

## 回転体の強度研究の展望 (第2報)

天 田 重 庚\*

### Review of Recent Studies on the Strength of Rotating Bodies (Part 2)

By  
Shigeyasu AMADA

#### Synopsis

Since the previous report<sup>1)</sup> was published, the development of studies on the strength of rotating bodies has been so active. Mainly it is the facts that the researches can easily access to the large scaled computers and to the experimental techniques advances remarkably.

This report shows the survey of studies related to elasticity, plasticity, fracture, fatigue and creep problems of rotating bodies, which were collected by the author.

#### 目 次

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| 1. ま え が き         | 2.9 座 屈               |
| 2. 弾 性 解 析         | 2.10 複雑なプロファイルを有する回転体 |
| 2.1 異方性, 非均質の回転体   | 3. 弾塑性, 塑性            |
| 2.2 偏心円孔を有する回転体    | 4. 熱弾塑性               |
| 2.3 き裂, 切欠きを有する回転体 | 5. クリープ               |
| 2.4 せん断応力の存在する回転体  | 6. 破 壊                |
| 2.5 回転体内の波動        | 7. 疲労, 統計解析           |
| 2.6 非軸対称荷重を受ける回転体  | 8. まとめ, 研究展望          |
| 2.7 三次元回転体         | 9. Appendix           |
| 2.8 有限変形を受ける回転体    |                       |

### 1. ま え が き

前報<sup>1)</sup>にて回転体の強度の研究について解説を行った。しかし、その後大型電子計算機の普及や実験方法の発達、新しい解析方法の導入によって回転体の研究分野の多様化が進み、研究論文の数も増加している。それ故、これらの研究成果を分類、整理することは回転体の強度の研究現状をは握し、その展望を行うことは是非とも必要であると考えらる。

最近、日本機械学会の「回転体の強さ試験研究分科会」(白鳥主査)によって“回転体の破壊”の研究が

総合的に行われ、報告書<sup>2)</sup>も1977年6月に日本機械学会より発行された。巻末に膨大な量の文献リストが載っているが、1970年代の情報は比較的少ない。さらに、回転体のき裂の応力解析を主とした解説が坂田と大鍋<sup>3)</sup>によりなされた。

本報告は著者の前報以後に発表された文献を主体に、著者の目にとまったものを

- i) 研究テーマ別に分類
- ii) 成果の紹介
- iii) 著者の検討

に沿って行い、最後にこれからの展望について述べたものである。目次にてすでに示したように本報告は広範囲な分野をカバーしており、前述の文献2)と3)は

\* 機関開発部

原稿受付: 昭和53年3月23日

本報告にて分類したテーマの一部にすぎないことをつげ加えておく。なお、若干の落ちこぼれ文献があると思われるので、それを考慮したうえで参考にしていただければ幸いである。

## 2. 弾性解析

### 2.1 異方性、非均質の回転体

材料の異方性の主軸が直角座標系の軸に一致する場合、4つのパラメータにて材料の性質を表現できる<sup>4)</sup>。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ : ひずみ成分

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ : 応力成分

$a_{11} \sim a_{66}$ : ヤング率とポアソン比の関数

Chang<sup>5)</sup> はこれらのパラメータにて表わされた応力関数を用いて中実回転円板の応力解析を行い、外周上の周方向応力は等方体の場合と比較して小さい値になる結果を得た。Lakshminarayana ら<sup>6)</sup> は同様な異方性材料より成る中空回転円板にて、その板厚が

$$h = h_0 r^{-n}, \quad n \text{ は整数} \quad (2)$$

のように変化する場合、フーリエ変換を用いて解析し、材料の主軸からの角度によって周方向応力分布は大きく変化することを示した。

Chang<sup>7)</sup> は同様な異方性材料の回転円筒と回転円板の応力を Semi-inverse 法\*を用いて解析した。円板と比較して円筒の場合は応力の非対称性が強くなるとの結果を得た。

Bert<sup>8)</sup> は一方向に繊維補強された複合板が任意の角度で積層された回転円板のモデルを考え、つり合い式と応力-ひずみ関係を導いた。計算例として、ガラス-エポキシ、ガラス-鉄、炭素-エポキシの複合材料の回転円板に生ずる最大応力を積層厚さ比に対して求めた。

比強度(重量に対す強度)の向上のために開発された複合材料として、文献 5)~8) に取り扱われた異方性の主軸が直角系座標軸に一致する材料は製作が極異方性材料と比較して容易である。しかし、解析に際し境界条件が複雑な形となると共に半径方向と周方向の強度の均一化が困難である。

Tang<sup>9)</sup> は材料の異方性の主軸が半径方向と周方向

\* 問題としている物体の幾何学形状と境界条件、基礎方程式を考慮して未定数を含む解を仮定し、すべての条件を満足するように定数を定める。

に一致する(極異方性材料)場合、回転円板の応力は

$$\lambda = (E_\theta / E_r)^{1/2} \quad (3)$$

$E_r, E_\theta$ : 半径方向、周方向のヤング率

なるパラメータを用いると

$$f(r^{\lambda-1}, r^{-(\lambda+1)}, \rho \omega^2 r^3) \quad (4)$$

の形で表わせることを示し、 $\lambda^2 = 0.25 \sim 4.0$  の場合について等厚、中実回転円板の応力分布を計算した。 $\lambda^2 < 1$  に対して、中心上で半径方向応力が無限大になる結果を得、円板の製作にあたっては  $\lambda^2 > 1$  を採用すべきであること提案した。

Reddy<sup>10)</sup> らは極異方性材料から成り、厚さと密度が

$$h = h_0 r^{-n}, \quad \rho = \rho_0 r^m \quad (5)$$

$h_0, \rho_0, m, n$  は定数

にて変化する時、閉じた解を導き、(3)式で定義された  $\lambda$  を種々変えて応力を求め、 $m$  に対する影響を検討した。

これら極異方性材料の回転円板の解は比較的簡単な形で表わされる。直角座標系に異方性の主軸が一致する材料と比較すると比強度が大きくとれる。しかし、製作方法について問題が多い。

白鳥ら<sup>11)</sup> は比強度の高い複合材料よりなる回転体実用化のために製作方法の研究を行った。これまで割れの発生などによって成形不可能であった大内外径比のFRP円板を、積層ワインディングによる組合せ円板を成形する方法によって成形可能であることを実証し、さらに成形時の収縮による自緊作用の生ずる可能性を計算と円板を試作することによって確かめた。それらの研究を基に白鳥ら<sup>12)</sup> は円周方向繊維強化形の積層円板を製作し、成形による残留ひずみを計算と実験により求め、次に回転によるひずみを実測し、最後に破壊の実験を行った。

白鳥らの一連の研究は製作方法の検討、成形時に生ずる変形の解析とその実測による裏付けや回転破壊強度を推定する方法を含んだものであり、複合材料による回転円板への実用化に大きく寄与するものと思われる。

Gurushankar<sup>13)</sup> は極異方性材料の中空円板において、厚さ  $h$ 、弾性定数  $c_{ij}$ 、線膨張係数  $\alpha$  と密度  $\rho$  が

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 r^{-n} \\ c_{ij} &= c_{ij0} r^m \\ \alpha &= \alpha_0 r^{-m} \\ \rho &= \rho_0 r^{-p} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$h_0, c_{ij0}, \alpha_0, \rho_0, m, n, p$  は定数

のように変化する場合の応力解析を行い、非均質性の影

響について研究を行った。

Farshad<sup>14)</sup>は引張と圧縮とで異なるヤング率\*とポアソン比から成る材料を仮定して、中実回転円板の弾性応力解析を

$$\left. \begin{aligned} E_c(\text{圧縮})/E_t(\text{引張}) &= 1.0 \sim 0.4 \\ \nu_c(\text{圧縮})/\nu_t(\text{引張}) &= 1.0 \sim 0.405 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

に対して行い、周方向応力成分が不連続になることを示した。

Огбнов<sup>15)</sup>はヤング率が温度  $T$  に対して

$$E = \exp(30.98 - 0.04605T) \cdot N/m^2 \quad (8)$$

のように変化する中空回転円板の弾性応力を解析し、高温領域での応力の緩和が生ずることを示した。

これらの非均質材の解析の場合、(6)、(7)、(8)式のような簡単な形で表わされる以外は解を求めることが困難である。しかし、実際の材料においてはより複雑な非均質性を持ち、厳密に考えれば不規則な非均質性と見なしうるので、これに適した解析方法の確立が望まれる。

## 2.2 偏心円孔を有する回転体

松末ら<sup>16)</sup>は偏心円孔の大きさ、偏心量、円孔の個数および外周に一樣分布する遠心負荷の大きさなどが変化する場合の回転円板を FEM により解析した。円孔縁に生ずる応力集中率を正確に求めるため、FEM 解を用いて外挿を行った。さらに松末ら<sup>17)</sup>は FEM 解を実験的に検討するため弾塑性凍結法と軟鋼円板にひずみゲージを貼付けることによって、ひずみと応力を求めた。偏心円孔縁の応力集中率を二軸引張を受ける有孔無限板の応力集中から推定する方法は、円板内の応力こう配が小さい場合のみに限られることを示した。

FEM による解析の場合、幾何学形状を変えるたびに要素分割や入力データを作成しなおす必要があるため、作業量も多くなる。したがって、幾何学形状のパラメータの変化が応力成分にどのような影響を与えるかを調べるには、何らかの解析解を得る方が望ましい。もし、

- 1) 円板内の応力こう配が小さい(円板の外周に近い領域)。
- 2) 円板の大きさに比較して円孔の径が小さい。
- 3) 隣接する円孔間の距離が円孔の径から比較して大きい。

\* このような材料は Bi-modulus 材 (BM 材) と呼ばれ、材料の挙動をより現実的なものにする一つの方法と考えられるが、解法に際しヤング率の値のとり方に工夫が要る。

のような条件が成立する時、一円孔を有する無限板が二軸引張を受ける場合の解が近似的に適用できるときとされている。松末らの研究はこれら近似式の適用限界を示したものであり、前述の条件を満たすような偏心円孔のある回転円板の設計において近似解の使用が可能となるので意義がある。

Bhargava<sup>18)</sup>は回転円板に偏心して置かれた円介在物がある場合、複素関数法により二つの複素ポテンシャルを重ね合わせることによって応力場が求まることを示した。しかし、閉じた形の複素ポテンシャルを導いたのみで応力成分については示していない。

Sumi<sup>19)</sup>は二次元多連結領域の応力解析のため数値計算を前提とした一般的解析方法を提案した。応力関数を一つの基本解と級数によって表わし、境界条件を満足するようにこれら級数の係数を決定するもので、偏心円孔を有する回転円板の応力解析に応用した。

この方法は基本解の選び方、境界上の点のとり方などに解の精度が依存すると思われるが、複雑な形状の物体の応力解析にも応用できると云う利点がある。

## 2.3 き裂、切欠きを有する回転体

石田<sup>20)</sup>は回転円板の内部に一個のき裂が任意におかれた場合、複素関数による方法を用いて解析した。その際、外周上で応力が存在しないと云う境界条件は選点法により満足させ、き裂の角度、位置、大きさを変えた場合の応力拡大係数を計算した。

Rooke<sup>21)</sup>は中実回転円板内に半径方向に置かれた一個のき裂がある場合、支配方程式として Fredholm 型の積分方程式を導いた。これらの積分方程式を Gauss-Chebyshev 近似によって代数方程式に変換し、き裂長さを種々変えた場合の応力拡大係数を求めた。さらに、Rooke<sup>22)</sup>は同様な方法で中実回転円板の外周に半径方向に対称に置かれた長さが異なる二つのき裂が存在する場合を解析した。

これらの方法は解析解を求めた後、解に含まれる未定数を得るために計算機に頼っているが、数値解析の場合と比較して最終的に陽な形で解が得られるので便利である。

Owen<sup>23)</sup>は変厚であるタービン・ロータの内周上に一個のキー溝を持つ問題を考えた。キー溝の大きさが内周の 1/9 の深さ、1/16 の幅の場合、FEM によって応力拡大係数と最大主応力を求めた。

村上ら<sup>24)</sup>は中空回転円板の内周上に対称に置かれた二個のき裂がある場合、著者らの開発した体積力法と呼ばれる数値計算によって求め、Bowie の問題の解<sup>25)</sup>

(単軸引張りを受ける無限板中の円孔が一对のき裂を有する場合の解)と比較し、内周と外周の径の比が小さい場合は近似的に一致する結果を得た。

宮本ら<sup>26)</sup>は中実回転円筒の内周上に対称に置かれた二つのき裂が貫通している場合と円筒端に突き出ない場合の二問題に対して、特殊な変位関数を用いて応力拡大係数を求め体積力法による解と比較し、良い一致をみた。

以上の研究は数値計算によるものであり、き裂の非線形解析にも拡張できる。一方、無限板中にき裂が存在する場合の解は比較的簡単な形にて表わされる。それ故、これらの解が回転円板の解として近似的に適用できるかどうかの問題が検討された。

Blauelら<sup>27)</sup>は単軸引張を受ける無限板にき裂がある場合の解を、中実回転円板の半径方向に一個のき裂がある場合に適用した。一方、光弾性モデルを使った実験と理論解析の結果と比較して、近似解は

- 1) き裂の長さが小さい。
- 2) き裂の位置が中心に近い。

なる場合は使用できることを示した。

Winneら<sup>28)</sup>は二軸引張を受ける無限板中に円孔が存在し、その円孔の両端に一对のき裂がある場合の解を中空回転円板の内周上に一对のき裂がある場合に適用し、応力拡大係数を求めた。

これら無限板の解は簡単な形で表現されていること、回転円板中のき裂近傍の局所場が無限板中のき裂の近傍の場に比較的似ているならば、十分近似解として使用できるなどの利点がある。

守<sup>29)</sup>は中実回転円板の外周上の両側に円弧切欠きがある場合、双極座標系を用いて解析し、切欠き深さと切欠き円半径の比に対する切欠き底の応力集中率を計算した。もしこの厳密解が Neuber による帯板の引張の理論解<sup>30)</sup>を回転円板に適用した近似解と比較されれば、興味ある結果が得られるものと推察される。

#### 2.4 せん断応力の存在する回転体

回転体が時間と共に激しく回転変動と伴うと周方向変位が生じ、せん断応力が無視できなくなる。また、外周上にせん断荷重が作用する場合にはせん断応力が支配的になることも考えられる。

Samanta<sup>31)</sup>は中実回転円板が外周に非定常なせん断力の作用によって

$$\Omega = \Omega_0 e^{-pt}, \quad \Omega_0, p : \text{定数} \quad (9)$$

なる角速度で回転を行う場合、ヤング率が

$$E = E_0 r^n, \quad n, E_0 : \text{定数} \quad (10)$$

のような変化する材料を仮定して基礎式を導いた。しかし、閉じた解を求めたのみで具体的な数値例は示していない。

菊池ら<sup>32)</sup>は角速度が正弦関数的に変化する、すなわち

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \sin \Omega_2 t, \quad \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2 : \text{定数} \quad (11)$$

なる等厚円板の応力解析を行ったが、具体的な数値例については示していない。

菊池ら<sup>33)</sup>は角速度が指数関数的、

$$\Omega = \Omega_0 [1 - (1 - Q)e^{-pt}], \quad \Omega_0, Q, p : \text{定数} \quad (12)$$

に変化する回転円板の弾性応力を解析した。 $p=6, 10, 30, 60$ の場合について計算した結果、この程度の回転変動では加速の速さが回転体の半径方向、および周方向応力におよぼす影響は認められるが著しいものでなく、準静的な応力解析で近似的に十分であるとの結果を得た。

菊池ら<sup>34)</sup>は極異方性材料の円板が(12)式で与えられるような回転をしている場合、回転角速度の二乗に比例する法線力と回転角速度に比例する接線力が外周に作用する境界条件の下で変位、応力、ひずみに対する式を導いた。しかし、数値計算例は示されていない。

Chen<sup>35)</sup>は内周部が剛体軸に固定され、さらに外周上の変位も拘束された中空円筒が、

$$\Omega = \Omega_0 t^2, \quad \Omega_0 : \text{定数} \quad (13)$$

なる速度で増速回転をしている場合、変形ベッセル関数を用いたグリーン関数により解析を行った。時間と共に増加する半径方向応力分布について数値結果を得た。

以上の動的解析において、加速度成分、

$$\underline{a} = \ddot{\underline{V}} + 2\dot{\underline{\Omega}} \times \dot{\underline{V}} + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{V}) + \dot{\underline{\Omega}} \times \underline{V} + \dot{\underline{\Omega}} \times r \underline{e}_r + \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times r \underline{e}_r) \quad (14)$$

$\underline{V}$ : 変位ベクトル

$\underline{e}_r$ : 半径方向単位ベクトル

$\underline{\Omega}$ : 角速度ベクトル

において第一、五と六項のみが考慮され、その他の成分は無視されている。主な理由は

- i) 連成となるべき半径方向と周方向のつり合い式が互いに独立となり、解法の困難さが改善されること、

ii) (14)式にて $r$ と比較して $|\underline{V}|$ は非常に微小である

などである。しかし、 $\dot{\underline{V}}$ や $\dot{\underline{\Omega}}$ が大きい場合は第二、

四項による慣成力は無視できないと考えられるので、これらの定量的評価は必要であろう。

Gurushankar ら<sup>36)</sup>は厚さが

$$h = h_0 r^{-n}, \quad h_0 : \text{定数} \quad (15)$$

のように変化する回転円板が加速回転している場合、 $n$  と内外径比を種々変えた場合の周方向変位を求めた。境界条件として内周が剛体軸に固定され、外周では外力が作用していないことを用い、周方向変位は円板の厚さの変化により大きく影響されることを得た。

Reddy ら<sup>37)</sup>は直交異方性材料の中空円板が一定の角加速度で回転している場合、フーリエ変換を用いて応力を求めた。直交異方性の軸から  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  傾いた方向における応力成分の数値計算を行った。

角加速度を受けている回転円板において、せん断応力が生ずること、それは外径の二乗と角加速に比例すること、角速度には依存しないことが Stern<sup>38)</sup> によって明らかにされたことに基づき、Deresiewicz<sup>39)</sup> は円板の厚さが

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 r^{-n} \\ h &= h_0 \exp(kr^s) \\ h &= h_0 \coth(kr) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$h_0, n, k, s$  : 定数

のように変化する場合のせん断応力を求め、その最大値について数値計算を行った。

文献 36)~39) においては準静的、すなわち変位から導かれる慣性項は無視されており、角加速度の値が大きい場合にはこれら慣性項の影響は無視できなくなるであろう。

Reddy ら<sup>40)</sup>は (15) 式によって与えられる変厚の中空円板が一定の角加速度  $\alpha$  によって回転している場合、ミーゼスの降伏条件

$$\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2 = \sigma_y^2 / 4 \quad (17)$$

$\sigma_y$ : 降伏応力

を用いて  $\alpha$  と角速度  $\omega$  が回転円板の降伏に与える影響として、

$$\left( \frac{\rho \omega^2 b^2}{\sigma_y} \right)^2 (0.0997) + \left( \frac{\rho \alpha b^2}{\sigma_y} \right)^2 (30.31) = 1 \quad \text{for } n=0.5 \quad (18)$$

$\rho$ : 密度

$b$ : 外径

内径  $a=0.26$

なる式を導いた。せん断応力が存在する場合の回転円板の降伏条件について求められた唯一の式であり、動的負荷を受ける円板の設計に参考となる。

## 2.5 回転体内の波動

Bulkelly<sup>41)</sup> は回転中の膜円板の中を伝播するたわみ波動 (Transverse wave) についての安定性の検討を行った。回転と反対方向で円板の周方向に進む波動 (後退波) は定常自由運動の下で不安定な事、回転と同方向に進む波動 (前進波) の安定性については結論を得ることができなかった。

Petrorenko ら<sup>42)</sup>は内周が剛体軸に固定されて回転している円板のたわみ振動を考え、円板の危険回転速度  $\omega_k$  は

$$\omega_k = \left( \frac{\omega_{ni}^2 - \beta_{ni} N}{k^2 n^2 - \alpha_{ni}} \right)^{1/2}, \quad k=1, 2, \dots \quad (19)$$

となる結果を得た。ここで、 $N$  は外周上に加わる法線方向力、 $\omega_{ni}$  は  $n$  番目モードの振動数、 $\alpha_{ni}$  と  $\beta_{ni}$  は  $n$  とポアソン比の関数である。

Kirkhope ら<sup>43)</sup>は同心のリングを一つの要素とする FEM によって、変厚の回転円板のたわみ振動を解析し、回転数による振動数の変化を実験と比較し良好な一致をみた。

以上の研究はタービン・ディスクの危険速度についての資料となりうるが、実際のディスクではブレードにより荷重条件が複雑であること、熱的な影響が全く無視されていることより直接に前述の結果は応用できない。より実際の部材に近いモデル化が望まれる。

Schoenberg ら<sup>44)</sup>は無限板が変動回転する場合、コリオリ力も含めて直角座標系における動的基礎式を導いた。平面波  $\underline{u}$  を

$$\underline{u} = \text{Re} \left[ \underline{U} \exp i \omega \left( \frac{\underline{n} \cdot \underline{x}}{c} - t \right) \right] \quad (20)$$

のように仮定して固有値解析を行った。ただし、 $\underline{U}$  は定数ベクトル、 $c$  は波の位相速度、 $\underline{n}$  は波の伝播方向の単位ベクトルである。ベクトル  $\underline{s}$  を

$$\underline{s} = (c_p/c) \underline{n}, \quad c_p \text{ は縦波の速度} \quad (21)$$

のように定義すると、 $|\underline{s}|$  はある方向における波の伝播のしやすさを示すことになり、等しい  $|\underline{s}|$  を結んで得られる曲面を slowness 面と呼ぶと、与えられた方向に対して三つの異なる面が存在する。これらの面は特別な場合に接触はするが決して交差しないとの結果を得た。

Censor ら<sup>45)</sup>は自由境界を有する回転体を考え、回転していない物体での Rayleigh 波のような、表面から離れるに従って指数関数的に減衰する平面波があることや、円筒波、散乱波の問題について検討を行った。

文献 44) と 45) の研究は科学的興味から成された

もので、現実的なこのような問題は存在しないと思われる。

鈴木<sup>46)</sup>は一定回転している薄肉円筒が急激に速度を変えた場合、両端単純支持の下で Donnell の式を用いて振動解析を行った。角速度の変動量をパラメータとして一般解を導き、具体的な計算例として

$$\dot{\omega} = \omega_0 + \omega(1 - e^{at}), \quad \omega_0, a: \text{定数} \quad (22)$$

の場合の応力挙動を明らかにした。これらの結果は遠心分離機の設計に有用であるが、せん断力や回転慣性が無視されているので数値として少し低い値になっていると思われる。

## 2.6 非軸対称荷重を受ける回転体

菊池ら<sup>47)</sup>はタービン・ディスクがブレードによって遠心力荷重を受ける場合をモデル化し、中空回転円板の外周上に周期的に一定の荷重が作用する場合に荷重を

$$P(\theta) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (23)$$

のようにフーリエ級数展開して応力解析を行い、光弾性凍結法によって実験値と比較した。ディスク中心部に近い領域では両者共良く一致し、ブレード荷重の影響の大きい外周部に近づくにつれて離れる。

大滝<sup>48)</sup>は内周と外周の一部分に法線荷重と接線荷重が作用する場合に (23) 式のように荷重をフーリエ展開して応力解析を行った。

以上の研究において (23) 式に基づいて得られる級数の収束性が悪く、特に外周上のブレードの両端附近では振動するような応力分布となっている。級数の計算に特別な方法の採用が望まれる。

## 2.7 三次元回転体

中空円板が剛体軸に内周を固定されて回転する場合、回転軸に沿って変形が拘束されることによって軸応力が生じ二次元問題として取扱えなくなる可能性がある (外径に比して円板の肉厚が非常に薄い場合は問題ない)。しかし、三次元問題として解く場合は著しく複雑になる故、何らかの近似的手段が望ましい。

Ramu ら<sup>49)</sup>は軸方向応力を

$$\sigma_z = A(z) \exp[\beta(a/b - r/b)] \quad (24)$$

$z$ : 軸方向座標

$\beta$ : 定数

$a$ : 内径

$b$ : 外径

のように仮定し、二次元つり合い式を満足する応力関数によって三次元の適合条件式を用いて他の応力成分

を求めた。得られた値と平面問題の値とを比較し、拘束部分に近い内周近傍では応力に差が生じることがわかった。

Wu<sup>50)</sup>は微小パラメータ、 $\epsilon$  (円筒の長さ  $H$  を円筒の外径  $R_0$  で割ったもの) を用いて三次元基礎方程式、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} u_{,zz} + \epsilon \frac{1}{2(1-\nu)} w_{,rz} \\ + \epsilon^2 \left( u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{u}{r^2} + r \right) = 0 \\ w_{,zz} + \epsilon \frac{1}{2(1-\nu)} \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right)_{,z} \\ + \epsilon^2 \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$u$ : 半径方向変位

$w$ : 軸方向変位

を導いた。 $r$  についての最高階微係数に  $\epsilon^2$  が乗せられているため Singular Perturbation 法を用いて (25) 式の解を求めた。此の方法の基本的な考え方は円板全体を満足する三次元解を求めることを避け、内周附近のみで三次元解を使用し、それ以外の領域では二次元解を代用しようとするものであり、解を得る複雑さはある程度軽減できる。なお、両者の解のマッチングは Betti の相反定理を用いている。

## 2.8 有限変形を受ける回転体

回転体の材料がゴムのような物質からできている場合は応力-ひずみ関係式、つり合い式などは微小変形理論の場合のそれらと比較して複雑となる。

Yang<sup>51)</sup>は Mooney 材<sup>\*</sup>、すなわち、ひずみエネルギー-密度関数  $W$  が

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (26)$$

$I_1, I_2$ : ひずみの不変量

$C_1, C_2$ : 材料定数

のように表わされる材料を考え、基礎式を変形後の座標で導き、円板が半径方向の力を受ける場合について数値計算と近似解析によって解いた。

Feng<sup>52)</sup>は (26) 式で与えられる Mooney 材の変厚回転円板について、中空の場合と内周が固定された場合のストレッチ比の分布を求めた。ここで用いられている解法は“Phase Plane 法”と呼ばれ、二個の主ストレッチ比から一つを独立変数として選び、基礎方程式を書き換えることにより微分方程式の階数を 1 階低下させて数値積分を行った。力学系で使用されている方法を弾性問題の解法に導入した事は大いに意義があ

\* M. Mooney, J. Appl. Physics, Vol. 11 (1940), p. 582

り、此の方法は将来発展の可能性があろう。

Wineman<sup>53)</sup> は応力-ひずみ関係が

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= -p + [(1 + \alpha I)\lambda_i^2 - \alpha \lambda_i] \dot{R}(I; t) \\ \dot{R} &= C_0 [(1 - \gamma)e^{-p(I)t} + \gamma] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$I = \lambda_i \lambda_i$$

$\lambda_i$ : ストレッチ比

$p$ : スカラー関数

$\alpha, C_0, \gamma$ : 定数

で与えられる材料の回転円板を取扱い、時間に対する変形の進行や応力分布を数値解析した。

Haddow ら<sup>54)</sup>は Feng<sup>52)</sup>によって取扱われた問題に対して、円板を同心リング要素に分割して基礎式を組立て数値計算により、ストレッチ比と応力の分布を求めた。ここで用いられた基礎式は Feng の導いた式よりも簡単で、計算時間の軽減に役だっている。

Brunelle<sup>55)</sup> は通常の回転体のつり合い式の中で遠心力項が

$$\rho r \omega^2, \quad (28)$$

$\omega$ : 角速度

と置かれているが、変形を考慮すると

$$\rho(r+u)\omega^2, \quad (29)$$

$u$ : 半径方向変位

とすべきであるとし、(29)式に基づいた基礎式より解を求めた。この解は与えられた内外径に対して有限の回転数により無限大となることを示した。さらに古典解ではこの不安定は決して生じない点についても述べた。しかし、ここで使用した基礎式が慣性力の項のみについて変形を考慮し、他の項について本来なら変形後の座標で表現すべきであるものを変形前の座標で表わしている重大な欠陥を含んでおり、危険回転数の存在については疑問がある。

Bhuta ら<sup>56)</sup>は Brunelle が中空円板を取扱ったのに対して中実円板の解を同じ基礎式より導き、解の発散を伴う回転数の存在を確認した。その理由として、次のような説明をしている。一定回転の下で変形を拘束されている円板がある瞬間に拘束から開放されたとしよう。すると、半径方向変位  $u$  が増加し始め、それに伴い  $r \rightarrow (r+u)$  により慣性モーメントが増加する。慣性モーメントの増加が角運量の増加をまねき、系のエネルギーが加えられて  $u$  の発散となる。これを“静的不安定 (static instability)”と名付けた。しかし、この説明には二つの疑問が残る。一つは  $u$  の増加によるエネルギーは円板の変形のためポテンシャル・エネルギーとして蓄えられること、他は何故に特別な  $\omega$  の

時のみの発散が生ずるのか説明されていない。

Green と Zerna の著書\*に Neo-Hookean 材についても前述の危険回転数が存在すると述べられているが、Patterson ら<sup>57)</sup>はつり合い状態の近傍でのせつ動によって解の発散する危険回転数は存在しないことを導いた。この理由として、変形の増大に伴い軸対称形から非軸対称形になることにより解の無限大は生じないとした。

## 2.9 座 屈

Uthgenannt<sup>58)</sup> は内周が単純支持か、あるいは固定され、外周が単純支持されて回転している円板に温度こう配を加えた場合に生ずる座屈現象を検討した。主要な因子は内外径比と温度こう配であり、これらをパラメータとして臨界荷重を求めた。しかし、実際の回転機械において前述のような支持条件で板厚の薄い回転円板は使用されないで、結果の応用性は乏しいであろう。

Mostaghel ら<sup>59)</sup>は外端が固定された棒が回転している場合、グリーン関数を用いて臨界回転数を棒の長さに対して求めた。一方、回転円板に関しては面内と面外のつり合い式を導いた。微小変形理論では両式は連成しないから、面外の式を適当な変数変換により Coulomb の波動方程式

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{a}{2\xi}\right) Z = 0 \quad (30)$$

$Z$ : 面外たわみを半径で割った関数

$\xi$ : 半径の2乗と回転速度の積

に帰着させて臨界回転数を求めた。

Nachman<sup>60)</sup> は外端が固定され、棒の軸心の延長線上にある回転中心で回転している細い棒の座屈につき、棒の長さとの固有値の比の極限值によって三種類に分け特異せつ動法により座屈回転数を求めた。これらの結果を先端に集中荷重が加わる場合の解と比較すれば、非均一な体積力の場合の座屈モードの特徴がさらに明らかにされると思われる。

## 2.10 複雑なプロファイルを有する回転体

物体の幾何学形状が複雑になると、物体の境界条件を満足する解を見つける事が困難となる。形状が複雑であってもある種の規則性があれば等角写像によって扱える可能性があるが、一般には解析的アプローチは放棄せざるをえない。代わつて数値計算法である差分法、有限要素法、境界積分方程式法 (Boundary Inte-

\* A. E. Green and W. Zerna, "Theoretical Elasticity", Oxford (1954), p. 101

gral Equation Method) が利用できる。差分法は形状の複雑さによって差分方程式も複雑となるので羽根付きのタービン・ディスクなどには応用できない。一方、有限要素法は形状の複雑さにはほぼ無関係であるので現在のところ最良の方法であろう。境界積分方程式法\*は発展段階の方法であり、将来他の方法との比較によってその特徴が明らかにされるであろう。実験的には光弾性凍結法が広く使用されている。

Chowdhurg ら<sup>61)</sup>は薄い等厚の“Booth のレムニスケート形”にて表わされる弾性羽根の応力を解析した。方法として等角写像によって単位円に写像した後 Muskhelishvili の方法を用い、周方向応力分布を求めた。

中川ら<sup>62)</sup>は円周方向に周期的に厚さが階段状に変化する回転円板に対して、厚さの異なる二つの領域で応力を求めて領域の境界上で連続の条件を満足させた。しかし、此の応力場は外周上の境界条件を満足することができないので、新しい応力場を導入して理論解を求め、ひずみゲージにより実測を行い良好な一致をみた。

Герыбер ら<sup>63)</sup>は溶接構造より成るタービン・ロータを同心の単純なリング要素と円筒要素に分割し、各要素間で力のつり合い条件を満すように応力分布を決定した。本方法は要素数が少ない場合は計算機の助けを借りることなく解が得られる。

Guntze<sup>64)</sup>は熱負荷が加わる異方性の羽根付きの回転円板の応力を軸対称三次元 FEM (ディスク用) と平面 FEM (羽根用) を用いて解析を行った。得られたディスク内の応力分布と薄肉回転円板として得られた近似解と比較し、一致することを確かめた。此の方法は羽根付きのディスクの設計には最も適しているものと思われる。

池ノ内ら<sup>65)</sup>は光弾性材料によりプロペラ・ブレードを作製し、流体内と遠心力を負荷するために流体中にて回転させながら応力を凍結させた。これより応力を求め、従来の計算法である Taylor, Schöner の両法と比較しおおよその一致をみた。

池ノ内らの方法と同様な方法で Wolf ら<sup>66)</sup>は羽根付

きのタービン・ロータの応力分布を求めた。凍結のためモデル材料を 130°C 以上に加熱するためポアソン比の変化の影響が結果の中に誤差として導入される事を除くと信頼のおける方法であろう。

Brewer<sup>67)</sup>は「Michigan」号の直径 6 m 75 cm, Al-Bronze 合金のプロペラの作動中の応力をひずみゲージを使用して求めた。データは時間と共に相当変動しているため、5枚の羽根の平均か、あるいは一枚の羽根の時間平均した応力を軸の回転数に対して求めた。

### 3. 弾塑性、塑性

天田<sup>68)</sup>は中空回転円板の弾塑性応力の閉じた解を得るためにせつ動法を用いた。応力-ひずみ曲線として Ramberg-Osgood 式を採用し、応力関数によって表わした非線形微分方程式を微小パラメータ  $\epsilon$  の幅級数にて展開し、 $\epsilon^2$  の項までの解を求めた。塑性域が小さい場合は数値解と良く一致するが、大きくなるにつれて両者の差は増加する。本方法は基本解 (弾性解) が簡単な場合のみ有力な手段となりうる。

Gorodetskii ら<sup>69)</sup>は薄肉のコーン型の回転体の弾塑性応力分布を差分法とひずみゲージによって求め、両者は良好に一致することを示した。しかし、差分法の基礎式として shell 構造の式を用いたために、軸との接続部に近い領域では三次元の影響により実験値と離れる傾向にあり、内周近傍では何らかの他の取扱いが必要であろう。

これまでの弾塑性解析ではせん断応力の存在しない下で行われていたが、Reid<sup>70)</sup>は加速度回転している円板内でせん断応力が生ずる時、Tresca の降伏条件を使用してせん断応力の塑性変形におよぼす影響が大きいことを導いた。この結果はタービン・ディスクの回転が急変する場合の塑性設計に貴重である。

微小塑性変形理論は要素の負荷トラジェクトリーが直線となる「単純負荷」の場合、安定仮説\* (Stability Postulate) を満足するはずである。Schevchenko ら<sup>71)</sup>は回転円板を静止-回転上昇-最高回転-減速-停止のサイクルにおけるひずみトラジェクトリーを観察し、ほぼ直線からはずれないことを得ると共に圧縮性を考慮した計算値が非圧縮性の値よりも実験値に近いことを示した。ひずみトラジェクトリーの直線性は回転体に

\* 天田, “弾性問題に対する積分方程式の応用”, 船舶技術研究所報告, Vol. 12, No. 4 (昭 50), 31-40

天田, “平面熱弾塑性応力問題に対する積分方程式の応用”, 船舶技術研究所報告, Vol. 13, No. 5 (昭 51), 1-11

\* J. B. Martin, “Plasticity”, MIT Press (1975), p. 84: 安定仮説とはひずみ増分が降伏曲面に垂直となる結果を導く。これは熱力学の第 2 法則より求まる。



おいては主応力の回転が塑性変形においても生じないことを意味する。

Genesu ら<sup>72)</sup>は円錐形の回転体のリミット・アナリシスによって崩壊速度を求めた。また、ひずみゲージによって実験を行い、円錐形の外側と内側の応力を測定した。使用されたモデルの形状は遠心圧縮機を簡略化したものより採用したが、円錐形のシェルが軸と接続される近傍では三次元の影響を考慮した解析が必要であると思われる。

#### 4. 熱弾塑性

Amada<sup>73)</sup>は等厚の中空円板が回転上昇しながら熱伝達加熱される場合、ミーゼスの降伏条件と Prandtl-Reuss の式を用いて弾塑性応力解析を行い、ビオ一数に対する塑性域の挙動を調べた。さらに、前報の結果を拡張して円板が 0~20,000 rpm, 外周上の温度が 20~500°C の範囲で繰り返される場合の応力、ひずみ挙動を明らかにした<sup>74)</sup>。ここで使用された方法は塑性域の増大に伴って反復計算に要する計算時間が増加すること、温度に対する物性値の変化を無視している点など改善する必要がある。

Альперт<sup>75)</sup>はトレスカーソン・ブナンの降伏条件と最大相当応力による降伏条件、自然対数ひずみ

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \ln(dr/dr_0) \\ \varepsilon_\theta &= \ln(r/r_0) \\ \varepsilon_z &= \ln(h/h_0) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$r_0, h_0$ : 変形前の半径, 板厚

$r, h$ : 変形後の半径, 板厚

を用い、半径の3乗で変化し外周で 673°K の温度分布の場合の変位を計算した。降伏条件の差は変位において高々7%にすぎないことを示した。残念ながらこの報告には複雑な関数の数値積分を必要とするがその説明が示されていない。

Leshchenko ら<sup>76)</sup>は複雑な形状を有する円板をリング要素の集合体に置き換え、要素は隣接部分と相對運動なしとして温度負荷が加わる場合、Hencky の式を用いて熱応力を解析した。ヤング率、線膨張率、ポアソン比は温度の関数として考慮し、数値計算は4次のルンゲ・クッタ法を用いた。実験と計算の両結果は良好に一致することを示した。物性値の温度変化を考慮して解析したのはこの問題に対して意義がある。

神保ら<sup>77)</sup>は中空円板に熱と遠心力が加わる場合、Mises-Hencky 式を用いて差分法により弾塑性応力を求めた。

#### 5. クリープ

Озеров<sup>78)</sup>はクリープひずみ  $\varepsilon^*$  が

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = C_0 \exp(\eta\sigma + p\varepsilon^*) - g_0 e^{\alpha\varepsilon^*} \quad (32)$$

$\sigma$ : 応力

$t$ : 時間

$C_0, \eta, p, \alpha, g_0$ : 定数

のように与えられる場合、差分法により時間に対する回転円板の応力分布の変化を計算した。得られた結果より (32) 式は非定常クリープ過程への遷移、円板の破壊に至るまでの時間を決定しうることが示されている。

Nemirovskii<sup>79)</sup>は定常クリープ則

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= B f^n \frac{\partial f}{\partial \sigma_r} \\ \dot{\varepsilon}_\theta &= B f^n \frac{\partial f}{\partial \sigma_\theta} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$f = f(\sigma_r, \sigma_\theta)$$

$B, n$ : 定数

を用いて、円板内の至るところで、均一な応力値になるような板厚を求めた。ここで使用した関数  $f$  は主応力平面で矩形であるが、他の場合と比較すればさらに興味ある結果が導かれるであろう。

Moghe<sup>80)</sup>は異方材の粘弾塑性の応力-ひずみ式

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) = \int_0^t c_{ijkl}(\underline{x}, t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau}(\underline{x}, \tau) d\tau \quad (34)$$

$\underline{x}$ : 位置ベクトル

$c_{ijkl}$ : リラクゼーション係数

を採用し、ラプラス変換を用いて回転円板の応力分布を求めた。Maxwell モデルを用いて均質と非均質材の場合の周方向応力を計算し、両者の間には大きな差があることを示した。コンボルーション型で示される応力-ひずみ式 (34) を採用する場合、ラプラス変換を用いると  $s$ -領域で代数積で表現できるので解析方法としては便利である。

Sherbourne ら<sup>81)</sup>は慣性項と粘性ダンピング項

$$c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (35)$$

$c_1$ : 密度

$c_2$ : 粘性係数

を考慮してつり合い式を導き、ダイナミック・リラクゼーション法にて解析した。さらに、時間間隔  $\Delta t$  の最適選択についても言及しており、方法の有用性が示されたことも意義があろう。

## 6. 破 壊

Kalderon<sup>82)</sup>は Hinkley Point で生じたロータの破壊事故の調査報告を行った。1964年9月19日にイギリスの Hinkley Point-A にある原子力発電所の六機あるうちの五番目の蒸気タービン発電機ロータが破壊した。事故後、残がいより試験片を切り出して各種の実験を行い、原因としてキー溝部より応力腐蝕により発生したクラックの成長であるとの結論を得た。此の種の事故の詳細な報告書が公刊されたことは貴重なデータの提供によって事故再発防止に役に立つ。

Scherbourne ら<sup>83)</sup>は異方性の主軸が応力の主軸と一致するような中実と中空円板を用い、異方性が崩壊荷重(破壊回転数)にどのように影響をおよぼすかを研究した。解析には変形トレスカとミーゼスの降伏条件、それらの流れ則を用いた。中空円板において板厚のテーパ形状に対する崩壊荷重(崩壊回転数)の関係で、等厚を境にして負のテーパ比(外周に近づくにつれて厚さが増加)ではほぼ直線、正のテーパ比では二次曲線となることは興味がある。

Lenard ら<sup>84)</sup>はトレスカ型の降伏条件と剛塑性体としての応力-ひずみ式を用いて、破壊強度に対する Lower-bound 解を求めた。この解から得られる応力場は静的許容応力場と呼ばれ、正解より小さな値を与える。適合条件式は無視できるので近似解を得るには簡単に便利な方法である。

Das ら<sup>85)</sup>は Thomas の理論、すなわち

$$[(1+k^2)^{1/2}+k]S_1 - [(1+k^2)^{1/2}-k]S_3 \geq 2K \quad (36)$$

$S_1$ : 最大主応力

$S_3$ : 最小主応力

$k, K$ : すべり弾性率

の時に材料が破壊すると云う条件で、脆性材料より成る中空回転円筒の破壊回転数を導いた。しかし、どのような材料に適用できるのか言及しておらず、また数値計算もなされていないので本方法の有効性については未知の部分が多い。

Riccardella<sup>86)</sup>は外径 6", 厚さ 0.25", 0.125" の円板に遠心力の代わりに高圧を片側にかけて、破壊に至るまでのたわみを測定し有限要素法の計算結果と比較した。破壊に近くなると計算結果は実験より低く出て、この差は破壊寸前に最大になる。これは使用した有限変形の FEM プログラムが十分に変形を追じゅうできないことによるものであろう。

(150)

Percy ら<sup>87)</sup>は外径 12.56 cm の薄い円板を 100,000 rpm 以上に回転させ、内周近傍に生ずるネッキングによって起こる不安定破壊の回転数を内外径比に対し求めた。一方、理論解を Hencky 変形理論と平均加工硬化特性に基づいて求め実験値と比較し、値としては実験値より低く、その差は 3~4% の範囲におさまることを示した。内周近傍に生ずるネッキング領域の形状の写真が円形ではなくてダ円形に近くなることは興味深い。

永井ら<sup>88)</sup>は円板の外周部に等間隔にスリットを入れた軟鋼と光弾性材料より成る円板を作製し、円板が降伏を開始する回転数を内外径比に対して求めた。これと中西の降伏理論と比較すると良く一致することを示した。しかし、此の実験では翼がスリットを入れることによって形成された扇形のセクターによって置き換えられているのみで、実際の羽根車と相当異なるモデルになっている。さらに、降伏ひずみ模様を観察するたびに停止させるので、一種のサイクリックな荷重状態となっているため、これが降伏開始回転数に影響を与える可能性もある。

## 7. 疲労, 統計解析

福田ら<sup>89)</sup>は多孔質ぜい性材料である石こうの中空回転体の試験結果に第一近似法(偏差のテラー展開にて第一次の項のみ考慮)と Bayes の定理を用い、材料の密度、幾何学形状、ポアソン比、回転速度のパラツキに対する回転体の信頼度を求めた。また、破壊じん性値  $K_{I0}$  の推定より平均回転速度  $\bar{\omega}=375 \text{ rad/s}$  に対する信頼度  $R=0.995$  を得た。回転体に対して考えられるパラツキを考慮して信頼度を解析した最初の研究であり、将来この方法によって得られるデータがぜい性材料から成る機器の設計に大いに寄与するであろう。

Vasil'chenko ら<sup>90)</sup>はタービン・ロータ内に存在する切欠き長さより、線形破壊力学に基づき  $K_{I0}$  を計算して Wilson の式から繰返し数  $N$  を求めた。しかし、実験データの少ないことで本解析の有効性が確立されていない。

Ghlib ら<sup>91)</sup>は円板が繰返し回転  $N$  を受ける場合

$$S_1\sqrt{(1+k^2)+k} - S_3\sqrt{(1+k^2)-k} = 2K - 2\alpha(N-1)(\sigma_1 - \sigma_3) - 2w \quad (37)$$

$S_1, S_3$ : 最大回転時に生ずる塑性域内の最大、最小主応力

$\sigma_1, \sigma_2$ : 最大回転時に生ずる弾性状態での最大、

最小主応力

$\alpha, w$ : 破壊係数 (Fracture moduli)

$k, K$ : すべり弾性率

によって最高回転数から主応力値を計算し、 $N$  を求めた。しかし、(37) 式の実験的検証が成されていないので本方法の適用性は未知である。

### 8. まとめ これからの研究展望

延性の少ない材料中に内部欠陥が存在する場合、回転体の破壊は延性材料より求めた回転数より低い値で破壊が生ずることがある。このような現象の解明のため破壊力学が導入され、次第に成果をあげつつある。その基本となるクラック先端の応力拡大係数の解析が精力的に成された。また、回転体の動的応力解析が注目され、若干の特別な場合が研究された。エネルギーの輸送媒体としてフライホイールが取上げられ、強度の面から複合材料が考えられてその強化材料の繊維の配列や、製作方法など広く検討された。

Fig. 1 に回転体のこれまで成された研究の系統的な流れを示す。これからわかるように有限変形理論の分野では、わずかに単純な問題が解析されたのみにすぎず、塑性変形にいたっては有限変形理論の回転への応用は見あたらない。図では熱負荷が加わった場合の考慮はないが、それを加えると問題が複雑化し、等温の場合と比較して解析も困難である。一方、有限要素法は複雑な形状の回転部品の設計になくはならない道具となっている。

現在すでに着手されているか、将来取扱われるであろう若干の研究課題について述べる。

破壊力学関係について、

- i) 回転体中に存在するクラック先端の弾塑性応力解析に基づいた応力拡大係数,

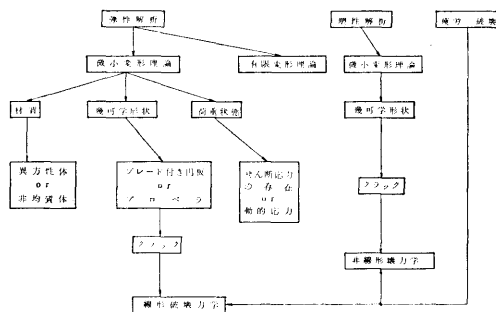


Fig. 1

- ii) 回転体の境界にあるノッチ周辺の弾塑性応力解析,
- iii) 回転体のクラックに対する  $J$ -積分の応用,
- iv) 有限変形を受ける回転体に対して前述の i)~iii) の場合,
- v) 熱負荷が加わる場合の i)~iv) の問題,
- vi) 回転体の周上に存在するクラックの COD 解析。

有限変形理論の応用として、

- vii) 回転体の安定問題の解析,
- viii) 回転体の第2近似有限変形理論の確立,
- ix) 回転体内に円孔,あるいは異種介在物が存在する場合の有限変形解析。

動的応力解析に関して、

- x) 回転体の近似動的応力解析の検討,
- xi) 回転体の動的応力解析に対する非近似理論のアプローチの手法。

異方性回転体に関して、

- xii) 異方性回転体の熱弾性応力解析,
- xiii) クラックが存在する場合の応力拡大係数,
- xiv) 弾塑性応力解析,

などが考えられる。有限要素法は前述の問題に対して相当強力な手法となりうるであろう。

以上、前報以来5年間に行われたか、あるいは注目を浴びた回転体の研究のすう勢と、今後の展望をまとめてみた。著者個人として集めたもので完全にすべての研究をもうらしているものではないが、大体の流れは表わされていると考える。何らかの意味で参考にしていただければ幸いである。

### 9. Appendix

本章は直接に回転体の強度に関係はないが、間接的に多少なりとも関係しているものを列挙する。ただし、著者の検討は回転体に直接応用できる可能性のある場合のみ行うことにする。

#### 9.1 静止円板

Gamer<sup>92)</sup>は無限大の円板の中心部に熱源があって、それにより板が加熱される場合、Trescaの降伏条件を用いた弾塑性熱応力を解析した。解法は変形理論を用いて閉じた解を求めているので、除荷過程を含む場合には適用できない。

Семеновら<sup>93)</sup>は中空円筒の熱応力を作動中のガスタービン・ロータの実測温度から弾性計算を行い、非定常熱応力分布を求めた。

Odenö<sup>94)</sup>は完全弾塑性材料より成る薄い中空円板が軸対称熱負荷を受ける場合、Trescaの降伏条件とその流れ則を用いて弾塑性熱応力、時間に対する塑性域の変化を計算した。此の方法は回転体へ容易に応用できると思われる。

薦<sup>95)</sup>は中空円板の内周、あるいは外周上にステップ状の温度負荷を与えた時、Misesの降伏条件とその流れ則を用いて、材料を完全弾塑性体と仮定し弾塑性応力を求めた。一方、実験を最高温度 300°C と 500°C の場合について行い、両者の比較をして良好な一致を得た。本方法は増分形で基礎式を導き、これを差分形に変換して数値計算を行ったもので、回転体においても同様な方法がすでにとられている。

Sähn ら<sup>96),97)</sup>は中空円板の内周上にステップ状の温度負荷を与えた時、Misesの降伏条件とその流れ則である Prandtl-Reuss 式を用いて弾塑性熱応力を求めた。計算例として内周温度が 400°C, 600°C の場合、降伏応力が温度と共に低下することを考慮して応力分布を求めた。結果は薦<sup>95)</sup>の傾向と良く一致する。

Koryagin<sup>98)</sup>は四角形な穴を持つ円板が内周上に圧力を受ける場合、応力分布を計算し、光弾性実験による結果と比較して良好な一致を得た。さらに、複合円筒の熱応力の計算を行ったが、詳しい手順や問題の設定が述べられていない。

松末ら<sup>99)</sup>は軸流圧縮機のディスクに羽根がピン結合されて遠心力を受ける場合、光弾性モデルによってピンに引張を加えて応力を測定した。ピン穴の位置や大きさを種々変えてその応力に対する関係を求めた。

Dastidar ら<sup>100)</sup>は中空円板に定常温度負荷が加わる場合、Ramberg-Osgood 則を用いて一階の非線形微分方程式よりなる基礎方程式を導き、数値計算によって応力を計算した。

Odenö<sup>101)</sup>は中実円板の外周上が時間と共に指数関数的に加熱される場合、著者の前報<sup>94)</sup>の方法によって解析した。材料の応力-ひずみ曲線としてバイリニア形 (Bilinear Model) を採用し、Tresca の降伏条件とその流れ則と温度依存の降伏応力、

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left( 1 - \rho \frac{T}{T_K} \right), \quad \sigma_{y0}, \rho, T_K \text{ は定数} \quad (38)$$

にて与えられる場合、塑性域の挙動や応力、ひずみ分布を求めた。外周部から生じた塑性域は時間と共に内部に移動した後消滅するが、温度分布が一様に近づくと再び外周近傍に現われることは興味がある。

(152)

Landau ら<sup>102)</sup>は中実円筒の焼き入れ状態を想定し、相変化を不連続温度分布によって近似を行い、Misesの降伏条件とその流れ則、完全弾塑性体を用いて焼き入れによる残留応力を求めた。ただし、降伏応力は温度の関数として、

$$\sigma_y = a_i + b_i T \quad (39)$$

$a_i, b_i$ : 定数で温度の範囲によって異なる値をとる。

なる形を用いた。しかし、相変化を温度変化のみによって近似することは少し無理があるように思われる。

Gurney<sup>103)</sup>は中実円板の中心が 500°C~800°C にスポット加熱される場合、バイリニア型の応力-ひずみ曲線と温度依存型の降伏応力、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= a - bT^2, & 0 \leq T < 700^\circ\text{C} \\ \sigma_y &= c/(T - a), & T \geq 700^\circ\text{C} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$a, b, c$  は定数

を用いて差分法により残留応力を計算した。

Кабелевский<sup>104)</sup>は Prandtl-Reuss 式と降伏関数

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{S_{ij}S_{ij}} - R(\epsilon, T) = 0 \\ \epsilon &= \int_0^t \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \right)^{1/2} dt \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$S_{ij}$ : 偏差応力

を用いて常温から 700°C まで加熱、冷却を繰り返す場合の応力トラジェクトリーを計算した。また、残留応力分布の計算値と実験値の比較を行い、おおよその一致をみた。

山田<sup>105)</sup>は中空円板の内周上がステップ状の熱伝達加熱される場合、完全弾塑性体を仮定し Tresca 型の降伏条件とその流れ則を用いて弾塑性熱応力を計算し、Mises 型の結果<sup>95)</sup>と比較し良い一致をみた。此の方法は若干の変更によって回転体へ適用できるであろう。

Misra<sup>106)</sup>は半円形の円板内の一点に熱源があり、周囲から放射冷却される場合、Goodier の熱弾性変位ポテンシャルを導入して外周上の周方向応力を計算した。

Sagar ら<sup>107)</sup>は中空円筒が外周表面を急激に加熱されると同時に引張と捩りを受ける場合、Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss 式により解析した。捩りの大きさや外周上の加熱速度を種々変えた時、表面近くに発生する塑性域の成長挙動を求めた。

Owen<sup>108)</sup>は中空円筒が Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss 式を用いて、繰り返し加熱と捩りを受ける場合、(38) 式で与えられる降伏応力の下で応力-ひずみ分布

を求めた。サイクル数に対するひずみの増加割合を実験と比較し大体の一致をみた。

Chu<sup>109)</sup> は中空円筒の内周が加熱される場合、直線的にひずみ硬化する材料を想定し、Mises と Tresca の降伏条件を用い増分基礎式を差分形にて表わした。これを数値計算によって解き、応力分布と弾塑性境界の変化を調べた。ここで用いられた方法は薦<sup>95)</sup>や山田<sup>105)</sup>が用いたものと同一である。

Hsu<sup>110)</sup> は薄い中実円板の一部が熱衝撃を受ける場合、Mises の降伏条件とその流れ則を用いて弾塑性熱応力を求めた。熱衝撃を受けた部分に大きな引張の残留応力が存在する結果を得た。

Parkes<sup>111)</sup> は極異方性材料の中実と中空円板に半径のポリノミアルで表わされる温度分布が与えられる時、弾性係数比をパラメータとして弾性熱応力を計算した。問題は温度分布をいかに簡単な半径のポリノミアルで表わすことにある。

石川<sup>112)</sup>は材料の物性値が温度の関数として、

$$\left. \begin{aligned} \alpha(T) &= 1 + \alpha_0(T/T_0) \\ K(T) &= 1 - K_0(T/T_0) \\ E(T) &= 1 - E_0(T/T_0)^2 \\ \sigma_y(T) &= 1 - \sigma_{y0}(T/T_0) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$\alpha$  : 線膨張率

$K$  : 熱伝導率

$E$  : ヤング率

$\sigma_y$  : 降伏応力

( )<sub>0</sub>: 一定温度  $T_0$  の時の ( )

を用いて円筒の弾塑性熱応力を求めた。Mises の降伏条件と Prandtl-Reuss 式、それに材料の応力-ひずみ曲線を Ramberg-Osgood 則を用いて増分理論によって解析し、物性値一定の場合と比較すると応力は小さくなることを導いた。此の方法は回転体にも適用できる。

松末<sup>113)</sup>らはタービン・ディスクを等厚の中実円板と仮定し、温度分布と弾性熱応力分布を FEM にて計算して解析解と比較した。

Jones ら<sup>114)</sup>は黒鉛製の中実ディスクの外周が誘導コイルによって加熱される場合、時間に対する内径の増加量を測定した。一方、Jones-Nelson モデルを用いて非線形弾性解析を行い、3% 以内で両者は一致する結果を得た。

Kobayashi ら<sup>115)</sup>は中空円筒の内周に半円形のクラックが存在する時、衝撃的な熱負荷を受ける場合の応力拡大係数を FEM により求めた。

## 9.2 タービン・ロータ

Chow<sup>116)</sup>は既知の予熱時間、低負荷時の運転時間、負荷時間のデータを用いてタービン・ロータの温度分布を計算し、これより Mises の降伏条件を用いて熱応力を求めた。一方、Cr-Mo-V のロータ材の 900°F における S-N 曲線から前述の条件下で疲労寿命の推定をおおよそできるとした。

久野ら<sup>117)</sup>は蒸気タービン・ロータの発停によりロータの中心部と表面に生ずる熱応力をランプ状に近似し、低サイクル疲労で得られた寿命曲線に照らし合わせてマイナー則によりクラック発生までの寿命の推定を行った。もしクリープを考慮しなくてはならない場合は

$$\sum \frac{n}{N} + \frac{L_r}{L_f} = 1 \quad (43)$$

$N$  : クラック発生までの繰返し数

$n$  : 実際の繰返し数

$L_f$  : クリープ寿命

$L_r$  : 運転時間

が成立する。ロータ表面でのクラック発生は応力集中部に生ずるので、この値を減少させるような設計を提案した。

中平<sup>118)</sup>は久野らの研究と同様な問題を取扱い、運転中のロータの温度を測定し、ロータ表面温度と車室内面温度の関係を明らかにした。

桐山ら<sup>119)</sup>は蒸気タービン・ロータの熱応力に関し、低圧-低流時のタービン内部圧力測定を行って、蒸気温度の計算を可能にすると共に翼根みぞ、ラビリンス・シールみぞ底の熱光弾性実験、および変断面形状ロータの熱応力計算を行った。

Di Pasquantonio ら<sup>120)</sup>はいろいろな作動条件の下で、熱伝達の変化を考慮した FEM によるロータの温度分布を計算し、これと近似解析の解と比較してかなり良い一致をみた。

## 9.3 回転体の温度

Brown ら<sup>121)</sup>は厚さが半径方向に指数関数的に変化するディスクがその周上に熱量の供給を受け、両側に流れる冷却空気によって熱が取り去られる場合、冷却空気量をパラメータとして温度分布を求めた。

Panton ら<sup>122)</sup>はラジアル・タービン・ロータ内の定常と非定常温度分布をタービン入口温度を 400~700°C の場合について測定した。また、冷却空気のレイノルズ数がどのように温度に影響をおよぼすかを実測した。

Heine ら<sup>123)</sup>はタービン・ディスクの温度分布を電気アナロジー法にて測定した。一方、理論解を求めて加熱初期の温度上昇を比較し良好な一致をみた。温度分布はディスク側面を流れる冷却空気量や熱伝達係数によって大きく変化することがわかった。

Bösh<sup>124)</sup>はターボ・チャージャーのロータとブレードの定常、非定常温度分布を熱伝対を埋込んでスリップ・リングによって取出す方法で測定した。特に、発進時の非定常温度においてはブレードの先端に近づくにつれて増加割合は大きくなる結果を得た。

Mitchell ら<sup>125)</sup>は中心部に向かって流れる冷却空気用の単一通路を持ったタービン・ホイールのモデルを作り、実験的に熱伝達率を測定した。解析解と比較して両者は異なること、原因は通路内の二次流れの影響であると推察した。

服部ら<sup>126)</sup>は等厚の回転円板の外周上が高温ガスによって加熱される時、半径方向に冷却空気を流すことによって熱伝達率の測定を行った。

Абельский ら<sup>127)</sup>は回転円板の外周上の一点に熱源があって、その他の部分では周囲媒体へ熱が逃げる時の温度分布を求めた。

大野ら<sup>128)</sup>は火力発電機用蒸気タービンの起動時、回転数、蒸気温度、蒸気量、蒸気圧力、負荷などを実測し、これらの結果から高圧第一段落後ケーシングの熱伝達率や回転部における熱伝達率を推定した。

#### 9.4 タービンの起動について

タービン・ロータの非定常応力負荷はタービンの起動特性に依存する。若干の文献<sup>129)~133)</sup>はロータの温度変化や回転数の変化などをいろいろな条件の下で実測した。これらのデータは回転円板の非定常解析の際に非常に参考となるであろう。

#### 参 考 文 献

- 1) 天田重庚, “回転体の強度研究の展望”, 船舶技術研究所報告, 10巻, 2号(昭48), 23-34
- 2) “回転体の強さ試験研究分科会報告書”, 日本機械学会(1977年6月)
- 3) 坂田勝, 大鍋寿一, “回転体の応力解析”, 日本機械学会誌, Vol. 81, No. 718(1978), 951-957
- 4) S. G. Lekhnitskii, “Theory of Elasticity of Anisotropic Elastic Body”, Holden-Day(1963)
- 5) C. I. Chang, “A Closed-form Solution for an Orthotropic Rotating Disk”, J. Appl. Mech., Vol. 41(1974), 1122-1123
- 6) H. V. Lakshminarayana and H. Srinath, “Elastic

Stresses in Rotating Orthotropic Discs of Variable Thickness”, J. Strain Anal., Vol. 8, No. 3(1973), 176-181

- 7) C. I. Chang, “The Anisotropic Rotating Disk”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 17(1975), 397-402
- 8) C. W. Bert, “Centrifugal Stresses in Arbitrarily Laminated, Rectangular Anisotropic Circular Discs”, J. Strain Anal., Vol. 10, No. 2(1975), 85-92
- 9) S. Tang, “Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Discs”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 11(1969), 509-517
- 10) T. Y. Reddy and H. Srinath, “Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Annular Disc of Variable Thickness and Variable Density”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 16(1974), 85-89
- 11) 白馬英亮, 池上皓三, 服部敏雄, 清水克美, “繊維強化形回転円板の試作”, 日本機械学会論文集, 40巻, 340号(昭49), 3298-3309
- 12) 白鳥英亮, 池上皓三, 服部敏雄, “円周方向繊維強化形回転円板の回転強度”, 日本機械学会論文集, 43巻, 371号(昭52), 2473-2483
- 13) G. V. Gurushankar, “Thermal Stresses in a Rotating, Non-homogeneous, Anisotropic Disk of Varying Thickness and Density”, J. Strain Anal., Vol. 10, No. 3(1975), 137-142
- 14) M. Farshad, “Stresses in Rotating Disks of Materials with Different Compressive and Tensile Moduli”, Int. J. Mech. Sci., Vol. 16(1974), 559-564
- 15) Э. П. Оганов и А. М. Сянюков, “Термоупругие Напряжения в Неоднородных Цилиндрах и Дисках Постоянной Толщины”, Прикладная Механика (Soviet Applied Mechanics), Vol. 5, No. 7(1969), 33-38
- 16) 松末勝利, 長松昭男, 橋本良作, 米内山 誠, “多数の偏心円孔を有する回転円板の応力(FEMによる計算)”, 航空宇宙研究所報告, NAL, TR-390(1974)
- 17) 松末勝利, 米内山 誠, 橋本良作, “偏心円孔を有する回転円板の応力(二次元光弾性実験)”, 航空宇宙技術研究所報告, NAL, TM-279(1975)
- 18) R. D. Bhargava and V. S. Rao, “Note on Rotating Disc with an Eccentric Elliptic Insert”, Acta Mechanica, Vol. 14(1972), 65-69
- 19) N. Sumi and T. Sekiya, “General Method for Plane Elasticity in Multiply-connected Regions Subjected to Arbitrary Body Forces and Surface Traction”, Int. J. Eng. Sci., Vol. 12(1974), 97-106
- 20) 石田 誠, “内部き裂を持つ回転円板”, 日本機械学会講演論文集, No. 730-13(1973), 73-76

- 21) D. P. Rooke and J. Tweed, "The Stress Intensity Factors of a Radial Crack in a Finite Rotating Elastic Disc", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 10 (1972), 709-714
- 22) D. P. Rooke and J. Tweed, "The Stress Intensity Factors for Two Collinear Edge Cracks in a Rotating Disc", *J. Elasticity*, Vol. 7, No. 2 (1977), 185-194
- 23) D. R. J. Owen and J. R. Griffith, "Stress Intensity Factors for Cracks in a Plate Containing a Hole and in a Spinning Disk", *Int. J. Fracture*, Vol. 9, No. 4 (1973), 471-476
- 24) 村上敬宜, 西谷弘信, "内側にき裂を有する中空回転円板の応力拡大係数", 日本機械学会論文集, 41巻, 348号(昭50), 2255-2264
- 25) O. L. Bowie, "Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks", *J. Math. and Phys.*, Vol. 25 (1956), 60-71
- 26) 宮本博, 鹿島光一, "き裂を有する回転円盤の三次元応力解析", 日本機械学会論文集, 43巻, 370号(昭52), 2046-2054
- 27) J. G. Blauel, J. Beinert and M. Wenk, "Fracture-mechanics Investigations of Cracks in Rotating Disks", *Exp. Mech.*, Vol. 17 (1977), 106-112
- 28) D. H. Winne and B. M. Wundt, "Application of the Griffith-Irwin Theory of Crack Propagation to the Bursting Behavior of Disks, Including Analytical and Experimental Studies", *Trans. ASME*, Vol. 80, No. 8 (1958), 1643-1658
- 29) 守 恭平, "円弧切欠きを有する回転円板", 日本機械学会論文集, 44巻, 383号(昭53), 2228-2237
- 30) H. Neuber, "Kerbspannungslehre", Springer-Verlag, 2nd Edt. (1958), 47-52
- 31) B. K. Samanta, "Stress Distribution in a Thin Rotating Circular Disk Having Transient Shearing Stress Applied on the Outer Edge", *J. Franklin Inst.*, Vol. 281, No. 4 (1966), 315-323
- 32) 菊池秀勝, 諸江忠次, "原動機部品の熱疲労寿命に関する研究(回転数が正弦関数的に変化する一様な等厚回転円板の弾性変位, 歪および応力について)", 防衛庁技術研究本部技報, 技-462(昭46)
- 33) 菊池秀勝, 諸江忠次, "可変回転翼列およびその機構の研究(回転数が指数関数的に増加する回転円板の応力について)", 防衛庁技術研究本部技報, 技-475(昭46)
- 34) 菊池秀勝, 諸江忠次, "可変回転翼列およびその機構の研究(極異方性回転円板の弾性変位, ひずみおよび応力について: その1, 回転数が対数曲線的に増加するとき)", 防衛庁技術研究本部技報, 技-489(昭47)
- 35) Y. Chen, "Stresses in a Radially Constructed Rotating Cylinder", *J. Franklin Inst.*, Vol. 300, No. 3 (1975), 185-191
- 36) G. V. Gurushankar and H. Srinath, "Note on Displacements in Accelerating Disks of Variable Thickness", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 14 (1972), 427-430
- 37) T. Y. Reddy, H. V. Lakshminarayana and H. Srinath, "Elastic Stresses in an Accelerating Circular Disk", *J. Appl. Mech.*, Vol. 41 (1974), 817-819
- 38) M. Stern, "Rotationally Symmetric Plane Stress Distributions", *ZAMM*, Vol. 45 (1965), 446-447
- 39) H. Deresiewicz, "Acceleration Stresses in Disks of Variable Thickness", *J. Appl. Mech.*, Vol. 42 (1975), 727-729
- 40) T. Y. Reddy and H. Srinath, "Effect of Acceleration Stresses on the Yielding of Rotating Disks", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16 (1974), 593-596
- 41) P. Z. Bulkelly, "Stability of Transverse Waves in a Spinning Membrane Disk", *J. Appl. Mech.*, Vol. 40 (1973), 133-136
- 42) M. P. Petrenko and I. I. Sokolovskaya, "Dynamic Stability of Rotating Disks Loaded by a Concentrated Force", *Soviet Appl. Mech. (Прикладная Механика)*, Vol. 9, No. 5 566-569
- 43) J. Kirkhope and G. J. Wilson, "Vibration and Stress Analysis of Thin Rotating Discs Using Annular Finite Elements", *J. Sound Vibration*, Vol. 44, No. 4 (1976), 461-474
- 44) M. Schoenberg and D. Censor, "Elastic Waves in Rotating Media", *Q. Appl. Math.*, Vol. 31, No. 1 (1973) 115-125
- 45) D. Censor and M. Schenberg, "Two Dimensional Wave Problems in Rotating Elastic Media", *Appl. Sci. Research*, Vol. 27 (1973), 401-414
- 46) 鈴木眞一, "高速回転薄肉円筒の動的応力(変動回転の影響)", 日本機械学会論文集, 43巻, 376号(昭52), 4381-4388
- 47) 菊池秀勝, 諸江忠次, 田中俊男, "原動機部品の熱疲労寿命に関する研究(その3: 翼車リム部の応力分布)", 防衛庁技術研究本部技報, 8巻, 75号(昭44), 105-121
- 48) 大滝英征, "非軸対称荷重を受ける回転円板の応力分布", 日本機械学会論文集, 45巻, 392号(昭54), 379-387
- 49) S. A. Ramu and K. J. Iyengen, "Quasi-Three Dimensional Elastic Stresses in Rotating Disks", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16 (1974), 473-477

- 50) C. H. Wu, "An Asymptotic Solution of a Rotating Disc", *J. Appl. Mech.*, Vol. 38 (1971), 971-977
- 51) W. H. Yang, "Stress Concentration in a Rubber Sheet under Axially Symmetric Stretching", *J. Appl. Mech.*, Vol. 34 (1967), 942-946
- 52) W. W. Feng, "On Rubber Disks under Rotation or Axisymmetric Stretching", *Int. J. Non-linear Mech.*, Vol. 8 (1973), 539-550
- 53) A. S. Wineman, "Large Axisymmetric Deformation of a Nonlinear Viscoelastic Membrane due to Spinning", *J. Appl. Mech.*, Vol. 39 (1972), 946-952
- 54) J. B. Haddow and M. G. Faulkner, "Finite Elastic Deformation of an Annular Rotating Disk", *J. Eng. Materials Tech.*, Vol. 98 (1976), 375-379
- 55) E. J. Brunelle, "Stress Redistribution and Instability of Rotating Beams and Disks", *AIAA J.*, Vol. 9, No. 4 (1970), 758-759
- 56) P. G. Bhuta and J. P. Jones, "Symmetric Planar Vibrations of a Rotating Disk", *J. Acoustical Soc. America*, Vol. 35, No. 7 (1963), 982-989
- 57) J. C. Patterson and J. M. Hill, "The Stability of a Solid Rotating Neo-Hookean Cylinder", *Mech. Research Communication*, Vol. 4 (1977), 69-74
- 58) F. B. Uthgenannt, "Thermal Buckling of Rotating Orthotropic Annular Plates", *J. Aircraft*, Vol. 8, No. 10 (1971), 841-842
- 59) N. Mostaghel and I. Tadjbakhsh, "Buckling of Rotating Rods and Plates", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 15 (1973), 429-434
- 60) A. Nachman, "The Buckling of Rotating Rods", *J. Appl. Mech.*, Vol. 42 (1975), 222-224
- 61) K. L. Chowdhury and R. S. Dhaliwal, "Stress Set-up by Rotation in Thin Elastic Blades", *J. Franklin Inst.*, Vol. 279, No. 1 (1965), 39-45
- 62) 中川有三, 奥田 聡, "円周方向に厚さの異なる回転円板の応力について", *日本機械学会論文集*, Vol. 22, No. 115 (昭 31), 125-132
- 63) Е. Я. Герцберг и В. Л. Фейрин, "Метод Расчета Сварных Роторов Турбомашин", *Энерго-Машиностроение*, Июнь (1972), 1-5
- 64) R. Guntze, "Theoretische Ermittlung der drei dimensionalen Spannungsverteilung in Radialverdichterrädern", *Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht*, 70-16 (1970)
- 65) 池ノ内昌弘, 田中 昇, 岸本宏次, "推進器翼の強度に関する一研究", *日本造船学会論文集*, 129号 (昭 46), 7-16
- 66) H. Wolf und B. Simon, "Modelluntersuchungen an rotierenden Teilen des Turbine und Generatorenbaus zur Unterstützung der Festigkeitsberechnung und Konstruktion", *Konstruktion*, Band 23, Heft 7 (1974), 269-275
- 67) D. A. Brewer, "Operating Stresses on 'S.S. Michigan' Propeller", *Exp. Mech.*, Vol. 12 (1972), 159-168
- 68) 天田重庚, "Perturbation Method による回転円板の弾塑性解析", 第 16 回構造強度に関する講演会論文集 (1974), 5-8
- 69) V. N. Gorodetskii, I. A. Kozlov and L. P. Vasilenko, "The Strength of Discs with Inclined Webs", *Strength of Materials (Проблему Прочности)*, Vol. 4, No. 5 (1972), 28-30
- 70) S. R. Reid, "On the Influence of Acceleration Stresses on the Yielding of Discs of Uniform Thickness", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 14 (1972), 755-763
- 71) Y. N. Schevchenko, R. G. Terekov and A. I. Borissyuk, "Experimental Verification of the Applicability of the Theory of Small Elastoplastic Deformations to the Calculation of Rotating Disks", *Soviet Appl. Mech. (Прикладная Механика)*, Vol. 9, No. 1 (1973), 46-49
- 72) F. Ginesu, B. Picasso and P. Priolo, "Elastoplastic Analysis of a Rotating Model: Conical Turbine Disk", *J. Strain Analysis*, Vol. 10, No. 3 (1975), 167-171
- 73) S. Amada, "Elasto-plastic Stress Analysis of Discs Subjected to Transient Thermal and Centrifugal Loadings", *Proc. of the 14th Jap. Congr. on Material Research, The Soc. of Materials Science, Japan* (1971), 83-86
- 74) S. Amada, "Cyclic Thermal and Centrifugal Loadings in Disks", *Proc. of the Int. Conf. on Mech. Behavior of Materials*, Vol. 3, The Soc. of Material Sci., Japan (1972), 21-30
- 75) В. Н. Альперт, "Конечные Упруго-Пластические Деформации Неравномерно Нагретого Вращающегося Диска", *Прикладная Механика (Soviet Appl. Mech.)*, Том. 1, No. 9 (1965), 58-64
- 76) V. M. Leshchenko, I. A. Kozlov and V. P. Gontarovskii, "Design of Rotating Discs of Irregular Outline", *Strength of Materials (Проблему Прочности)*, Vol. 4, No. 5 (1972), 509-515
- 77) 神保喜一, 坂田 武, "回転円板の強度 (過回転時の応力の再配分)", 第 16 回構造強度に関する講演会論文集 (1974), 9-12



- 78) В. И. Озеров, "Нелинейная Ползучести Дисков", Прикладная Механика (Soviet Appl. Mech.), Том. 6 (1970), 112-116
- 79) Y. V. Nemirovskii, "Design of Optimum Disk in Relation to Creep", Strength of Materials (Проблему Прочности), Vol. 3, No. 8 (1971), 841-894
- 80) S. R. Moghe, "Analysis of Centrifugal Stresses in Anisotropic Viscoelastic Cylinder", AIAA J., Vol. 11, No. 5 (1973), 723-726
- 81) A. N. Sherbourne and D. N. S. Murthy, "Stresses in Disks with Variable Profile", Int. J. Mech. Sci., Vol. 16 (1974), 449-459
- 82) D. Kalderson, "Steam Turbine Failure at Hinkley Point-A", PIME, Vol. 186 (1971), 341-377
- 83) A. N. Scherbourne and S. D. N. Murthy, "Plastic Analysis of Anisotropic Disks and Plates", Proc. of ASCE, EM1 (1972), 11-26
- 84) J. Lenard and J. B. Haddow, "Plastic Collapse Speeds for Rotating Cylinders", Int. J. Mech. Sci., Vol. 14 (1972), 285-292
- 85) S. C. Das and R. N. Roy, "Fracture of Brittle Rotating Hollow Shafts", Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., Tome 18, No. 2 (1973), 415-421
- 86) P. C. Riccardella, "Elasto-plastic Analysis of Constrained Disk Burst Tests", J. Eng. for Industry, Vol. 95 (1973), 129-136
- 87) M. J. Percy, K. Ball and P. B. Mellor, "An Experimental Study of the Burst Strength of Rotating Disks", Int. J. Mech. Sci., Vol. 16 (1974), 809-817
- 88) 永井文雄, 佐藤和郎, "翼をもった軟鋼車盤の回転による降伏", 日本機械学会論文集, Vol. 41, No. 351 (昭 50), 3069-3076
- 89) 福田収一, 宮本博, "第一近似法とベイズの手法を用いたぜい性回転体の信頼性解析", 日本機械学会論文集, Vol. 43, No. 371 (昭 52), 2484-2491
- 90) G. S. Vasil'chenko, G. N. Merinov and A. S. Kozlitskii, "Use of Linear Fracture Mechanics of Damage Theory in the Determination of Turbine Rotor Strength", Strength of Materials (Проблему Прочности), Vol. 4, No. 9 (1973), 22-26
- 91) M. A. Ghalib and S. M. Makky, "Fatigue Fracture of Rotating Circular Disks", Eng. Fracture Mech., Vol. 9 (1977), 397-401
- 92) U. Gamer, "Ein radialsymmetrischer Wärmespannungszustand in der ideal-plastischen Scheibe", Ingenieur-Archiv, Band 36 (1967), 174-191
- 93) А. С. Семенов, А. В. Антонович и В. И. Усенко, "Температурные Напряжения в Элементах Цилиндров Газовых Турбин при Стационарных и Переходных Режимах Работы ГТУ", Энергетика, No. 9 (1968), 46-52
- 94) H. Odenö, "Transient Thermal Stresses in Elasto-plastic Discs", J. Mech. Eng. Sci., Vol. 11, No. 4 (1969), 384-391
- 95) 葛 紀夫, "熱衝撃を受ける中空円板の過渡的弾塑性熱応力の履歴", 日本機械学会論文集, Vol. 35, No. 276 (1969), 1640-1646
- 96) S. Sähn und H. B. Dresden, "Wärme- und Restspannungen in Kreisringscheiben und ihre Beurteilung—Teil I", Maschinenbautechnik, Band 8, Heft 4 (1969), 175-182
- 97) S. Sähn und H. B. Dresden, "Wärme- und Restspannungen in Kreisringscheiben und ihre Beurteilung—Teil II", Maschinenbautechnik, Band 8, Heft 5 (1969), 249-254
- 98) V. P. Korygin, "The Stress State of Homogeneous and Nonhomogeneous Cylinders and Disks with a Central Axial Curvilinear Hole", Soviet Appl. Mech. (Прикладная Механика), Vol. 7, No. 5 (1971), 498-502
- 99) 松末勝利, 米内山 誠, "軸流圧縮機ディスクの強度", 航空宇宙技術研究所, NAL TR-274 (1972)
- 100) D. G. Dastidar and P. Ghosh, "Stresses and Strains in the Plastic Range in an Annular Disc due to Steady State Radial Temperature Variations", Int. J. Mech. Sci., Vol. 14 (1972), 501-510
- 101) H. Odenö, "Transient Thermal Stresses in a Disc of Linearly Strain-Hardening Material", Arch. Mech., Vol. 25, No. 2 (1973), 137-154
- 102) H. G. Landau and E. E. Zwicky, "Transient and Residual Thermal Stresses in an Elastic-Plastic Cylinder", J. Appl. Mech., Vol. 27 (1960), 481-488
- 103) T. R. Gurney, "Residual Stresses in a Large Circular Disc caused by Local Heating and Cooling at Its Center", J. Strain Anal., Vol. 6, No. 2 (1971), 89-98
- 104) М. Г. Кабелевский, "Циклическое Нестационарное Нагружение Турбинного Диска", Механика Твердого Тела, Vol. 12, No. 1 (1972), 169-174
- 105) 山田雄二, "Tresca 型理論による円板の非定常熱弾塑性解析", 第16回構造強度に関する講演会論文集, 1-4
- 106) J. C. Misra, "Note on the Thermal Stresses in an Elastic Semi-Circular Disc due to an Internal Source of Heat", Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., Tome 17, No. 5 (1972),

- 1165-1173
- 107) V. Sagar and D. J. Payne, "Elastic-Plastic Deformations of Thick-walled Circular Cylinders under Transient Heating and Combined Axial Tension and Torsion Loads", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22 (1974), 47-59
- 108) D. G. Owen, "Inelastic Deformations in a Solid Circular Cylinder Subjected to Cyclic Torsion and Heating", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16 (1974), 311-327
- 109) S. C. Chu, "A Numerical Thermoelastoplastic Solution of a Thick-walled Tube", *AIAA J.*, Vol. 12, No. 2 (1974), 176-179
- 110) T. R. Hsu and S. R. Trasi, "On the Analysis of Residual Stresses Introduced in Sheet Metals by Thermal Shock Treatment", *J. Appl. Mech.*, Vol. 43 (1976), 117-123
- 111) E. W. Parkes, "Thermal Stresses in Anisotropic Discs", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 8 (1976), 5-10
- 112) 石川博将, "物性値の温度依存性を考慮した厚肉円筒の非定常熱弾塑性問題", *日本機械学会論文集*, Vol. 43, No. 376 (1977), 4454-4462
- 113) 松末勝利, 吉田豊明, 橋本良作, 小河昭紀, 磯部俊夫, "有限要素法による二次元熱伝導計算とタービン翼およびディスクの熱応力解析", *航空宇宙技術研究所報告*, NAL TR-481 (1976)
- 114) R. M. Jones and H. S. Starrett, "Nonlinear Deformation of a Thermally Stressed Graphite Annular Disc", *AIAA J.*, Vol. 15, No. 8 (1977), 1116-1122
- 115) A. S. Kobayashi, A. F. Emery, N. Polvanich and W. J. Love, "Surface Flaw in a Pressurized and Thermally Shocked Hollow Cylinder", *Int. J. Press. Piping*, Vol. 5 (1977), 103-122
- 116) C. L. Chow, "Thermal Stress and Fatigue Analysis in Turbine Rotors", *J. Eng. Power*, Vol. 93 (1971), 13-20
- 117) 久野勝邦, 太田原康彦, 石川武重, "蒸気タービン・ロータの熱疲労と問題点", *日立評論* Vol. 54, No. 9 (1972), 60-65
- 118) 中平高明, "蒸気タービン・ロータの非定常熱応力", *日本機械学会誌*, Vol. 74, No. 627 (昭 46), 402-409
- 119) 桐山 茂, 三原資臣, 国分孝友, 諸岡隆吉, "蒸気タービン・ロータの非定常熱応力", *三菱重工技報*, Vol. 4, No. 4 (1967), 346-354
- 120) F. Di Pasquantonio and A. Macchi, "Mathematical Model and Boundary Conditions in Stress Analysis Relating to Steam Turbine Rotors, under Transient Operating Conditions", *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 10 (1976), 345-360
- 121) A. Brown and E. Markland, "Temperature Distribution in Cooled Turbine Disks", *Int. J. Heat Mass Trans.*, Vol. 7 (1964), 327-332
- 122) J. Pantou, G. F. Hiett and J. G. G. Hempson, "Temperature Measurements in High-Speed Radial Turbine Rotor", *PIME*, Vol. 180, Pt. 3F (1965-1966), 202-219
- 123) K. Heine and P. Suter, "Temperature Rises in Gas-Turbine Discs", *Sulzer Technical Review* (1966), 37-43
- 124) N. Bösh, "Temperature Measurement in Turbocharger Components", *The Brown Boveri Review*, Vol. 52, No. 3 (1965), 204-213
- 125) J. W. Mitchell and D. E. Metzger, "Heat Transfer from a Shroud Rotating Disc to a Single Fluid Stream", *J. Heat Transfer*, Vol. 87 (1965), 485-492
- 126) 服部直三, 八田桂三, 小竹 進, "回転円板の熱伝達について", *第4回日本伝熱シンポジウム論文集* (1967), 153-156
- 127) Ш. Ш. Абелевский и В. К. Пашков, "О Температурном Поле Вращающихся Гибких Дисков", *Инженерно-физический Журнал*, Том 20, No. 2 (1971), 338-343
- 128) 大野裕司, 桑原和夫, 杉本一平, "起動時におけるタービン各部の熱伝達の解析", *電力中央研究所, 技術第1研究所報告*, No. 70007 (1971)
- 129) J. R. Johnston, J. W. Weeton and R. A. Signorelli, "Engine Operating Conditions that causes Thermal-Fatigue Cracks in Turbojet-Engine Buckets", *NASA Memo* 4-7-59E (1959)
- 130) 須之部量寛, 三輪光砂, 和田俊夫, "ガス・タービンの起動について", *運輸技術研究所報告*, Vol. 10, No. 9 (1960), 197-220
- 131) 小島勇蔵, 中本泰発, 綾野真也, 河原律郎, 永井 治, "関西電力堺港発電所のジェット・エンジン利用ガスタービン発電設備", *火力発電*, Vol. 20, No. 5 (1969), 50-61
- 132) H. Pfeeninger, "Development of a 15-MW Packaged Gas-Turbine Station", *The Brown-Boveri Review*, Vol. 52, No. 3 (1965), 214-231
- 133) 坂本鉄三, 中本泰発, "非常用ガスタービンの起動特性", *東芝レビュー*, Vol. 24, No. 8 (昭 44), 1027-1034