上の圧力差の complex amplitude をそれぞれ γ_0, Δp_0 で表わすと

$$\Delta p_0=\rho W^*\gamma_0^*\qquad(2.2.18)$$

の関係がある。

(2.2.16), (2.2.17) は定常プロペラの (2.2.3), (2.2.4) に対応する式である。航空力学の揚力面理論でも速度ポテンシャルはこの形で表わされ，(2.2.16) の T の積分が x 軸上の積分となる点が異なるだけである。

翼面の境界条件は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_I}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=-v_a\cos\varepsilon_I+v_t\sin\varepsilon_I\ (2.2.19)$$

であるが，v_a, v_t に (2.1.2) の各周波数成分を，又左辺の Φ には $\Phi_0e^{i\nu t}$ を用いると，各周波数に対する積分方程式が得られる。それの解を求め，それらを加え合せて伴流中の解を得るようにする。

定常的誘導速度の回転方向成分を考えに入れるか否かで p と流場の振動率との関係に対する考え方に多少の違いが出て来る。線型理論にならって $\nu=p\Omega$ とするとわかりやすいが，筆者は定ピッチ非線型理論で

$$\nu=p(\Omega+\overline{w_t/r})\qquad(2.2.20)$$

とした。[5] 定常プロペラの流場と重ねたときの食い違いを無くすための措置である。これは要するにプロペラ近傍で伴流の流場全体がプロペラの定常誘導速度により角速度 $\overline{w_t/r}$ で剛体のようにまわされているとみなすわけである。振動率に多少の違いはあるが，積分方程式では

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n_I}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\{-(ic_p+d_p)\cos\varepsilon_I+(ie_p+f_p)\sin\varepsilon_I\}e^{-ip\tau/2}\qquad(2.2.21)$$

のように p をパラメターとするだけで，振動率は表面に現われない。

以上が非定常プロペラ揚力面理論の概要である。基礎的なところは航空力学の揚力面理論と同じであるから，その分野で完成された研究の多くはプロペラ理論

にそのまま利用することができる。

3. 揚力面理論

最近の揚力面理論は翼，胴体を一体とした航空機全体の表面圧力を計算することの実用化の方向に進んでいる。この理論は有限要素法と呼ばれ，翼，胴体を次に示す種類の有限個の離散的要素で表現するわけであるが，特に新しい手法ではなく，

胴体のふくらみ	吹出しの線又は面分布
胴体の揚力	複源の線又は面分布
翼の厚さ	吹出しの面分布
翼の揚力	圧力差の面分布
翼胴体干渉項	圧力差の面分布

というように，揚力面理論がその中心になっている。[7],[8] ただしこの中の吹出し，複源とあるのは速度場に関するものを意味するが，いずれにせよこれは表現法の一例で，これが最良というわけではない。

揚力面の計算には mode function 法，doublet-lattice 法，finite panel 法等の解法があるが，いずれも collocation 法である。その中で圧力差を discrete なものの集団として与える後の二つの方法（discrete function 法）が特に発展し，その内容にも種々異なる手法が考案されている。この外 Galerkin 法によったものもあるが，[9],[10]計算が繁雑で又精度もよくないとのことであまり流行しない。以下にmode function 法，discrete function 法および非線型理論の要点を簡単に紹介する。

3.1 mode function 法の問題点[1]

この巧妙な方法は Multhopp[11] および Truckenbrodt[12] の発案によるもので，一時はかなり普及したが，最近はややその魅力を失いかけている。その理由は核関数の対数特異性に災いされて，精度に限界のあることが知られて来たためである。改良案は出されているが，方法が繁雑なため，最近では discrete function 法に押され気味である。ともあれ mode function 法は経済性に優れているので，欠陥を除く工夫さえよければ，充分な実用性を発揮する。

まずこの方法の概要を非圧縮流体中の定常直進翼を例にとり Multhopp の流儀で書いてみる。「Multhopp 理論は揚力線理論の土台の上にある」ということを頭に置いてながめると，この中に含まれる諸々の問題が理解しやすくなる。平面直進揚力面の吹上げ $-w$ は

$$-w(x,\ y)=\frac{1}{V}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z'}$$
$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\int_{l_1'}^{l_2'}\frac{\gamma(x',\ y')}{(y-y')^2}\left\{1+\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\right\}dx'dy' \qquad (3.1.1)$$

で与えられる。ただし翼は x 軸の負の方向に速度 V で進むものとする。γ は揚力面の圧力差の無次元化されたもので，$\gamma=\Delta p/(\rho V^2)$ を意味する。翼の姿勢，運動状態を与えると，境界条件より w が定まるので，(3.1.1) を γ の積分方程式とみなして解けば圧力差が求められる。

半翼弦長 c と半翼幅 b で無次元化した座標 $\xi=(x-x_0)/c$ (x_0 は翼弦中点の座標) と $\eta=y/b$ によって γ を

$$\gamma(\xi,\ \eta)=a_0(\eta)\lambda_0(\xi)+a_1(\eta)\lambda_1(\xi)+a_2(\eta)\lambda_2(\xi)+\cdots\cdots \qquad (3.1.2)$$

$$\lambda_0(\xi)=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\ \lambda_n(\xi)=\xi^{n-1}\sqrt{1-\xi^2}\qquad (1\leqq n\leqq N-1) \qquad (3.1.3)$$

のように表わす。これらの基底関数 $a_n(\eta)$，$\lambda_n(\xi)$ を mode function 又は loading function という。(3.1.3) は2次元薄翼の解で，Birnbaum 関数列という。

(3.1.1) で変数を $X=(x-l_1')/(2c')$，$X'=(x'-l_1')/(2c')$，$Y_1=|y-y'|/(2c')$ によって X，Y_1 に変える。X' と ξ' の関係は $\xi'=2X'-1$ である。いま

$$i_n(\xi,\ \eta\ ;\ \eta')\equiv i_n(X,\ Y_1)=\int_0^1\lambda_n(\xi')\left\{1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y_1^2}}\right\}dX' \qquad (3.1.4)$$

と書くと，(3.1.1) は

$$-w(\xi,\ \eta)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}H\int_{-1}^{1}\frac{c'a_n(\eta')i_n(\xi,\ \eta\ ;\ \eta')}{b(\eta-\eta')^2}d\eta' \qquad (3.1.5)$$

のように表わされ，ξ は i_n の中だけに含まれることになる。つまり揚力線に対する揚力面の違いは，核関数に翼弦方向影響関数が余分にあるというわけで，i_n を influence function という。又 $H\int d\eta'$ の記号は Hadmard の意味の発散積分の有限部分を表わす。変数 η' を $\eta'=\cos\varphi'$ によって φ' に変え，$c'a_n(\eta')/b$

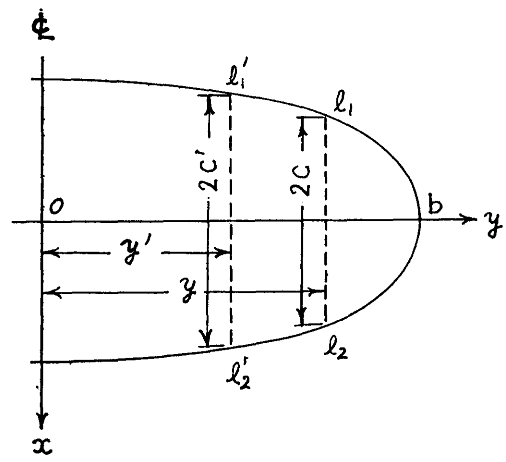

図-3

を内挿式

$$f(\varphi')=\frac{2}{m+1}\sum_{-(m-1)/2}^{(m-1)/2}f(\varphi_k)\sum_{\lambda=1}^{m}\sin\lambda\varphi_k\sin\lambda\varphi' \tag{3.1.6}$$

で置きかえて積分を数値的に行う。その数値積分法はいろいろ考えられるが，NPL法[13]，NLR法[14]等では計算精度の検定がよくなされている。

積分方程式（3.1.5）の核関数は $\eta-\eta'=0$ の近傍で

$$\frac{c(\eta')i_n(\xi,\ \eta\ ;\ \eta')}{b(\eta-\eta')^2}=\frac{c(\eta')i_n(X,\ 0)}{b(\eta-\eta')^2}-\frac{d\lambda_n}{dX}\ \frac{b}{4c}l_n|\eta-\eta'|+\cdots \tag{3.1.7}$$

のように展開される。即ち核関数は $\eta=\eta'$ に2位の極だけでなく，揚力面特有のものとして対数特異性が現われる。この特異性を含む関数を精度よく積分する方法がいろいろと工夫されている。特に対数特異性だけを抜き出して別に計算する方法[15]を対数補正というが，（3.1.7）に示すように，対数特異性の係数は前後縁で無限大，円形翼では更にそれに $1/c$ がかかるので，翼端近傍では特に補正の効果がうすれ，精密解が得られない。これが mode function 法の難点である。

プロペラの場合の積分方程式は（2.2.14）である。（3.1.1）の変数 x, y が τ, r に変り，核関数は複雑な形となる。しかし物理的には同じ揚力面であるから，$\tau=\tau'$, $r=r'$ の近傍は（3.1.1）の $x=x'$, $y=y'$ の近傍に漸近するわけで，自由渦が螺旋であるために加わる核関数の対数特異性のほかは mode function も mode function 法としての核関数の特異性も共に同じ形，解法としては本質的に異なるものを考える必要はない。舶用プロペラでは耐キャビテーションの関係から翼周縁の圧力は特に正確に知り度い。mode function 法はそこに弱点があるので，それを除かないことには実用には向かない。対数特異性が翼前縁で消失することを利用し，そこに吹上げ標点をとる計算法が工夫され，[16]よい結果を得ている。翼端についても同様にできれば，[17]この方法の実用性は一応確保できる。

対数特異性の難点を避ける別の方法が提案されている。[18]それは翼幅方向の積分を先に行うもので，こうすると（3.1.5）に相当する式で influence function の形が変り，η' の積分が ξ' の積分となる。この場合にも核関数に対数特異性が含まれるが，その係数に特異性がないので，Multhopp 法に見られるような不都合は生じない。つまり欠陥の現われ方は積分の順序にかかわるということである。ただこの方法の難点は翼平面形に制限があることと，翼の一部にフラップが付いている場合の計算が出来ないことで，現実問題には利用されていない。次節以下に示す discrete function 法の核心が積分順序の制約を受けない点にあることは知っておく必要がある。

3.2 doublet-lattice 法

この方法の源は Falkner[19] の vortex-lattice 法にあると見られるが，現在では考え方も計算法も殆んど違ったものになっている。その頃は少ない格子数で精度を上げる為，各渦の強さにそれぞれ異なる値の weight をかけていたものである。この weight は mode function から導いたものであるから，mode function 法の一種とも考えられる。現在の doublet-lattice 法は翼平面形の縁や角における mode function の制約から逃れることが一つのねらいであるから，離散的ということが一層徹底し，網目は細かくなっている。定常翼では vortex-lattice のモデルを作るのは容易である。まず翼面を細長の翼素に分割する。そして各翼素の翼弦をN等分し，各面素の1/4弦長上に渦を置き，3/4弦長上翼素幅の中点を吹上げ標点とする。つまり揚力面を馬蹄形渦群で置き変えるわけである。

最近は非平面の翼や，周縁形の複雑なものも取扱うので，特に非定常翼の場合，渦モデルの表現が込み入って来る。それで翼を加速度場の doublet-lattice で表

わし，それを速度場に変換する。この方法は吹上げの演算が機械的に行えるので具合がよい。[20] doublet-lattice の名称の由来はここにあるわけで，現在ではかつての vortex-lattice 法に代る方法として普及しているが，非線型の計算には向かない。

振動率 ν で調和振動をする直進翼の速度ポテンシャルの complex amplitude は加速度ポテンシャルの積分変換

$$\Phi_0(x,\ y,\ z)=\frac{1}{V}\int_{-\infty}^{x}e^{-(x-X)i\nu/V}\phi_0(X,\ y,\ z)dX \qquad (3.2.1)$$

で与えられ，この加速度ポテンシャルは揚力面上の複源分布として

$$\phi_0(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\rho}\iint\Delta p_0\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}dS \quad (3.2.2)$$

のように表わされる。この複源の面分布の代りに図―4のように揚力面を梯形網目に分割し，各格子の前より1/4弦長線上に複源の線分布を置く。この加速度ポテンシャルに（3.2.1）の演算を行えば，速度ポテンシャルが得られる。揚力面上の吹上げ $\partial\Phi_0/\partial z|_{z=z'}=-w_0(x,\ y)$ は境界条件により定まるが，これは各格子の3/4弦長線の中点で与えるようにする。

（3.2.2）を参照すると，長さ l，強さ f の複源に働く揚力が ρfl となることは容易にわかる。したがってそれの面積平均である圧力差は

$$\Delta p=\frac{\rho fl}{l\Delta x\cos\lambda}=\frac{\rho f}{\Delta x\cos\lambda}$$

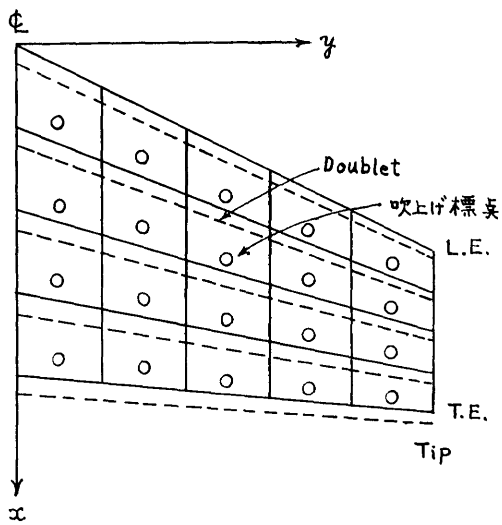

図-4 梯 形 格 子

で与えられることになる。ただし Δx は一格子の平均弦長，λ は複源の sweep angle である。

いま後縁より格子の1/4弦長後方の線上に零複源を想定すると，図―4に見られるように複源格子は揚力面の平面形に対し格子の1/4弦長分後方にずれた形，境界条件は複源格子の中央で与えていることになる。つまり見方を変えれば，doublet-lattice 法は揚力面を梯形 panel に分割し，各 panel の前後縁に複源を分布させたもので，Kutta の流出条件は最後端の複源を0とすることで導入していることになる。

mode function 法では縦横比が小さくなるに従って収束解が得難くなるのに対し，doublet-lattice 法では翼平面形に関係なく，格子数を増すと解は収束に向うことが知られている。[21),22)] ただ必要標点数は相当なもので，Wagner 法[16)]の80標点数の精度と同等の結果を得るにはその5倍の標点数が必要であるといわれる。これは圧力差分布全般に対する平均的評価であって，前縁近傍に限定するともっと厳しいことになる。De Young[23)] は2次元翼について翼弦を等間隔に分割し，各 panel に1/4～3/4弦長法を適用して精度を検定した。それによると，分割数を15迄増しても，最前端 panel の処で10%程度の誤差は免れない。それでは困るので，分割間隔を変えるなどの工夫がなされているが，[24)] あまり明快な方法は見当らない。このほか doublet-lattice 法には円形翼端で解が定まらないという欠点がある。[25)] ともあれ doublet-lattice 法によれば計算は容易，且つ安定した解が得られる。これが最大の利点である。

プロペラの場合，周縁形状は楕円に近い曲線であるから，梯形格子が特に精度がよいという理由は無い。扇形格子にすれば，半径方向の積分が解析的に行えるという利点がある。こうするとプロペラ理論にとって doublet-lattice 法はプログラム作製が容易な方法ということになる。

3.3 finite panel 法

この方法ははじめ box method といわれたものである。超音速の場合はよいが，亜音速では結果が思わしくないため，[26)]暫く見捨てられていたが，翼，胴体を一体として計算する有限要素法には適しているようで，最近ぼつぼつと計算例を見るようになった。

box method では翼を網目に分割し，境界条件は各網目（これを box という）の中央を吹上げ標点にとる。box の中で圧力差を一定と仮定して核関数の積分を行う。こうして連立一次方程式を作るわけであ

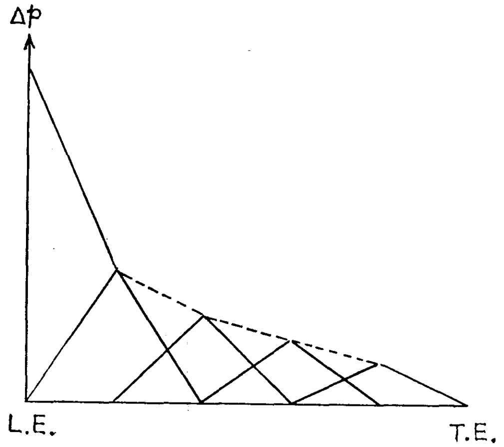

図-5

るが，最近の進んだ計算技術によっても，翼根および翼端ではまるで精度が悪いという。[7]

doublet-lattice 法と box method とでは圧力差はどちらも翼幅方向には一定，違いは翼弦方向分布形にある。前者が一点集中型であるのに対し，後者は一様分布である。この二つの中間をとったのが，Lopez and Shen[27] の finite panel 法である。図—5のように翼弦をN個の panel に分割し，相隣る二つの panel の上に三角状に圧力差を置く。三角形の頂点は二つの panel の境界に一致させ，又二つの panel 内で翼幅方向には一定とする。この分布を panel を一つずつずらせて重ね，更に最前端の panel にだけ，前縁を頂点とする三角形分布を余分に加えると，丁度三角形の頂点を結んだ折線状の分布形になる（これを Elementary Vortex Distribution 略してＥＶＤという)。未知数として頂点の値をとるようにすると，それは panel と同数になる。この分布は Kutta の流出条件を満足しているので，吹上げ標点としては各 panel 内に一点任意のところを選べばよい。その後の Shen 等[28] の論文では前端 panel 内の圧力差を $(\xi/\delta)^{-1/2}-(\xi/\delta)$ のように（δ は panel 長さ）解析解と同じ形にしている。図—6は Shen 等[28] が示した doublet-lattice, box method, EVD の3つの渦分布に対する翼弦方向吹上げ分布の計算例である。前二者が vortex 位置又は panel の継ぎ目で吹上げが無限大になるのに対し，ＥＶＤでは連続に近い一様分布である。これは精度比較の一側面に過ぎないが，それにしても衝撃的表現で，ＥＶＤの優位は疑う余地が無い。

Lopez and Shen の panel 形状はその辺が x 軸，y 軸に平行な矩形であるが，その後の finite panel 法[29] では doublet-lattice 法と同じ梯形の panel を採用し，更に圧力差は翼幅方向に一定でなく，図—7に

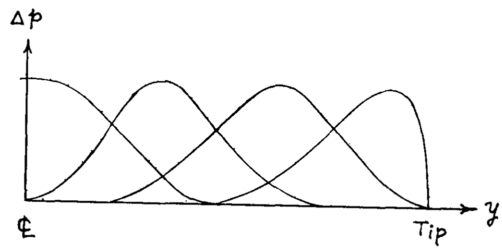

図-7 翼幅方向圧力差分布

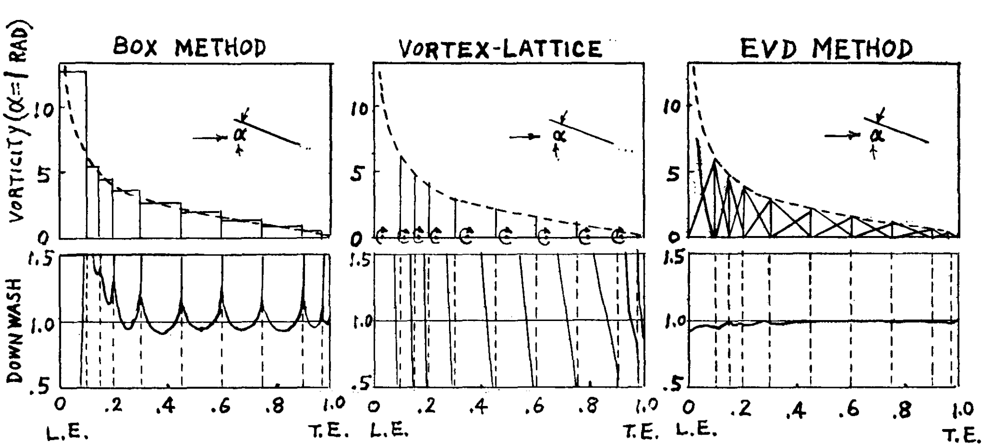

図-6

示すような2次曲線の組合せで表わしている。つまり精度向上のため圧力差分布の関数形を工夫していくと，mode function 法のものに近づくという極めてあたりまえの結果が見られるわけである。これらの方法では吹上げ標点は panel 中央にとっている。

このように計算を複雑にしてまでも離散的分布形をとろうとする目的は，単に mode function 法の対数特異性の難関を避けるためではなく，翼胴体系の干渉項，複雑な形状の翼等の計算に適しているといったところにある。プロペラ理論でボスの影響まで計算してみたいときはこのような方法をとるのもよい。ただプロペラの場合，翼根附近の圧力分布には飛行機の場合程工学的に切実な問題が含まれていないので，そのために利用するとしたら効果は薄いように思う。

3.4 potential flow 法

これは速度ポテンシャルを (2.1.1) のように表わして計算するもので，直進翼のときはその積分方程式は

$$w=-\frac{1}{4\pi}\iint_{S+W}\Delta\Phi\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R}\Big|_{z=0}dx'dy' \tag{3.4.1}$$

である。ただし $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}$，$\Delta\Phi=\Phi_u-\Phi_l$ とする。圧力差は $\Delta p=\rho V\partial/\partial x(\Delta\Phi)$ により計算する。解法の多くは渦面を網目に分割し，box method のように網目内で $\Delta\Phi$ 一定として積分して連立一次方程式を作る。Haviland[30),31)] の例では網目および吹上げ標点のとり方は vortex-lattice 法の 1/4～3/4 弦長法にならって図―7のようにしている。網目内で $\Delta\Phi$ が一定というのはその周辺に渦糸を置いたのと同等であるから，この方法は vortex-lattice 法とほぼ同じ計算をしていることになる。Haviland は後流渦の長さを高々翼弦長の5倍程度とれば揚力傾斜等の誤差は1%以内に収まるというが，Langan and Wang[32)] の比較計算では Haviland の方法はあまりよい結果を与えていない。

この方法の計算を始めて公表したのは W. P. Jones[33),34)]（小縦横比翼の R. T. Jones とは別人）で，大分以前のことになる。mode function 法，vortex-lattice 法の普及に押されて殆んど忘れ去られていたが，最近になって復活した。Stark[35)] のように mode function 法の対数特異性の難点を避ける目的で採用している例もあるが，理由はそればかりではない。

3次元面対称物体まわりのポテンシャル流を物体表面に吹出しを分布させて計算する Hess and Smith[36)] の方法を更に揚力体へ発展させるには，吹出し分布に更に循環を重ねる必要があるが，その一つの計算法として揚力体を吹出しと (3.4.1) の揚力面で表わすことが提案された[37)]（図―9参照）。翼厚を考えに入れたときの翼の速度場は正確には翼表面および後流渦面上に吹出しと複源を置いたもので表わされる（Green の第Ⅲ定理)。それに境界条件を与えると (3.4.1) と類似の積分方程式が得られるが，それをそのまま計算したのでは後縁附近で計算精度が著しく落ちる。図―9のように複源を翼内部に置くとそれが避けられるという。吹上げ標点は翼表面の panel 内にとる。

この方法は非線型理論の第1段階に相当するという意味で重要である。非線型プロペラ理論に利用するとよいだろう。

3.5 非線型理論

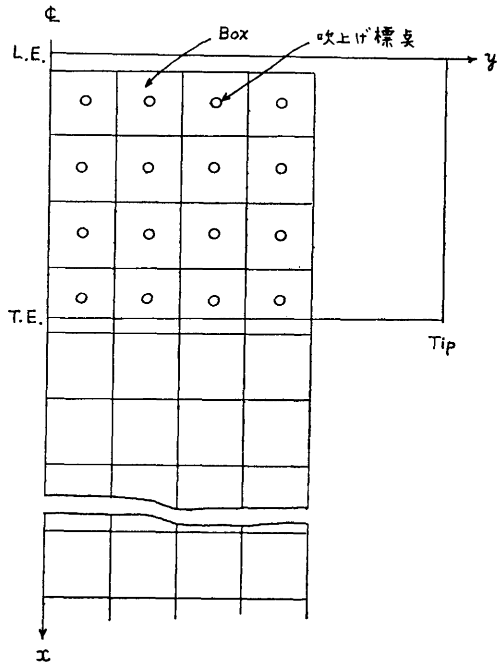

図-8 Potential Flow 法の Box

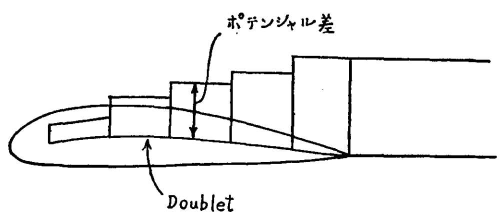

図-9 Rubbert and Saaris の模型

Gersten[38] の非線型翼理論は現在では既に古典に属すると云うべきであろうか。とにかくこの種の非線型理論は無数にある。計算機の発展に伴って単純な流体モデルを作るという考え方から離れて，もっと現実の流体運動に近い流場を計算してみようという考え方が出て来ている。例えば2次元振動翼の Giesing[39] の計算，3次元翼の Djojodihardjo and Widnall[40] の計算等がその例で，渦理論を精密に計算すると実際の流体運動にこれだけ近づくということを具体的に示したものとして重要な意義をもっている。工学的問題にそこまでを必要とするものは少ないとは思うけれども，Gersten の非線型翼理論やプロペラの定ピッチ非線型理論の枠内では解決できない問題もあるわけである。例えばヘリコプタ・ロータのように非線型要素がかなり支配的なものでは古典的方法よりもう少し精密理論に近寄ったものが望ましいとされる。[41] とにかくここでは Djojodihardjo and Widnall の計算法を簡単に紹介しておく。

揚力体の表面を

$$S(\boldsymbol{X},\ t)=0 \tag{3.5.1}$$

それの後流渦面を

$$\overline{W}(\boldsymbol{X},\ t)=0 \tag{3.5.2}$$

で表わすことにする。ただし $\boldsymbol{X}$ は位置ベクトルである。揚力体では厚みを考慮するが，後流渦ではそれを無視する。

速度ポテンシャルは Laplace の方程式を満足すると共に次の境界条件に従う。

1) 撹乱流は無限遠には達しない。

2) 揚力体の表面では流体はその面に沿って流れる。

3) 揚力体の後縁で流体は滑らかに流れ去る（Kutta の流出条件)。

4) 後流渦面上で圧力の不連続はない。

これらの条件で速度場は唯一つのものが定まる。

基準流速を U_0，翼弦長を $2c$ とし，総ての物理量はそれらで無次元化して表わすことにする。任意点 $\boldsymbol{X}$ における速度ポテンシャルを

$$\Phi(\boldsymbol{X},\ t)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\sigma(\xi,\ t)\frac{\partial}{\partial n(\xi,\ t)}\left[\frac{1}{R(\boldsymbol{X},\ \xi,\ t)}\right]dS+\frac{1}{4\pi}\iint_{\overline{W}u}\Delta\Phi_w(\xi,\ t)\frac{\partial}{\partial n(\xi,\ t)}\left[\frac{1}{R(\boldsymbol{X},\ \xi,\ t)}\right]dS \tag{3.5.3}$$

のように書くと，これは条件1）を満足する。ただし ξ は位置ベクトル，$R=|\boldsymbol{X}-\xi|$，$\overline{W}_u$ は後流渦の下面，$\boldsymbol{n}$ は S および $\overline{W}_u$ 面の外向法線を意味する。一様流 U は x 軸方向に流れるものとし，その方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$ で表わすと，任意点の流速は

$$Q=\boldsymbol{i}U/U_0+\nabla\Phi \tag{3.5.4}$$

である。

揚力体の境界条件は S 面上で

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\boldsymbol{i}\frac{U}{U_0}+\nabla\Phi\right)\cdot\nabla S=0 \tag{3.5.5}$$

である。$\boldsymbol{n}$ を法線方向単位ベクトルとすると，$\nabla S/|\nabla S|=\boldsymbol{n}$，又 $(1/|\nabla S|)(\partial S/\partial t)=\partial n/\partial t$ であるから，(3.5.5) より

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=-\frac{U}{U_0}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}-\frac{\partial n}{\partial t} \tag{3.5.6}$$

が得られる。(3.5.3) を (3.5.6) に代入すると

$$\frac{1}{4\pi}\iint_S\sigma(\xi,\ t)\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\left[\frac{1}{R(X,\ \xi,\ t)}\right]dS=-\frac{U}{U_0}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}-\frac{\partial n}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\iint_{\overline{W}_u}\Delta\Phi_w\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\left[\frac{1}{R(X,\ \xi,\ t)}\right]dS \tag{3.5.7}$$

が得られる。これは第一種 Fredholm の積分方程式である。σ を求めるには (3.5.7) を計算すればよいわけであるが，それには Kelvin の循環定理と Kutta の流出条件を利用して，σ と $\overline{W}_u$ の形および $\Delta\Phi_w$ を関係づける式を導いておかねばならない。Kelvin の定理は「流体粒子によってつくられた閉曲線について循環は不変に保たれる」ということで

$$(D/Dt)\{\Delta\Phi_w\}=0 \tag{3.5.8}$$

である。これが後流渦の中だけでなく翼後縁でも成立つものと仮定する。表現を変えると $\Delta\Phi$ が後縁で連続であり，且つ後流渦面の形が変っても，それぞれの位置における $\Delta\Phi_w$ は不変に保たれる。こうして線型理論における Prandtle の渦保存則と Kutta の流出条件に対応するものが共に導入される。ただし後縁における $\Delta\Phi$ と後流渦の流出速度等は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{TE}&=\lim_{x\to TE}(\sigma_u-\sigma_l)\\ Q_{TE}&=(U/U_0)\boldsymbol{i}+(\nabla\Phi)_m\\ (\nabla\Phi)_m&=\frac{1}{2}\{(\nabla\Phi)_u+(\nabla\Phi_l)\}\end{aligned}\right\} \tag{3.5.9}$$

とする。脚符TEは後縁，u，l はそれぞれが上面および下面の量であることを示す。(3.5.9) の定義に従って (3.5.7)，(3.5.8) を連立に解くと σ が得られる。

Djojodihardjo and Widnall は翼の動き初めから

step-by-step に計算する方法を示している。t_0 の時刻に後縁から流出した後流渦の時刻 t における位置は

$$\boldsymbol{X}_w(t_0,\ t)=\int_{t_i}^{t} Q(\boldsymbol{X},\ t_1)dt_k+\boldsymbol{X}_w(t_0,\ t_i) \tag{3.5.10}$$

$$Q(\boldsymbol{X},\ t)=\frac{U}{U_0}\boldsymbol{i}+\nabla_s\Phi_{wm}(\boldsymbol{X},\ t)+\boldsymbol{n}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{X},\ t)}{\partial n} \tag{3.5.11}$$

によって計算する。これは2.1節の条件2）を数式表示したもので，境界条件4）はこの形で導入される。ここに Φ_{wm} は後流渦面上の速度ポテンシャルの上下面の平均，∇_s は後流渦面内の勾配を意味する。(3.5.10) の中の t_1 は t と t_i の間のある値と考えておけばよい。Giesing の論文ではここがもう少し具体的に書いてある。計算例には翼端後流渦の roll-up の影響までは充分に取入れられていない。そこを詳しく計算したのが最近の Suciu and Morino の論文[42]である。

上記の方法の数値計算は中々大変である。実用的には Gersten モデルを拡張したような大づかみな仮定で充分な場合が多いように思う。そのときは Haviland の計算法を利用することができる。渦の分布面は一応翼軌跡面の大きさにしておき，それの変位は単純なパラメタで，又渦面の縮みはその部分の box の $\Delta\Phi$ を0とすることで表現する。プロペラ理論でこのような計算をする場合は (2.1.1) の速度ポテンシャルを採用することになるが，翼厚項の補充策として，次のような簡便法をとるのもよいだろう。

McCroskey[43]は厚さ有限の非定常翼の計算に当り，

1) 翼厚およびキャンバーの効果は時間に関係ない。
2) 非定常な後流渦は平板のものと等しいとみなしてよい。

の仮定のもとに Allen[44] の方法で圧力分布を求め，実験とよく一致することを確かめた。Allen の翼型性能計算法は Theodorsen の厳密理論で対称翼の流速計算を行い，キャンバーの影響は薄翼理論で計算し，この二つを加えて任意翼型の流速とするという方法であるから，守屋の近似式[45]とほぼ同等，線型理論の枠内にあると見てよい。[46] つまり翼厚はキャンバーおよび自由渦による曲り流れと分離して扱ってよいということである。結局，非線型理論でも翼厚の影響は菅井[47]の相当2次元翼の考えで充分な精度が得られる。しかしこれはあくまでも断面内の流れが2次元的であることを仮定した strip 法の考えに基づくものであるから，それが使えないほど翼厚およびキャンバーの翼幅方向分布に著しい起伏があるときは Rubbert and Saaris のような計算法をとらねばならない。

あとがき

筆者は揚力面理論に関する研究，特に mode function 法に関する文献を調査して前著をまとめた。その後，discrete function 法に関する文献の調査を進めているうちに，この方面の研究が1960年代の後半からそれまでとはかなり様子が変って来ているのに気が付いた。基礎的なことはしばらくおいて，計算結果の検定とか応用範囲の拡大といったような現実的な問題を片付けて，早く目的に近付こうという，いわゆる即物主義への移行である。こうなると方法および理論に対する議論の余地は少なく，将来に残る要素は乏しいわけである。高速電算機の急速な発展がもたらした帰結とも思えるが，ともあれ揚力面理論は流体力学の中で工学的実用に最も成功した例であるから，多くの示唆を残すものと思う。

揚力面理論とはいっても論文の殆んどが積分方程式の数値解法に関するものである。大部分はアメリカにおける研究で，極めて実用的，航空機工業において世界抜群の規模をもつその実力をかいま見る思いがする。それでも印象に残るものが無いわけではない。Garner によって代表されるイギリスの地道な研究（文献 1) 参照)，老練 Jordan の思索，女性研究者 Kálmán の新鮮さ等がそれであるが，それらの人々はいずれもヨーロッパ系である。とはいえ NSRDC の Langan and Wang の比較計算にはさすがアメリカと目を見張らせるものがあった。とにかく実用には徹しているわけである。

本文は揚力面理論全般の紹介を目的としたものではなく，プロペラ理論の応用に役立つ部分を抜き出し，一形態にまとめたものである。揚力面理論は翼の揚力を中心とする問題に関する理論であるから，流体粘性の影響は一般に2次の order，この理論の範囲内で実用に充分な結果が得られる。同じ系統にあるプロペラ理論についても実用化の可能性は多いといえるわけで，プロペラ設計に理論が欠かせないという時が早晩到来するように思う。

参考文献

1) 花岡達郎，“揚力面の数値解における問題点”，日本航空宇宙学会誌，第23巻，第263号，(1975).
2) Lamb, H., “Hydrodynamics”.

3) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論(特にMunkの定理と揚力線理論について)", 船研報告, 第5巻第6号, 昭和43年.
4) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論——II(定ピッチ非線型理論)", 船研報告, 第8巻, 第1号, 昭和46年.
5) 花岡達郎, "非定常プロペラ揚力面の数値解法(その1 基礎理論)", 船研報告, 第6巻, 第5号, 昭和44年.
6) Prandtl, L., "Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben", Vorträge aus dem Gebiete der Hydro-und Aerodynamik (Innsbruck 1922), s. 18～33.
7) Chen, C. F., "The Use of Finite Element Methods for Predicting the Aerodynamics of Wing-Body Combinations", NASA SP—228, (1970).
8) Roos, R., Bennekers, B., and Zwaan, R.J., "A Calculation Method for Unsteady Subsonic Flow about Harmonically Oscillating Wing-Body Configurations", AIAA Paper 75—864, (1975).
9) Jacobs, W. R. and Tsakonas., "A New Procedure for the Solution of Lifting Surface Problems", J. Hydronautics 3, (1969).
10) Davies, D. E., "An Application of Flax's Variational Principle to Lifting-Surface Theory", R & M No. 3564, (1967).
11) Multhopp, H., "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory), R & M No. 2884, (1950).
12) Truckenbrodt, E., "Tragflächentheorie bei inkompressibler Strömung", Jb. 1953 d. WGL.
13) Garner, H. C. and Fox, D. A., "Algol 60 Programme for Multhopp's Low-Frequency Subsonic Lifting-Surface Theory", R & M No. 3517, (1966).
14) Zandbergen, P. J., Labrujere, T. E., and Wouters, J. G., "A New Approach to the Numerical Solution of the Equation of Subsonic Lifting Surface Theory", NLR TR G. 49, (1967).
15) Mangler, K. W. and Spencer, B. F. R., "Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory", R & M No. 2926, (1952).
16) Wagner, S., "On the Singularity Method of Subsonic Lifting-Surface Theory", J. Aircraft Vol. 6 No. 6, (1969).
17) 花岡達郎, "揚力面の翼端条件と数値解法(その3 円形翼端理論の改訂)", 船研報告, 第13巻, 第6号, 昭和51年.
18) Hewitt, B. L., "Developments in Subsonic Lifting Surface Theory", British Aircraft Corporation Report Ae 282, (1967).
19) Falkner, V. M., "The Calculation of Aerodynamic Loading on Surfaces of any Shape", R & M No. 1910, (1943).
20) Albano, E. and Rodden, W. P., "A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows", AIAA Journal Vol. 7 No. 2, (1969).
21) Lamar, J. E., "A Modified Multhopp Approach for Predicting Lifting Pressures and Camber Shape for Composite Planforms in Subsonic Flow", NASA TN D—4427, (1968).
22) Margason, R. J. and Lamar, J. E., "Vortex-lattice Fortran Program for Estimating Subsonic Aerodynamic Characteristics of Complex Planforms", NASA TN D—6142, (1971).
23) De Young, J., "Convergence-Proof of Discrete-Panel Wing Loading Theories", J. Aircraft Vol. 8 No. 10, (1971).
24) Lan, C. T. and Roskam, J., "Leading-Edge Force Features of the Aerodynamic Finite Element Method", J. Aircraft Vol. 9 No. 12, (1972).
25) Giesing, J. P., "Lifting Surface Theory for Wing-Fuselage Combinations", McDonnell Douglas, Report DAC—67212, (1968).
26) Hsu, P. T., "Some Recent Developments in the Flutter Analysis of Low-Aspect-Ratio Wings", Proc. National Specialists Meeting on Dynamics and Aeroelasticity, Inst. of Aero. Sci., (1958).
27) Lopez, M. L. and Shen, C. C., "Recent Developments in Jet Flap Theory and its Application to STOL Aerodynamic Analysis", AIAA Paper No. 71—578, (1971).
28) Shen, C. C., Lopez, M. L. and Wasson, N. F., "A Jet-Wing Lifting-Surface Theory Using Elementary Vortex Distributions", AIAA Paper No. 73—652, (1973).
29) Mercer, J. E. and Weber, J. A., "Aerodynamic Influence Coefficient Method Using Singularity Splines", AIAA Paper No. 73—123, (1973).
30) Haviland, J. K., "Downwash-Velocity Potential Method for Lifting Surfaces", AIAA Journal Vol. 9, No. 11, (1971).
31) Haviland, J. K. and Yoo, Y. S., "Downwash-Velocity Potential Method for Oscillating Surfaces", AIAA Journal Vol. 11, No. 5, (1973).
32) Langan, T. J. and Wang, H. T., "Evaluation of Lifting-Surface Programs for Computing

the Pressure Distribution on Planar Foils in Steady Motion", NSRDC Report 4021, (1973).
33) Jones, W.P., "Theoretical Determination of the Pressure Distribution on a Finite Wing in Steady Motion", R & M No. 2145, (1943).
34) Jones, W.P., "The Calculation of Aerodynamic Derivative Coefficients for Wings of any Plan Form in Non-uniform Motion", R & M No. 2470, (1946).
35) Stark, V.J.E., "The Tangent Plane Method and Polar Coordinates—A New Approach in Lifting-Surface Theory", AIAA Paper No. 70—78, (1970).
36) Hess, J.L. and Smith, A.M.O., "Calculation of Nonlifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies", J. Ship Res. Vol. 8, (1964).
37) Rubbert, P.E. and Saaris, G.R., "3—D Potential Flow Method Predicts V/STOL Aerodynamics", SAE Journal Vol. 77, No. 9, (1969).
38) Gersten, K., "Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis", Ingen.-Arch., Vol. 30, (1961).
39) Giesing, J.P., "Nonlinear Two-Dimensional Unsteady Potential Flow with Lift", J. Aircraft, Vol. 5, No. 2, (1968).
40) Djojodihardjo, R.H. and Widnall, S.E., "A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear, Unsteady Lifting Potential Flow Problems", AIAA Journal, Vol. 7, No. 10, (1969).
41) Clark, D.R. and Leiper, A.C., "The Free Wake Analysis. A Method for the Prediction of Helicopter Rotor Hovering Performance", J. American Helicopter Society, Jan. 1970.
42) Suciu, E.O. and Morino, L., "Nonlinear Steady Incompressible Lifting-Surface Analysis with Wake Roll-Up", AIAA Journal, Vol. 15, No. 1, (1977).
43) McCroskey, W.J., "Inviscid Flowfield of an Unsteady Airfoil", AIAA Journal, Vol. 11, No. 8, (1973).
44) Allen, H.J., "A Simplified Method for the Calculation of Airfoil Pressure Distribution", NACA, TN No. 708, (1939).
45) 守屋富次郎, "任意の翼型の特性を求める一つの方法", 日本航空学会誌, 第5巻, 第33号, 昭和13年.
46) 花岡達郎, "厚翼の揚力面理論—I (守屋の2論文の揚力面理論への応用)", 船研報告, 第12巻, 第1号, 昭和50年.
47) 菅井和夫, " 舶用プロペラ特性解析法に関する研究", 造船学会論文集, 第128号, 昭和45年.