

2 ~50MeV 電子に対する制動輻射断面積の計算と 遮蔽計算への適用の検討

波戸 芳仁* 植木紘太郎*

Calculation of Bremsstrahlung Cross Section for 2~50MeV Electrons and Study of their Application Method for Shielding Calculation.

By

Yoshihito NAMITO and Kotaro UEKI

Abstract

Differential bremsstrahlung cross sections of lead, iron, and carbon for electrons whose kinetic energies were 50, 10, and 2 MeV, and total number of bremsstrahlung photons emitted when those electrons were stopped in those materials were calculated. Electron energy and atomic number dependence of the bremsstrahlung spectra and their absolute values were investigated. As formulas of the cross section calculation, Sauter's and Shiff's were chosen for a good agreement with the experimental values of gold, aluminum, and beryllium. Fortunately their formulas have simple forms. As a result, it was found as a noteworthy fact that the total number of bremsstrahlung photons emitted when 50 MeV electrons were stopped in lead and carbon were approximately same, so that the bremsstrahlung due to high energy electrons is not negligible even in a light material. The method of adopting the bremsstrahlung in Monte Carlo radiation shielding program was also discussed in this study.

目 次

記号, 定数, エネルギーと運動量の関係

1. 緒言.....	72	2.3 補正	75
2. 断面積の公式と補正.....	72	2.3.1 クーロン補正	75
2.1 断面積の種類	72	2.3.2 高エネルギー端補正	75
2.2 公式	73	2.3.3 核クーロン場遮蔽補正	76
2.2.1 ボルン近似断面積の基礎式	73	2.3.4 電子対電子制動輻射補正	76
2.2.2 光子エネルギーと方向 に関する微分断面積	73	3. 断面積の計算及び実験との比較.....	76
2.2.3 光子エネルギーに関する 微分断面積	74	3.1 光子エネルギーと方向に関する微 分断面積	76
2.2.4 全断面積	75	3.2 光子エネルギーに関する微分断 面積	85
		3.3 物質に入射した電子が静止するま でに放出する制動輻射強度	91
		4. モンテカルロ放射線遮蔽計算への適用 の方法.....	92
		4.1 モンテカルロプログラムへの組み 込み位置	92

* 原子力技術部

原稿受付：昭和61年9月4日

4.2 制動輻射光子のエネルギー・角度
 分布 93
 5. 結論 93
 参考文献 93

<記号・定数・エネルギー運動量関係>

- E_0, E = 衝突前後の電子の全エネルギー
 m_0c^2 単位
- p_0, p = 衝突前後の電子の運動量
 m_0c 単位
- T_0, T = 衝突前後の電子の運動エネルギー
 m_0c^2 単位
- k, k = 放出された光子のエネルギーと運動量
 m_0c^2 と m_0c 単位
- θ, θ = p_0 と p の k に対する角度
- ϕ = (p_0, k) 平面と (p, k) 平面のなす角
- $d\Omega_k$ = k 方向の立体角要素 $\sin\theta d\theta d\phi$
- $d\Omega_p$ = p 方向の立体角要素 $\sin\theta d\theta d\phi$
- q = 原子核への運動量移行, m_0c 単位
- β_0, β = 衝突前後の電子の速さの光速に対する比
- Z = 標的材料の原子番号
- $d\sigma_j$ = 制動輻射断面積, パラメータ j に関する微分値。原子 1 個当たり, 入射電子 1 個当たりの値,
 cm^2 単位
- N_0 = 6.03×10^{23} 原子 1 モル
- c = 3.00×10^{10} cm/sec
- m_0c^2 = 0.511 MeV
- ϕ = $Z^2 r_0^2 / 137 = Z^2 \times 5.78 \times 10^{-28} cm^2$
- I = 平均励起エネルギー
- N = 原子密度

$$E_0^2 = p_0^2 + 1, \quad E^2 = p^2 + 1$$

$$E_0 = T_0 + 1, \quad E = T + 1$$

$$E_0 = k + E$$

上の諸量の表記法は, Koch⁽³⁾と一致させた。制動輻射前後の電子, 原子核, 光子の関係を図 1 に示した。

1. 緒言

中性子補獲や一部の半減期の長い核種の存在により高エネルギーガンマ線を放出する線源の遮蔽設計においては, 制動輻射 X 線の影響が無視できない。制動輻射とは, 荷電粒子が電場によって加速を受け, 光子が放出される現象であり⁽¹⁾, 放射線遮蔽上は, 数百 keV (72)

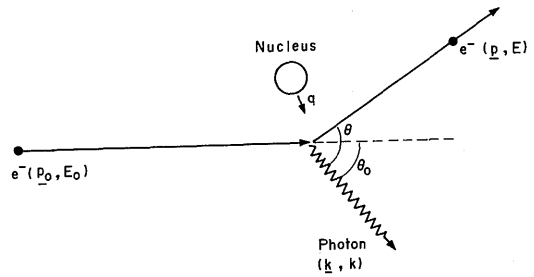


図-1 制動輻射の図的表示

以上のエネルギーの電子が遮蔽体として用いられている物質の原子核の電場と相互作用して光子が放出される際に特に問題となる。

制動輻射 X 線は無視できない線源の例として使用済核燃料や放射性廃棄物が挙げられる。これらの線源は, 直接には, 高エネルギー電子を放出しないが, 主として放出されるガンマ線と中性子が原子核に吸収されて発生する二次ガンマ線とが, 電子対生成, コンプトン散乱により, 高エネルギー電子 (約 10 MeV 以下) を発生させる。この電子は, 主に制動輻射と非弾性散乱によりエネルギーを失う。これらの過程のうち, 非弾性散乱では, 電子は徐々にエネルギーを失って行くだけなので, 遮蔽上は問題が少ない。一方, 制動輻射では, 電子のエネルギーが, 再び光子に与えられるが, 光子の飛程は, 同程度のエネルギーの電子の飛程に比べて, はるかに大きいので, 制動輻射が遮蔽上問題になる。

ところで, 現在広く使われている放射線遮蔽コードの中で, 直接積分コードである PALLAS⁽²⁾では制動輻射の効果を含めた計算を行うことができるが, モンテカルロコード MORSE, MCNP 等には, 制動輻射の寄与を考慮した計算を行う機能が無い。PALLAS は, 1 次元計算を行うのに対して, MORSE, MCNP は 3 次元計算を行うので, これらに制動輻射計算機能を付加すれば, 制動輻射を考慮した 3 次元輸送計算が可能になる。そこで, まず, 制動輻射微分断面積の計算式評価を行い, 次に, 制動輻射強度の計算し, エネルギー, 核種依存を調べた。そして, モンテカルロ遮蔽計算コードに制動輻射を取り込むための実用的な方法を考察した。

2. 断面積の公式と補正

2.1 断面積の種類

制動輻射断面積の計算に必要な, 軌道電子によって

遮蔽された原子核クーロン場内の電子を記述する波動関数を厳密に計算することが困難なため、何種類もの仮定が導入され、その結果多くの式が作られている。用いられた波動関数は、3種類に分類される。

1. 非相対論的クーロン波動関数
2. 相対論的クーロン波動関数
3. 一次摂動を加えた自由粒子波動関数 (ボルン近似)

非相対論的クーロン波動関数を使った断面積は、Sommerfeld⁽³⁾⁽⁴⁾によって計算されたもので、入射電子のエネルギーが非常に低い場合 ($\beta_0 \ll 1$) のみ有効で、エネルギーが数 keV に達すると破綻するものである。次に、相対論的クーロン波動関数を用いた断面積は、Olsen によって導かれたものである。この断面積は、超相対論領域で有効であり、 $T_0 = 50 \sim 500 \text{ MeV}$ の電子に対しては、 $\pm 3\%$ の精度がある⁽³⁾。次に、自由粒子波動関数を用いてボルン近似法によって計算される断面積は、まず、Bethe と Heitler⁽⁶⁾によって導かれ、続いて、散乱電子の方向について積分された式が、Sauter⁽⁷⁾と Schiff⁽⁸⁾によって導かれた。Sauter の式では、軌道電子による原子核クーロン場の遮蔽が無視されており、Schiff の式では、それが取り入れられている。ボルン近似断面積は、解析的な計算し易い式で表わされており、 $T_0 = 3 \sim 10 \text{ MeV}$ の電子による実験値とよく一致する。よって、本研究では、ボルン近似断面積を主に用いて計算を行う。

2.2 公 式

2.2.1 ボルン近似断面積の基礎式

全エネルギー E_0 、運動量 p_0 の電子が原子核または軌道電子のクーロン場を通過すると、ある確率で、図 1 のように加速され、エネルギー k 、運動量 k の光子が放出され、電子はエネルギー E 、運動量 p の別の状態に移る。ここでエネルギーについては、

$$E + K = E_0 \dots\dots\dots(1)$$

また、運動量については、その一部 q が核子に移るため

$$q = p_0 - p - k \dots\dots\dots(2)$$

Bethe と Heitler は、この電子とクーロン場の相互作用を、ボルン近似を用いて、取り扱っている。ボルン近似が成り立つための重要な条件は、

$$2\pi Z / (137\beta_0) \ll 1 \dots\dots\dots(3)$$

$$2\pi Z / (137\beta) \ll 1 \dots\dots\dots(4)$$

である⁽⁶⁾。

ここで、 Z は原子番号であるから、重い原子核ほどこの条件が厳しい。例えば、電子が十分に大きなエネルギーを持っており、 $\beta_0 = 1$ と見なせる場合、炭素 ($Z = 6$) ならば、(3)式の左辺は 0.28 となるが、鉛 ($Z = 82$) ならば同式の左辺は 3.8 となり、(3)式の条件は満たされない。しかし、(3)式が満足されない場合にも、ボルン近似の式は、実験値と比較的よく一致するので、広く使われている。

さて、ボルン近似を用いると、制動輻射断面積は、

$$\begin{aligned} d\sigma_{k,\theta_0,\theta,\phi} = & \frac{Z^2}{137} \left(\frac{r_0^2}{2\pi} \right)^2 [1 - F(q, z)]^2 \frac{dk}{k} \\ & \frac{p}{p_0} \frac{d\Omega_k d\Omega_p}{q^4} \cdot \left\{ \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(E - p \cos \theta)^2} (4E_0^2 - q^2) \right. \\ & + \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0}{(E_0 - p_0 \cos \theta_0)^2} (4E^2 - q^2) \\ & - \frac{2pp_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi (4EE_0 - q^2)}{(E - p \cos \theta)(E_0 - p_0 \cos \theta_0)} \\ & \left. + \frac{2k^2 (p^2 \sin^2 \theta + p_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2pp_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi)}{(E - p \cos \theta)(E_0 - p_0 \cos \theta_0)} \right\} \quad (5) \\ & q^2 = p^2 + p_0^2 + k^2 - 2p_0 k \cos \theta_0 + 2pk \cos \theta \\ & - 2p_0 p (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi) \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

となる⁽⁶⁾。

この $d\sigma_{k,\theta_0,\theta,\phi}$ は、光子エネルギー k 、光子と電子の放出角度 θ_0, θ, ϕ に関する微分断面積であり、 $E_0, Z, k, \theta_0, \theta$ をパラメータとしている。実験との比較や、遮蔽計算への応用は、この断面積をいくつかの角度について積分した形で行われる。

2.2.2 光子エネルギーと方向に関する微分断面積

前節の $d\sigma_{k,\theta_0,\theta,\phi}$ を、制動輻射後の電子の運動方向 θ に関して積分すると、光子エネルギー k と放出角 θ_0, ϕ に関する微分断面積が得られる。この断面積は、 E_0, Z, k, θ_0 をパラメータとして用いる。 θ に関して、積分された $d\sigma_{k,\theta_0,\phi}$ は、一般に ϕ についての等方向性が仮定されるので、 k と θ_0 についての微分断面積と考えられる。このことから $d\sigma_{k,\theta_0,\phi}$ を二重微分断面積と呼ぶことができる。この断面積の公式としては、軌道電子による核クーロン場の遮蔽を無視した Sauter の式⁽⁷⁾ (2 BN) と、簡単な遮蔽ポテンシャルを仮定して遮蔽を考慮して得られた Schiff の式⁽⁸⁾ (2 BS) とがある。なお、式を区別する記号は参考文献(3)に従って付けた。また、式の導出のための近似とその有効範囲を表 1 に示した。

表-1 制動輻射断面積の式に対する近似とその条件

Approximation	Condition of validity
A. Nonscreened	$137Z^{-1/3} (E_0 E/k)$
B. Nonscreened	$E_0 \ll 137Z^{-1/3}$
C. Complete screening	$E_0 \gg 137Z^{-1/3}$
D. Approximate screening potential:	$(Ze/r) \exp(-r/a)$
E. Born approximation	$(2\pi Z/137\beta_0), (2\pi Z/137\beta) \ll 1$
F. Nonrelativistic	$\beta_0 \ll 1$
G. Extreme relativistic	$E_0, E, k \gg 1$
H. Small angles	$\sin \theta = \theta$
I. Approximation in electron angle integration. Result not accurate for	$\theta \ll (Z^{1/3}/111E_0)$

2 BN 式 近似: (E), (H)

$$d\sigma_{k,\theta,\phi} = \frac{Z^2 r_0^2}{8\pi 137} \frac{dk}{k} \frac{p}{p_0}$$

$$d\Omega_k \left\{ \frac{8\sin^2 \theta_0 (2E_0^2 + 1)}{p_0^2 \Delta_0^4} - \frac{2(5E_0^2 + 2EE_0 + 3)}{p_0^2 \Delta_0^2} \right.$$

$$- \frac{2(p_0^2 - k^2)}{Q^2 \Delta_0^2} + \frac{4E}{p_0^2 \Delta_0} + \frac{L}{p p_0}$$

$$\left. \left[\frac{4E_0 \sin^2 \theta_2 (3k - p_0 E)}{p_0^2 \Delta_0^4} + \frac{4E_0^2 (E_0^2 + E^2)}{p_0^2 \Delta_0^2} \right] \right.$$

$$+ \frac{2 - 2(7E_0^2 - 3EE_0 + E^2)}{p_0^2 \Delta_0^2}$$

$$+ \left. \frac{2k(E_0^2 + EE_0 - 1)}{p_0^2 \Delta_0} \right] - \left[\frac{4\epsilon}{p \Delta_0} \right] + \left[\frac{\epsilon^Q}{p Q} \right]$$

$$\left[\frac{4}{\Delta_0^2} - \frac{6k}{\Delta_0} - \frac{2k(p_0^2 - k^2)}{Q^2 \Delta_0} \right] \} \dots\dots\dots(7)$$

ここで,

$$L = \ln \left[\frac{EE_0 - 1 + p p_0}{EE_0 - 1 - p p_0} \right] \dots\dots\dots(8)$$

$$\Delta_0 = E_0 - p_0 \cos \theta_0 \dots\dots\dots(9)$$

$$\epsilon = \ln \left[\frac{E + p}{E - p} \right] \dots\dots\dots(10)$$

$$\epsilon^Q = \ln \left[\frac{Q + p}{Q - p} \right] \dots\dots\dots(11)$$

$$Q^2 = p_0^2 + k^2 - 2p_0 k \cos \theta_0 \dots\dots\dots(12)$$

2BS 式 近似: (E), (D), (I), (G), (H)

$$d\sigma_{k,\theta} = \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \frac{dk}{k} y dy \left\{ \frac{16y^2 E}{(y^2 + 1)^4 E_0} \right.$$

(74)

$$- \frac{(E_0 + E)^2}{(y^2 + 1)^2 E_0^2} + \left\{ \frac{E_0^2 + E^2}{(y^2 + 1)^2 E_0^2} \right.$$

$$\left. - \frac{4y^2 E}{(y^2 + 1)^4 E_0} \right\} \ln M(y) \} \dots\dots\dots(13)$$

ここで,

$$y = E_0 \theta_0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{1}{M(y)} = \left(\frac{k}{2E_0 E} \right)^2 + \left(\frac{Z^{1/3}}{111(y^2 + 1)} \right)^2 \dots\dots\dots(15)$$

2.2.3 光子エネルギーに関する微分断面積

$d\sigma_{k,\theta,\phi}$ を, 光子運動方向 θ, ϕ について積分すると, 光子エネルギー k に関する微分断面積が得られる。この断面積のパラメータは, E_0, Z, k である。前節の2BN 式を積分すると, 遮蔽を無視した, Sauter の $d\sigma_k$ の式⁽⁷⁾ (3BN) が得られ, 2BS を積分すると遮蔽を考慮した, Sciff の $d\sigma_k$ の式⁽⁸⁾ (3BS (e)) が得られる。

3BN 式 近似: (E), (H)

$$d\sigma_k = \frac{Z^2 r_0^2}{137} \frac{dk}{k} \frac{p}{p_0} \left\{ \frac{4}{3} - 2E_0 E \left(\frac{p^2 + p_0^2}{p^2 p_0^2} \right) \right.$$

$$+ \frac{\epsilon_0 E}{p_0^3} + \frac{\epsilon E_0}{p^3} - \frac{\epsilon \epsilon_0}{p_0 p}$$

$$+ L \left[\frac{8E_0 E}{3p_0 p} + \frac{k^2 (E_0^2 E^2 + p_0^2 p^2)}{p_0^3 p^3} \right.$$

$$+ \frac{k}{2p_0 p} \left(\frac{E_0 E + p_0^2}{p_0^3} \right) \epsilon_0 - \left. \left(\frac{E_0 E + p^2}{p^3} \right) \epsilon \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2kE_0 E}{p^2 p_0^2} \right) \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここで

$$L = 2 \ln \left[\frac{E_0 E + p_0 p - 1}{k} \right] \dots\dots\dots(17)$$

$$\epsilon_0 = \ln \left(\frac{E_0 + p_0}{E_0 - p_0} \right) \dots\dots\dots(18)$$

$$\epsilon = \ln \left(\frac{E + p}{E - p} \right) \dots\dots\dots(19)$$

3BS (e) 近似: (E), (D), (I), (G)

$$d\sigma_k = \frac{2Z^2 r_0^2}{137} \frac{dk}{k} \left\{ \left(1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \right) \right.$$

$$\left. \left(\ln M(0) + 1 - \frac{2}{b} \tan^{-1} b \right) + \frac{E}{E_0} \frac{2}{b^2} \ln(1 + b^2) \right.$$

$$\left. + \frac{4(2 - b^2)}{3b^3} \tan^{-1} b - \frac{8}{3b^2} + \frac{2}{9} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここで,

$$b = \left(\frac{2E_0 E Z^{1/3}}{111k} \right) \dots\dots\dots(21)$$

$$\frac{1}{M(0)} = \left(\frac{k}{2E_0 E} \right)^2 + \left(\frac{Z^{1/3}}{111} \right)^2 \dots\dots\dots(22)$$

ボルン近似に対してクーロン場の補正を加えて得られた波動関数を用いて, 多くの断面積の式が計算され

ている。

その中で、適用範囲が広く、計算し易いのは Olsen の式⁽⁵⁾ (3CS (C)) である。この式は、50MeV 以上のエネルギーの電子に有効である。

3CS (C)式 近似 : (G)

$$d\sigma_k = \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \frac{dk}{k} \left\{ \left(1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \right) \left[\frac{\phi_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] - \left(\frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \right) \left[\frac{\phi_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z - f(Z) \right] \right\} \quad (23)$$

ここで、

$$\phi_1(\gamma) = 5.089e^{-0.6587\gamma} + 15.661e^{-0.0481\gamma} \dots\dots\dots(24)$$

$$\phi_2(\gamma) = \phi_1(\gamma) - 0.595e^{-3.04\gamma} \dots\dots\dots(25)$$

$$f(Z) = 1.2021(Z/137)^2 \quad \text{低い } Z \text{ に対して}$$

$$f(Z) = 0.925(Z/137)^2 \quad \text{高い } Z \text{ に対して} \dots\dots\dots(26)$$

γ : (3)式

2.2.4 全断面積

ハイトラーは

$$\phi_{rad} = (1/E_0) \int_0^{T_0} k_{d\sigma k} \dots\dots\dots(27)$$

を、電子の輻射によるエネルギー損失断面積として導入した⁽¹⁾。 ϕ_{rad} のパラメータは E_0 と Z である。 ϕ_{rad} の式としては、遮蔽を無視した Heitler の式 (4BN)、その超相対論領域における近似式 (4 BN (b))、遮蔽を考慮した式 (4BS) がある。

4BN 近似 : (E), (A)

$$\phi_{rad} = \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \left\{ \frac{(12E_0^2 + 4)}{3E_0 p_0} \ln(E_0 + p_0) - \frac{(8 E_0 + 6p_0)}{3E_0 p_0^2} (\ln(E_0 + p_0))^2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{E_0 p_0} [F(x)] \right\} \dots\dots\dots(29)$$

ここで、

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+y)}{y} dy \dots\dots\dots(29)$$

$$x = 2p_0 (E_0 + p_0) \dots\dots\dots(30)$$

4BN (b) 近似 : (E), (B), (G)

$$\phi_{rad} = \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \left(\ln 2E_0 - \frac{1}{3} \right) \dots\dots\dots(31)$$

4BS 近似 : (E), (C), (G)

$$\phi_{rad} = \frac{4Z^2 r_0^2}{137} \ln(183Z^{-1/3}) + \frac{1}{18} \dots\dots\dots(32)$$

2.3 補 正

2.3.1 クーロン補正

非相対論領域 ($T_0 \ll 1$) あるいは、超相対論領域

($T_0 \geq 50\text{MeV}$) では、クーロン波動関数を用い、ボルン近似を用いずに、制動輻射断面積が計算できる。クーロン補正は、これを用いてボルン近似式を補正することである。

まず、非相対論的エネルギー領域では、ボルン近似の条件、 $(2\pi Z/137\beta_0) \ll 1$ が成り立たないので補正が必要となる。Elwert⁽⁹⁾は、非相対論的ボルン近似計算と、Sommerfeld による非相対論的クーロン関数を用いて得られた断面積とを比較して、補正因子 f_E (Elwert 因子) を見積った。

$$f_E = \frac{\beta_0 \{1 - \exp[-(2\pi Z/137\beta_0)]\}}{\beta \{1 - \exp[-(2\pi Z/137\beta)]\}} \dots\dots\dots(33)$$

補正は、 f_E を非相対論的ボルン近似断面積に乗ずることにより行われる。この式が成り立つための条件は、 $(Z/137) (1/\beta - 1/\beta_0) \ll 1$ であり本補正により、約0.1 MeV 以下の電子に対する断面積の精度は約10%になる⁽³⁾。

次に超相対論的エネルギー領域では、超相対論的クーロン波動関数を用いた断面積が計算されている⁽⁵⁾。これは、ボルン近似断面積に Δ を加えた式になっている⁽³⁾、 Δ は、

$$\Delta = -\frac{4\pi Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{dk}{k} \left[1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{E}{E_0} \right) \right] f(Z) \dots\dots\dots(34)$$

ここで、

$$f(Z) = 1.20(Z/137)^2 \quad \text{: 小さな } Z \text{ に対して}$$

$$0.925(Z/137)^2 \quad \text{: 大きな } Z \text{ に対して}$$

Δ は常に負であるので、本補正により断面積計算値は、10%程度小さくなり、計算値の精度は約2%である⁽³⁾。(23)式は、遮蔽補正が行われたボルン近似式の1つに本補正が加えられたものである。

本研究の計算は、2~50 MeV の電子について行っているが、この範囲では、クーロン補正のための式がないので、本補正は行わない。

2.3.2 高エネルギー端補正

高エネルギー端とは、制動輻射スペクトルの高エネルギー側の限界、すなわち $k \sim T_0$ の付近のことである。さて、ボルン近似の条件の1つに $2\pi Z/(137\beta) \ll 1$ があるが、この条件は、 $\beta \sim 0$ すなわち $k \sim T_0$ の場合満足されず、ボルン近似計算値は実験値として大きくくい違う。すなわち、実験値は $k = T_0$ において有限の値をとるのに対し、ボルン近似値計算値は、 $k = T_0$ において0となる。このため、 $k = T_0$ での断面積の計算式が提案されており、この式により実験値によく一致する値

が得られている⁽¹⁰⁾。また、 $k \sim T_0$ での断面積計算値は、 $k = T_0$ における値と $k < T_0$ におけるボルン近似断面積とを内そうすることにより、実験値に近い値が得られる。しかし、割動輻射スペクトルの形から考えて、例えば $k > 0.95E_0$ の光子が放出される確率は小さい。このため、高エネルギー端における不一致の、遮蔽計算への寄与は小さいと考えられるので、この補正は行わない。

2.3.3 核クーロン場遮蔽補正

断面積の式、2BN, 3BN は、核の電場を純粋には、核から遠い所では軌道電子のクーロン場が核のクーロン場を遮蔽しているため補正が必要となる⁽³⁾。Thomas-Fermi モデルによれば、遮蔽の強さは、 $q_{min} \cdot Z^{-1/3}$ に依存する。ここで、 q_{min} は q の最小値であり、 $k/(2 E_0 \cdot E)$ にほぼ等しい。そのため、遮蔽の程度は、

$$\gamma = \frac{100k}{E_0 E Z^{1/3}} \dots\dots\dots(35)$$

の値で表わされる。ここで γ は Fermi-Tomas 半径・1.37/最大衝突係数と表わすこともできる。 γ の値が小さい程、遮蔽が強く、大きい程弱い。

さて、遮蔽補正断面積は、Bethe⁽⁶⁾と Schiff⁽⁸⁾により計算されている。Bethe は、Fermi-Thomas モデルを使って数値的に計算を行い、 γ の値によっていくつかの式にわかれ、式中の関数の一部がグラフで与えられる計算式を示した。一方、Schiff は、完全遮蔽($\gamma \sim 0$)を仮定し、簡単な遮蔽ポテンシャル

$$(Ze/r) \exp(-r/a) \dots\dots\dots(36)$$

ここで、 $a = (111/Z^{1/3})$

を仮定して、解析的な式、2BS, 3BS(e)を導いた。Schiff は、3BS(e)式と Bethe の式の差は、4%以内であるとしている。従って、Schiff の式は、計算が容易な形になっており、また、放射線遮蔽計算に用いるには、十分な精度をもっている。よって、本研究では、核クーロン場の遮蔽補正の式として、Schiff の式を用いた。

2.3.4 電子対電子制動輻射補正

前節に示した断面積の公式では核のクーロン場のみが扱われており、軌道電子のクーロン場と入射電子との相互作用による制動輻射は無視されていた。この場合、多くのエネルギーと運動量が反跳電子に移行し、正確な扱いは、大変複雑になる⁽¹¹⁾。しかし、軌道電子を自由電子と仮定し、入射電子のエネルギーを超相対論領域に限ることにより、この相互作用の断面積として、核-電子断面積の Z^2 を Z で置き換えた式が得られる⁽¹⁾。よって本補正は、前節に示した断面積の式の

Z^2 を $Z(Z+1)$ で置き換えることにより行うことができる。

本研究では、本補正を行った。

3. 断面積の計算に計算および実験との比較

3.1 光子エネルギーと方向に関する微分断面積

金、アルミニウム、ベリリウムの運動エネルギー 9.66, 4.54, 2.72MeVの電子に対する制動輻射二重微分断面積 $d\sigma_k, \theta_0 / (d\Omega_k, dk)$ の実験値および Sauter の式(2BN)と Schiff の式(2BS)による計算値を図2~4に示す⁽¹²⁾。計算値と実験値とを比較すると、金、アルミニウムについては一般的に Schiff の式による

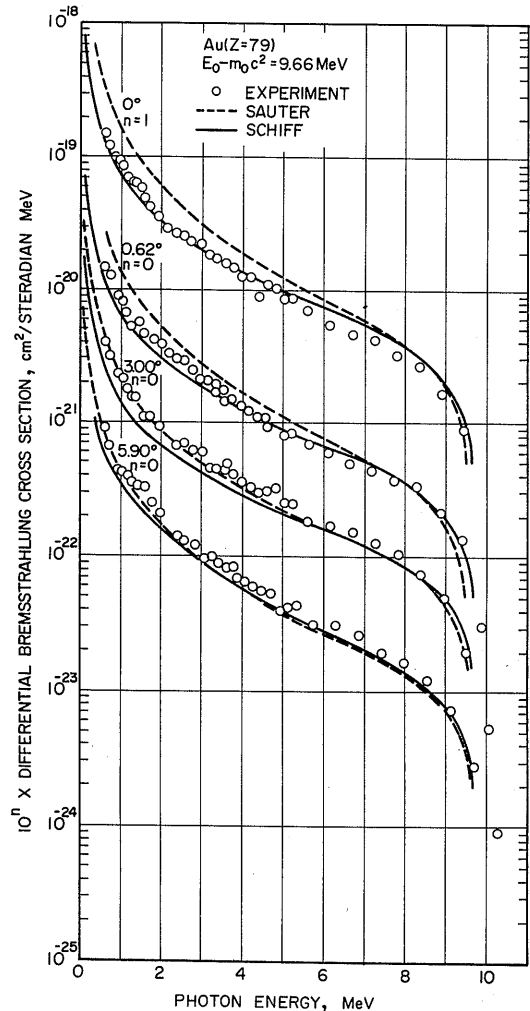


図-2(a)

計算値の方が Sauter の式による計算値よりも実験的によく一致している。また、ベリリウムについては、Sauter の式による値と Schiff の式の値の差が小さく、両者とも実験値によく一致している。なお、ベリリウムは $Z=4$ であり、電子対電子制動輻射の割合が、制動輻射全体の約20%となるため、図4に示したベリリウムに対する計算値は、Sauter と Schiff の式に電子対電子制動輻射の寄与を含めて計算^(註3)した。

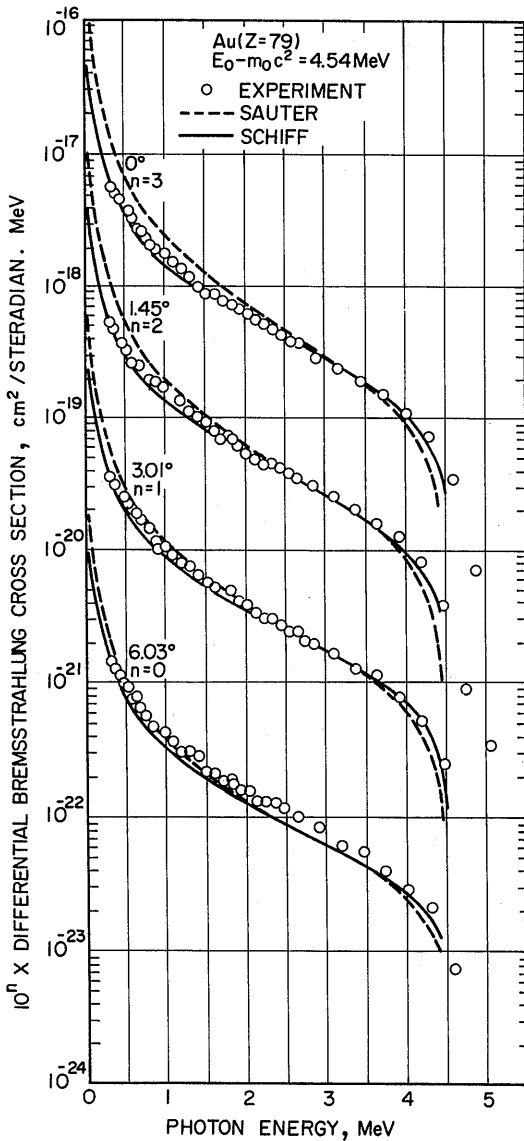


図-2(b)

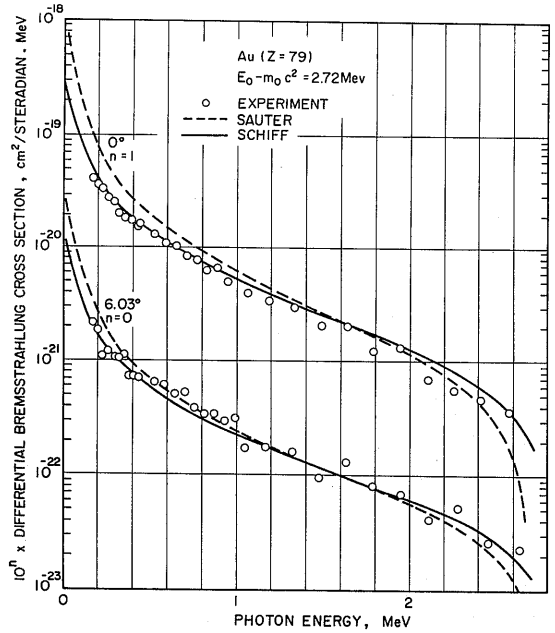


図-2(c)

図-2 金に対する2重微分制動輻射断面積 $d\sigma_{k,\theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66 MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。文献(1)より引用。

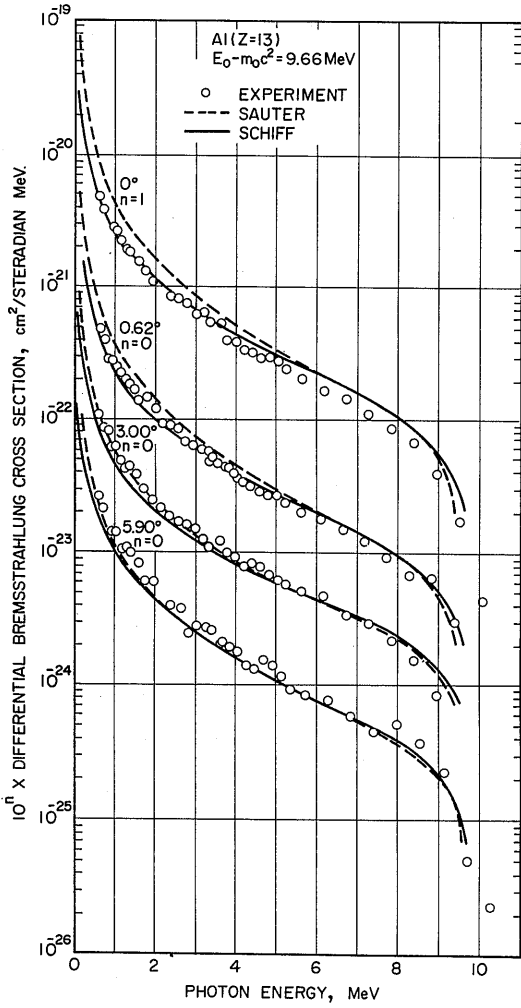


图-3(a)

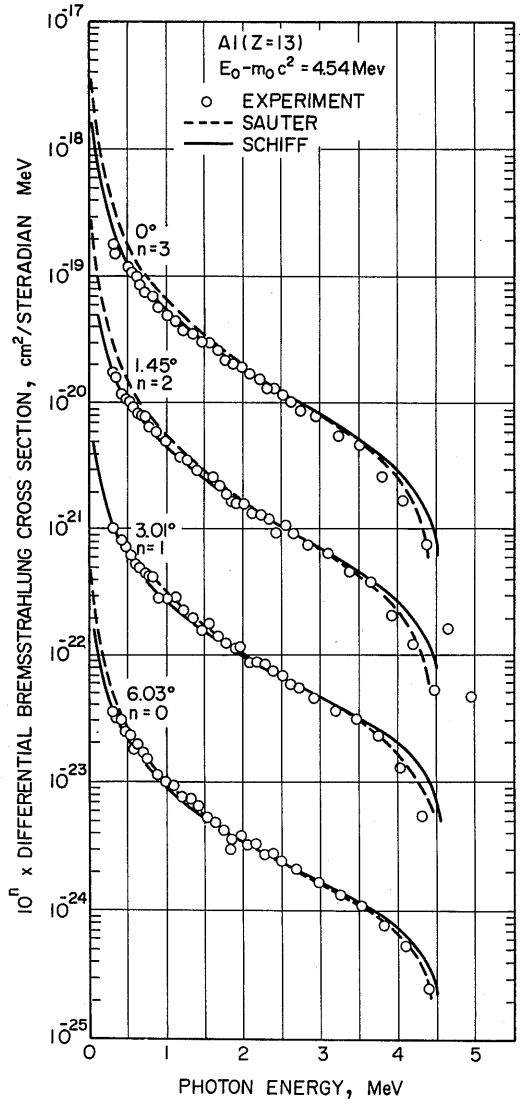


图-3(b)

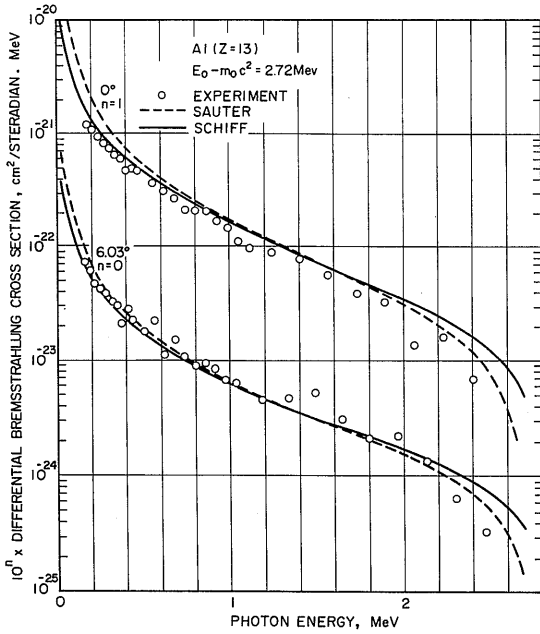


図-3(c)

図-3 アルミニウムに対する2重微分制動輻射断面積 $d\sigma_{k,\theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66 MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。文献(12)より引用。

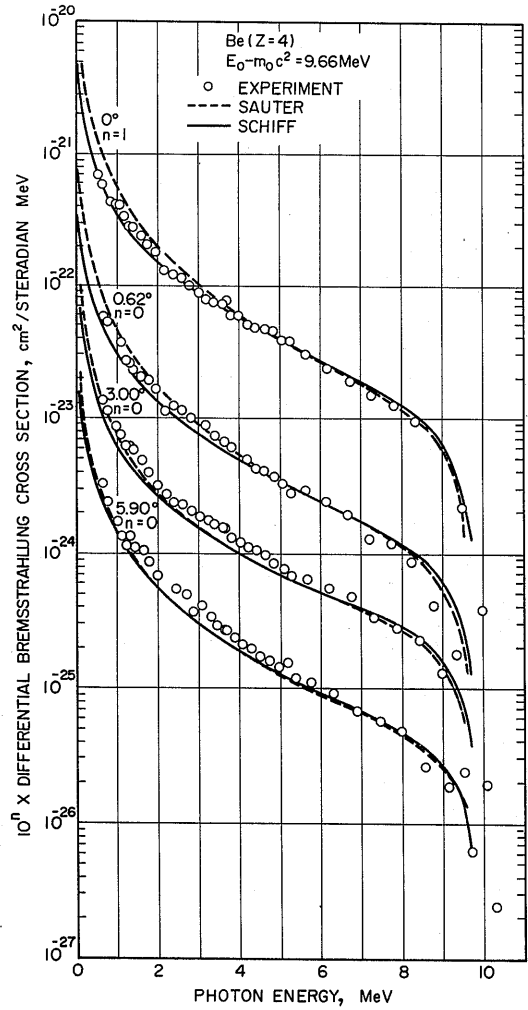


図-4(a)

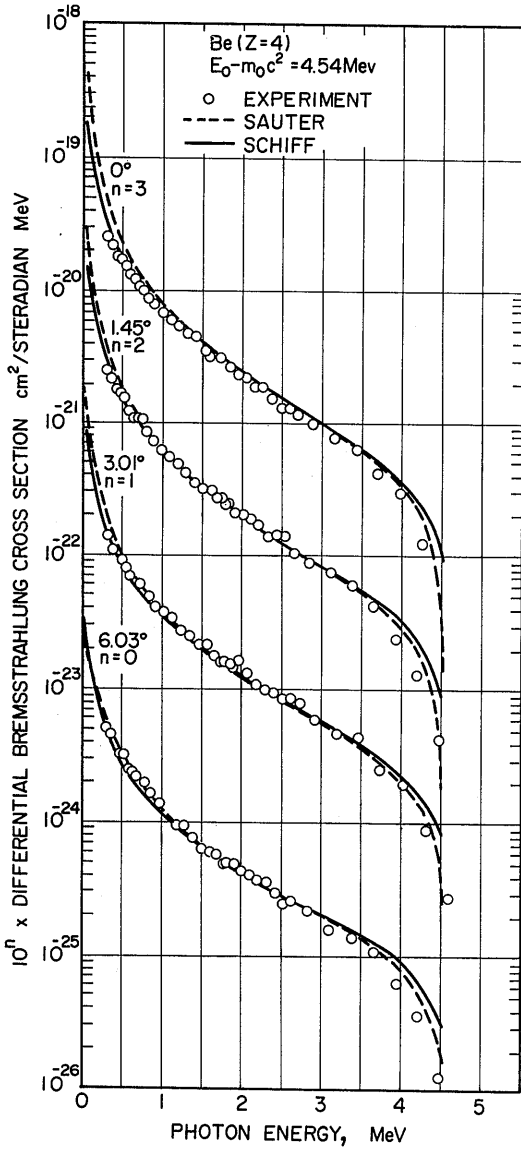


図-4(b)

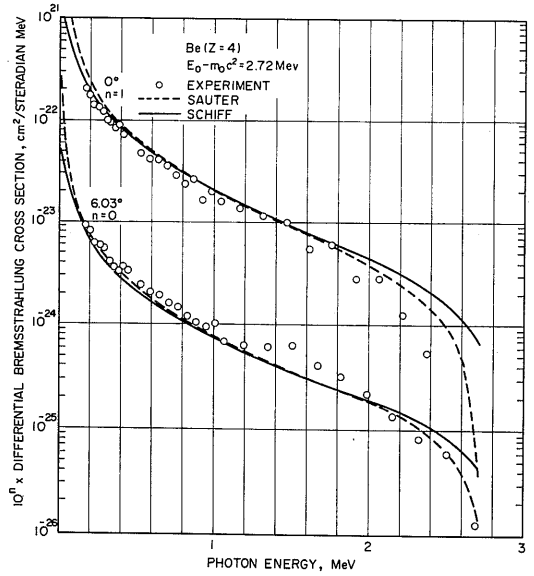


図-4(c)

図-4 ベリリウムに対する2重微分制動輻射断面積 $d\sigma_{k, \theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。文献(12)より引用。

以上の比較により、Sauter の式または Schiff の式が制動輻射二重微分断面積の計算に有効であることがわかったので、電子対電子制動輻射の寄与を含め、同式を用いて、放射線遮蔽材としてよく用いられる鉛、鉄、炭素の制動輻射二重微分断面積を計算した。結果を図5～7に示す。電子入射エネルギー $E_0 - m_0c^2 = 50, 10, 2\text{MeV}$ 、光子放出角度 $\theta_0 = 0^\circ, 18^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ とエネルギー、角度とも実験値と比較された範囲よりも広い範囲で計算を行ったが、エネルギー範囲の拡張については、両式ともエネルギーの変化により急激な変化を起さないのが妥当であると考えられる。角度範囲の拡張については、Schiff の式に $\sin\theta_0 \sim \theta_0$ という条件があるため、同式は $\theta_0 = 0^\circ, 18^\circ$ では信頼できるものの、 90° 以上では信頼性が低いと考えられる。また、Sauter の式には角度についての条件がないので、すべての θ_0 に対して同式を使うことは妥当であると考えられる。なお、 $\theta_0 = 0^\circ$ については、実験値との比較から考えて Schiff の式の方が信頼性が高く、Sauter の式は、実験値の2倍程度の過大評価になっていると考えられる。

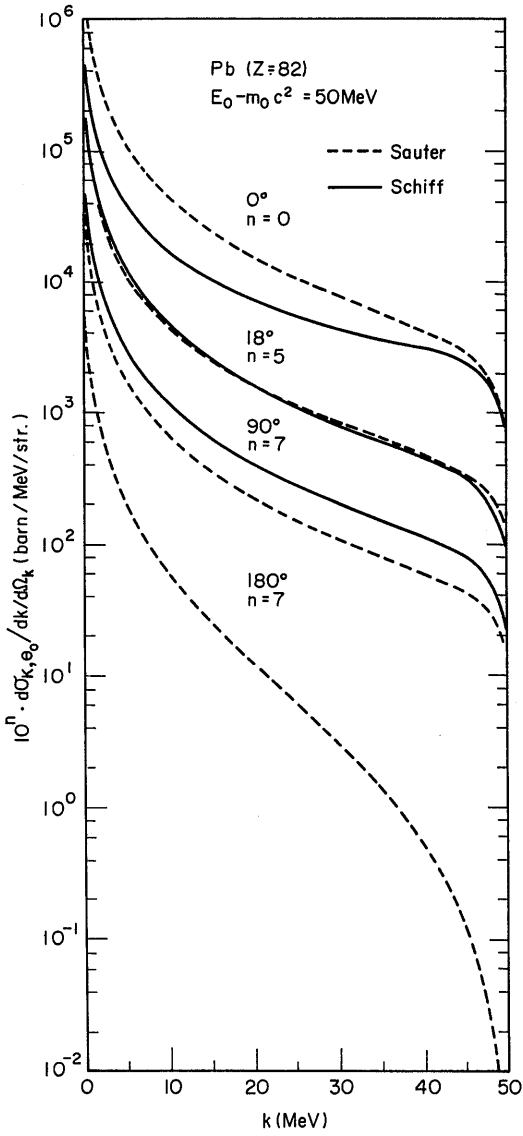


图-5(a)

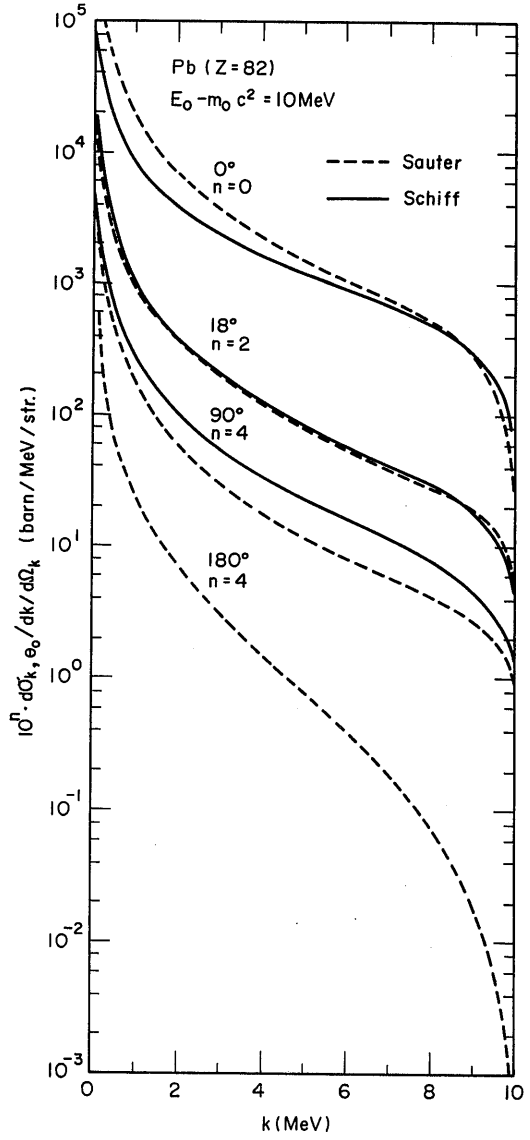


图-5(b)

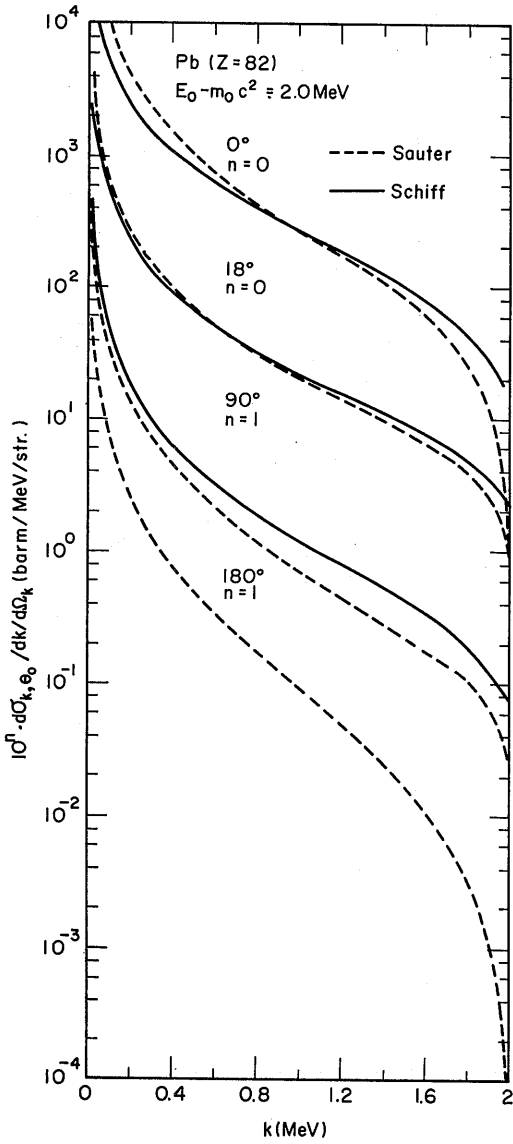


図-5(c)

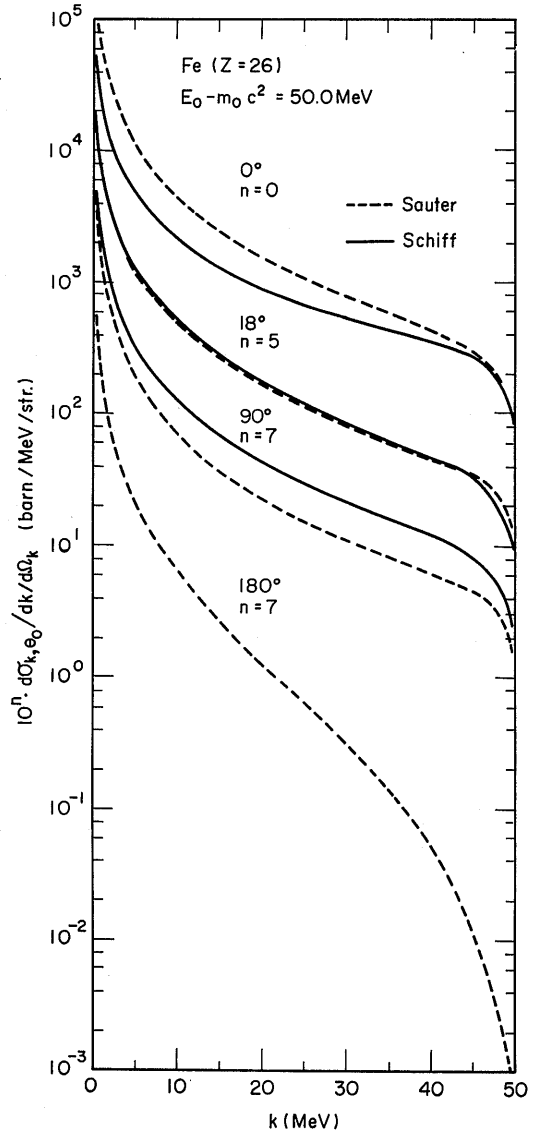


図-6(a)

図-5 鉛に対する2重微分制動輻射断面積 $d^2\sigma_{k,\theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a)50 MeV, (b)10 MeV, (c) 2 MeV。

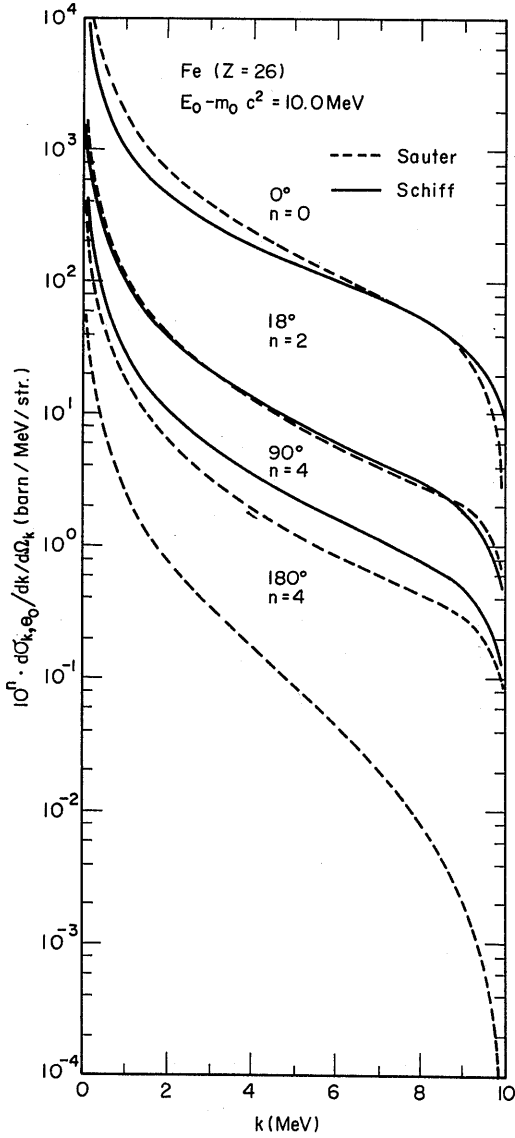


図-6(b)

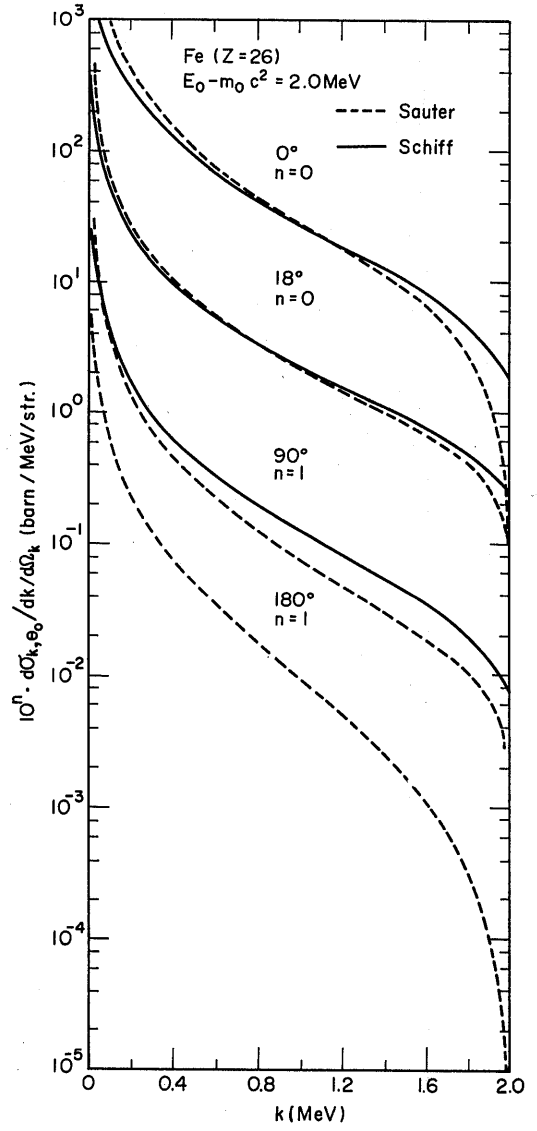


図-6(c)

図-6 鉄に対する2重微分制動輻射断面積 $d\sigma_{k, \theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a) 50 MeV, (b) 10 MeV, (c) 2 MeV。

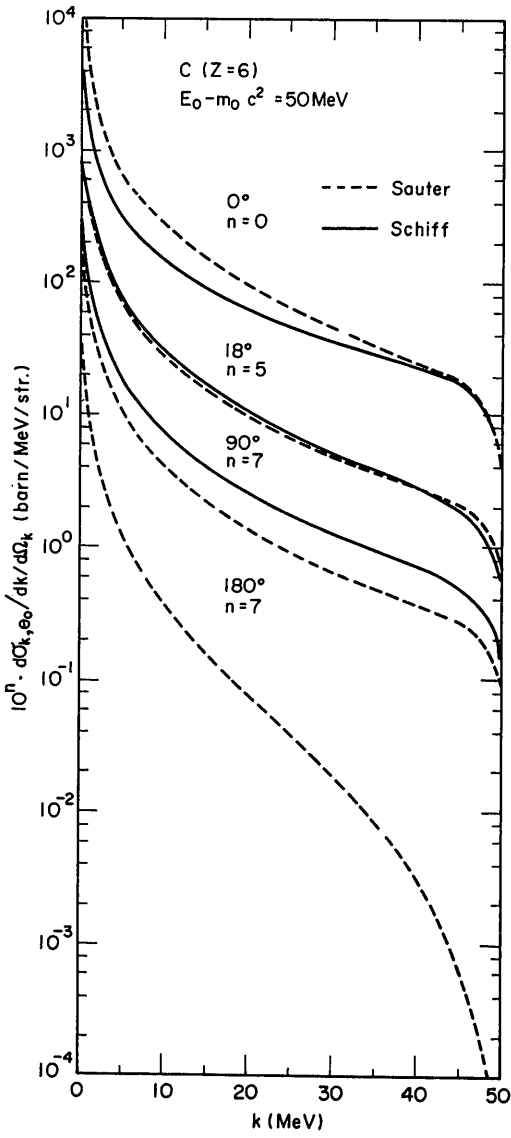


图-7(a)

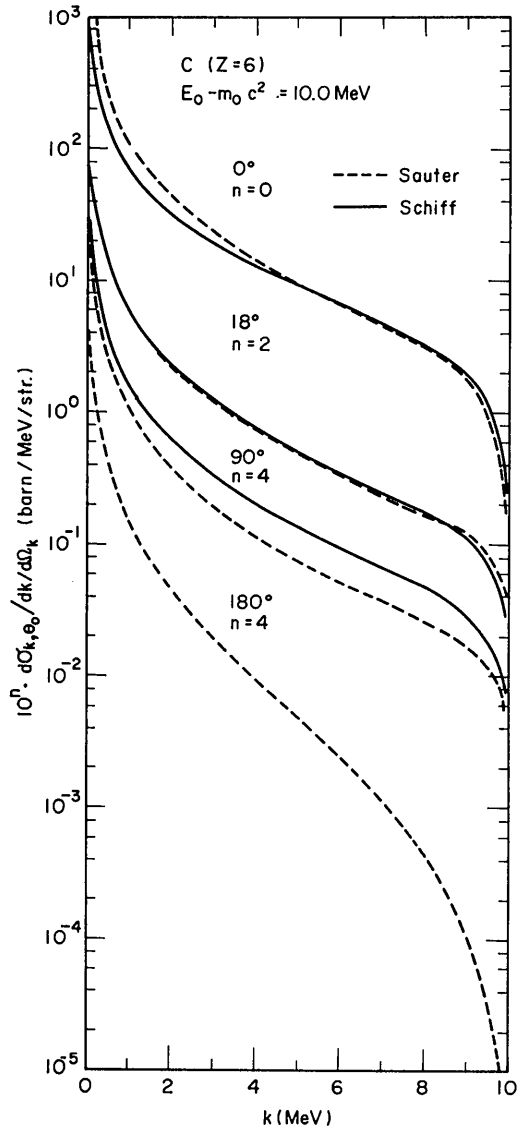


图-7(b)

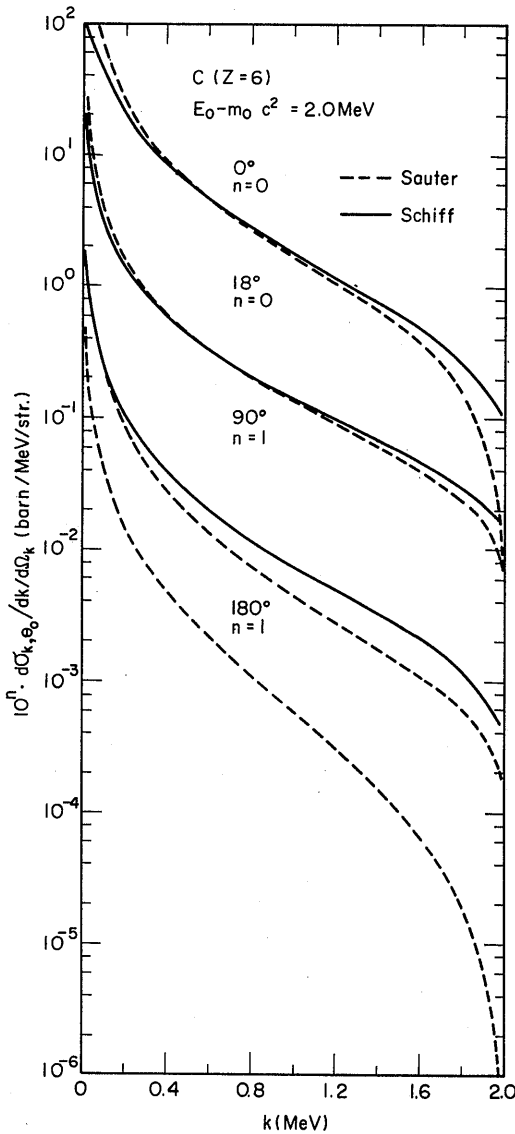


図-7(c)

図-7 炭素に対する2重微分制動輻射面積 $d\sigma_{k,\theta_0}$ の光子エネルギーと光子放出方向 θ_0 依存。入射電子運動エネルギーは、(a) 50 MeV, (b) 10 MeV, (c) 2 MeV。

(注1) (7)式および(13)式によって、 $d\sigma_{k,\theta_0}/(d\Omega \cdot dk)$ を計算すると、 $[\text{cm}^2/(\text{sr} \cdot \mu)]$ 単位で値が得られるので、図2~7に示されるような $[\text{cm}^2/(\text{sr} \cdot \text{MeV})]$ 単位の値を得るためには、計算値を(1/0.511)倍しなければならない。

(注2) Schiffの二重微分断面積の式である

(13)式では、角度変数として y が用いられているので、同式を用いて $d\sigma_{k,\theta_0}/(d\Omega \cdot dk)$ を得るためには、下の dy と $d\Omega$ の関係式を用いて、 dy を $d\Omega$ に変える必要がある。

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$$

$$y = E_0 \theta_0$$

$$dy/d\theta_0 = E_0$$

$$E_0 d\Omega = 2\pi \sin\theta_0 dy$$

(注3) (7)式および(13)式において Z^2 を $Z(Z+1)$ に変更する。

3.2 光子エネルギーに関する微分断面積

運動エネルギー9.66, 4.54, 2.72 MeVの電子に対する金、アルミニウム、ベリリウムの制動輻射微分断面積 $d\sigma_k/dk$ の実験値および Sauter の式(3BN), Schiff の式(3BS)による計算値を図8~10に示す。実験値は、文献(12)から引用した。なお、実験値は、 $k/(E_0 - m_0 c^2) = 0.5$ の所で計算値に規格化されている。また、計算には電子対電子制動輻射の寄与が含まれている。実験値と計算値を比較すると、実験値とそれに近い方の計算値の差は、大きい所で約50%、平均的には10%程度である。また、Sauterの式による計算値の方がSchiffの式による値よりも全般的に実験値に近いが、金(4.54 MeV), Be(2.72 MeV)のようにSchiffの式の方が実験値に近くなる場合もある。以上の比較からSauterの式が、実験値をよく再現することがわかったので、同式を用い、そして、比較のためSchiffの式も用いて、電子対電子制動輻射の寄与を含めて、放射線遮蔽上重要な物質である鉛、鉄、炭素の制動輻射微分断面積を計算した。これを図11~13に示す。電子入射エネルギー $E_0 - m_0 c^2$ は50, 10, 2 MeVとし、50 MeVの場合には、クーロン波動関数を用いて得られたOlsenの式(3cs(c))による計算も行い、他の式による値と比較した。その結果、Olsenの式による計算値は、Schiffの式の値よりも、鉛で約10%、鉄と炭素で数%小さくなることがわかった。放射線遮蔽計算には、これらの断面積の中のどれを用いるのが適切であるかを考えてみる。まず、電子の入射エネルギーが10 MeV以下の場合には、

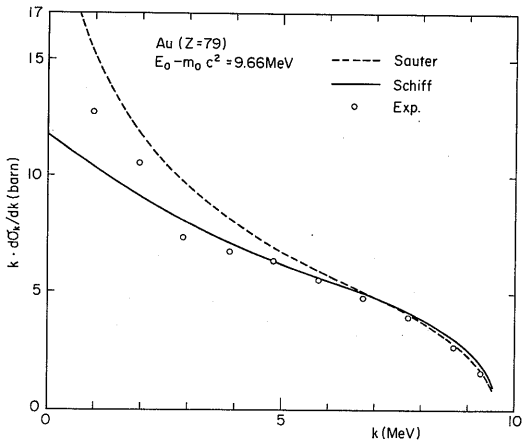


図-8(a)

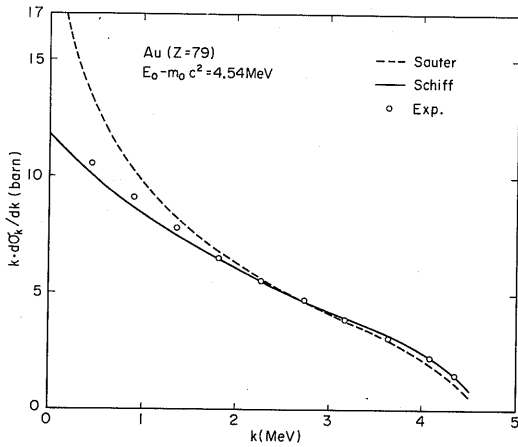


図-8(b)

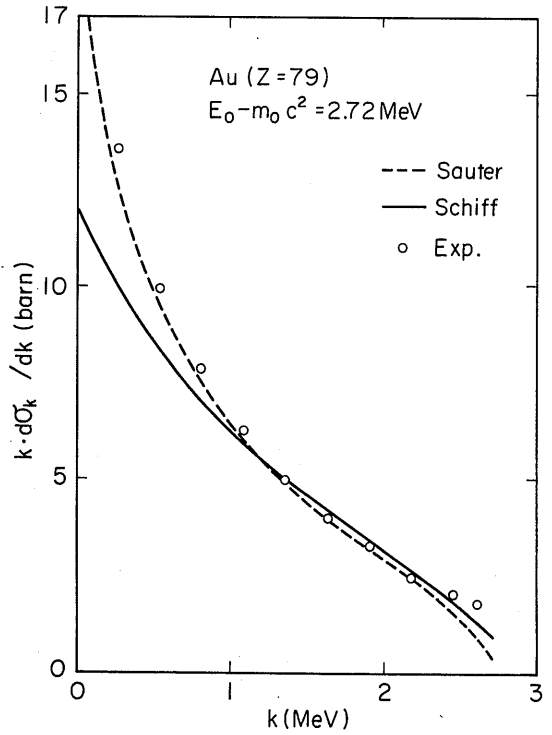


図-8(c)

図-8 金に対する微分制動輻射面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66 MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。

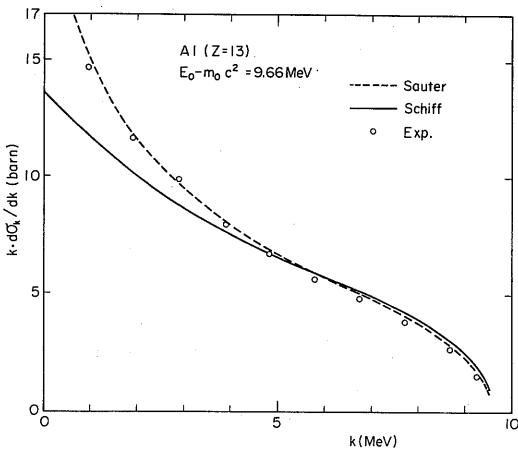


図-9(a)

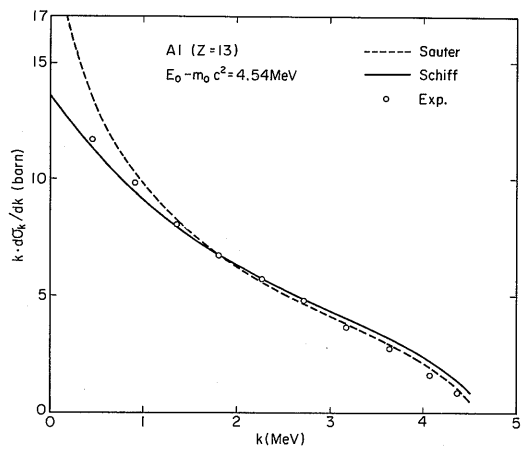


図-9(b)

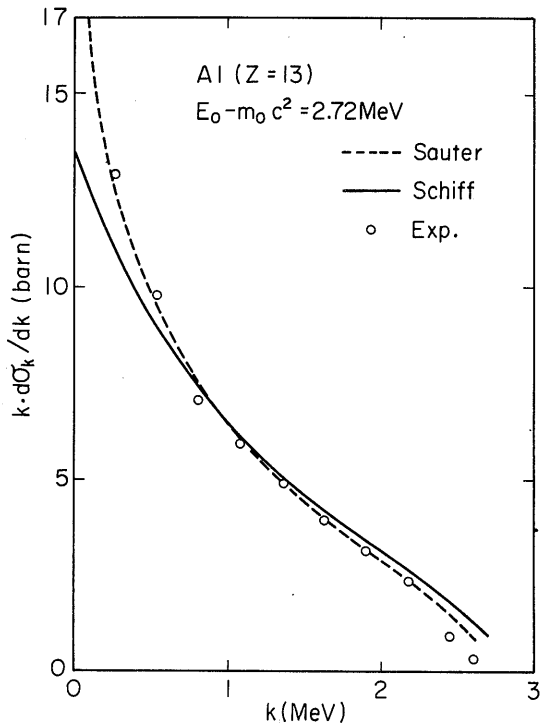


図-9(c)

図-9 アルミニウムに対する微分制動輻射断面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66 MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。

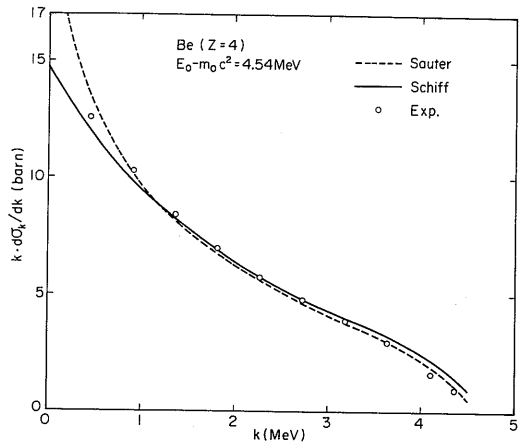


図-10(b)

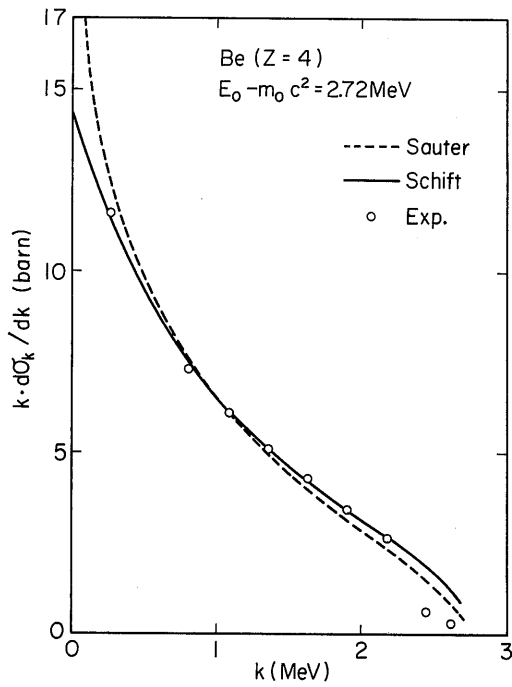


図-10(c)

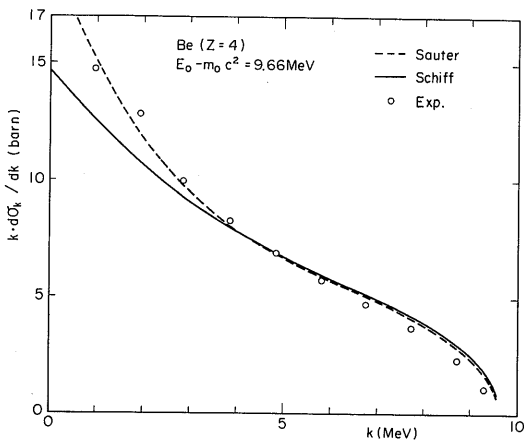


図-10(a)

図-10 ベリリウムに対する微分制動輻射断面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子運動エネルギーは、(a)9.66 MeV, (b)4.54 MeV, (c)2.72 MeV。

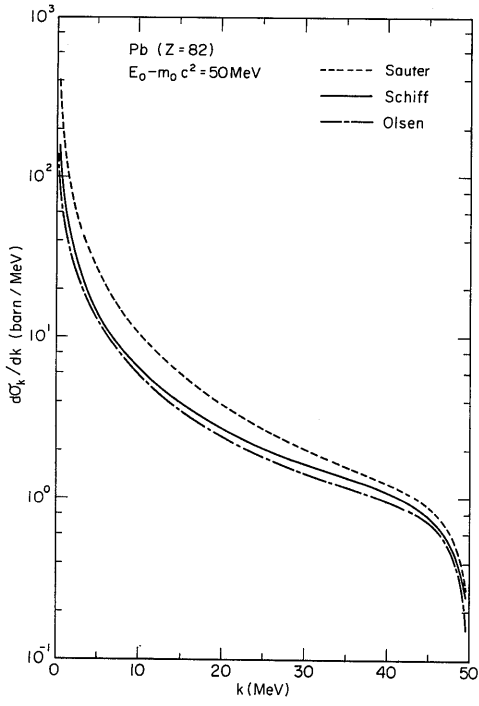


図-11(a)

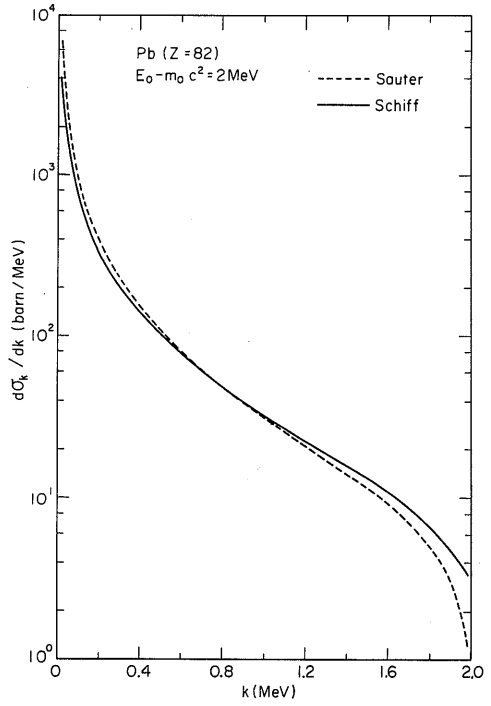


図-11(c)

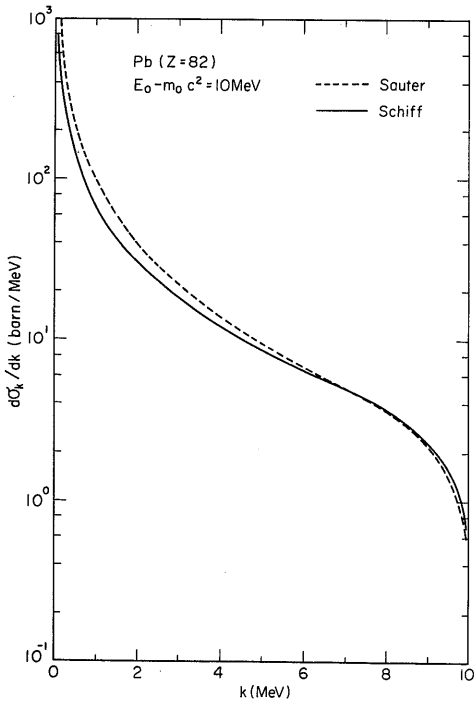


図-11(b)

図-11 鉛に対する微分制動輻射断面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子エネルギーは、(a)50 MeV, (b)10 MeV, (c)2 MeV。

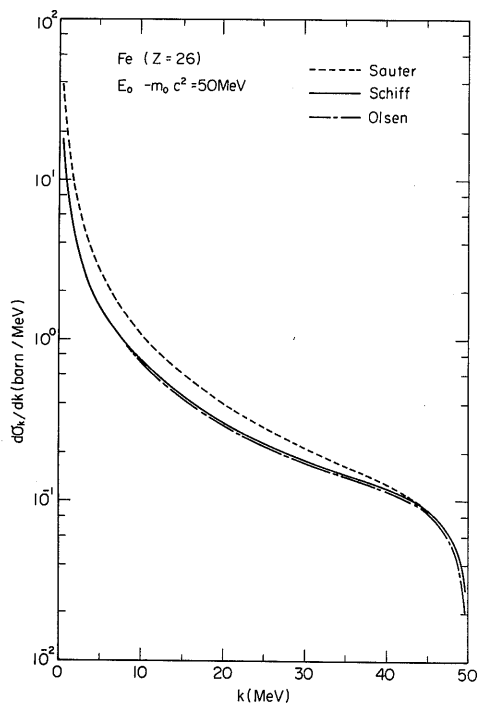


図-12(a)

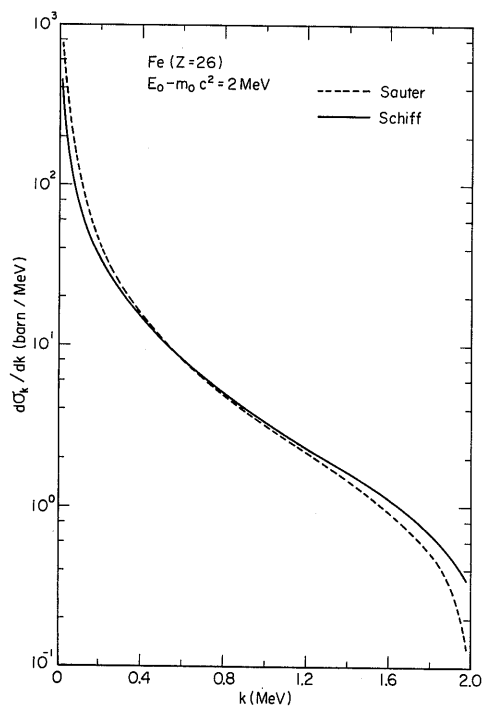


図-12(c)

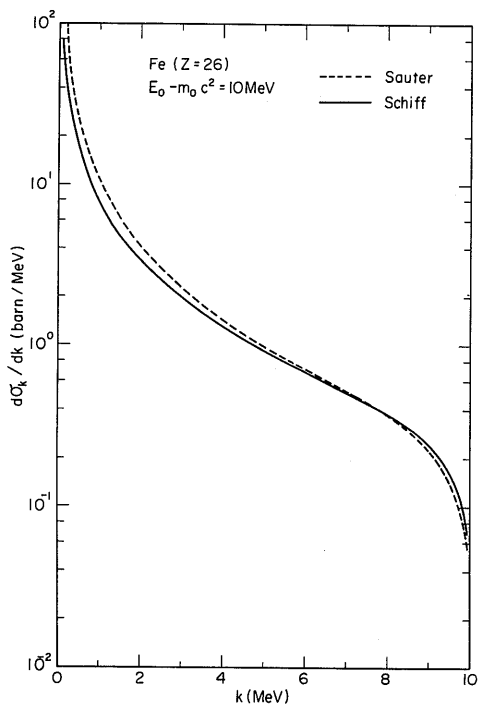


図-12(b)

図-12 鉄に対する微分制動輻射断面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子運動エネルギーは、(a)50 MeV, (b)10 MeV, (c)2 MeV。

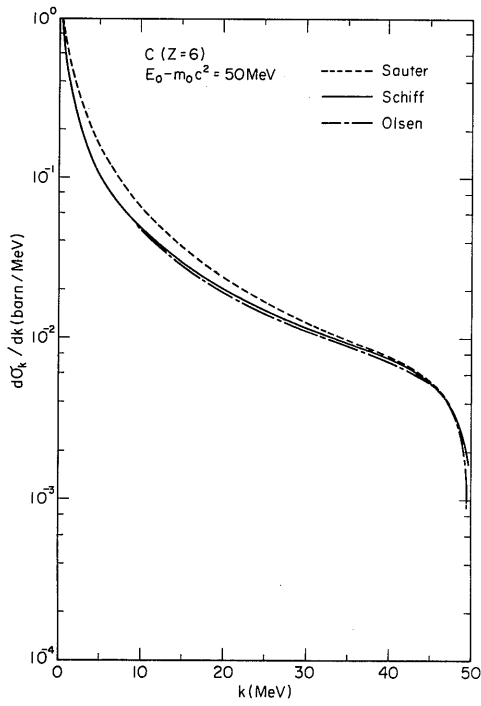


図-13(a)

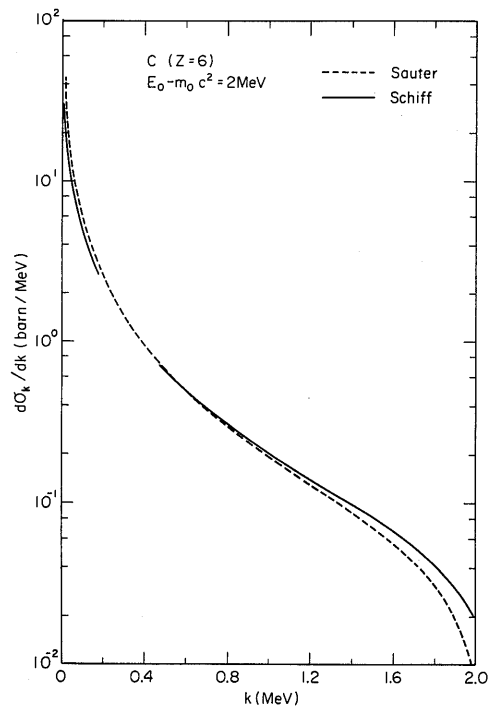


図-13(c)

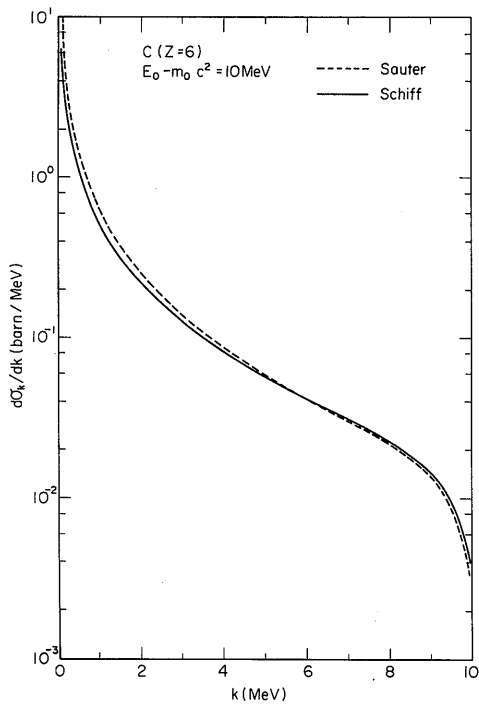


図-13(b)

図-13 炭素に対する微分制動輻射断面積 $d\sigma_k$ の光子エネルギー依存。入射電子運動エネルギーは、(a)50 MeV, (b)10 MeV, (c)2 MeV。

実験値との比較から考えて Sauter の式 (3BN) が信頼性が高く、これを用いるのが適切であると考えられる。電子の入射エネルギーが50MeV 程度の場合には、クーロン波動関数の補正と軌道電子による核電場遮蔽補正が行われている点から Olsen の式が一番信頼できる。しかし、それらの補正の効果が、実験値との比較によって確かめられたわけではないので、10MeV, 3 MeV で実験値とのよく一致している Sauter の式をそのまま50MeV で用いることも、適切さを欠くとは言えない。

3.3 物質に入射した電子が静止するまでに放出する制動輻射強度

入射運動エネルギー T_i の電子が遮蔽体の中で止められる時にエネルギー間隔 k から $k+dk$ の間に放出される光子の数 $n(k)$ は

$$n(k) = dk \int_{k+1}^{T_i+1} \frac{Nd\sigma_k/dk}{-dE_0/dx} dE_0 \dots\dots\dots(37)$$

で与えられる⁽⁶⁾⁽¹¹⁾。

また、電子のエネルギー損失 $-dE_0/dx$ は、

$$\begin{aligned} -\frac{dE_0}{dx} &= \frac{ZE_0 + 1600}{1600} \cdot \frac{2\pi NZr_0^2}{E_0^2 - 1} \cdot \\ &\left[E_0^2 \cdot \ln \left\{ \left(\frac{m_0 c^2}{2I} \right)^2 \rho_0^2 E_0 \right. \right. \\ &\left. \left. + (E_0 - 1)^2 \left(\ln 2 + \frac{1}{8} \right) + 1 \right\} \right] \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

で与えられる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。 $n(k)$ は直接観測可能な量ではないが、1個の電子から制動輻射によって発生する全部の X 線のエネルギー分布を示しているのので、放射線遮蔽上は興味ある量である。そこで、鉛、鉄、炭素について、 $T_i = 50, 10, 2\text{MeV}$ とし、 $d\sigma_k/dk$ に Sauter の式を用い、 I の値として (15) に示されているものを使い、シンプソン法により (37) 式の積分を行って、 $n(k)$ を計算した。結果を図14に示す。 $n(k)/dk$ の特徴は、

1. 多重散乱の影響が積み重なり、入射時よりも低エネルギーになってからの制動輻射が加わるため、エネルギー分布が、 $d\sigma_k/dk$ よりも低エネルギー側に片寄っている。
2. (37) 式の分母が、 Z の増加関数となっているため、強度の Z 依存が $d\sigma_k/dk$ よりも弱い。例えば、 $T_i = 50\text{ MeV}$ 、 $k = 20\text{MeV}$ に対する鉛と炭素の $d\sigma_k/dk$ は約100倍違うが、 $n(k)/dk$ は約4倍しか違わない。などの点である。

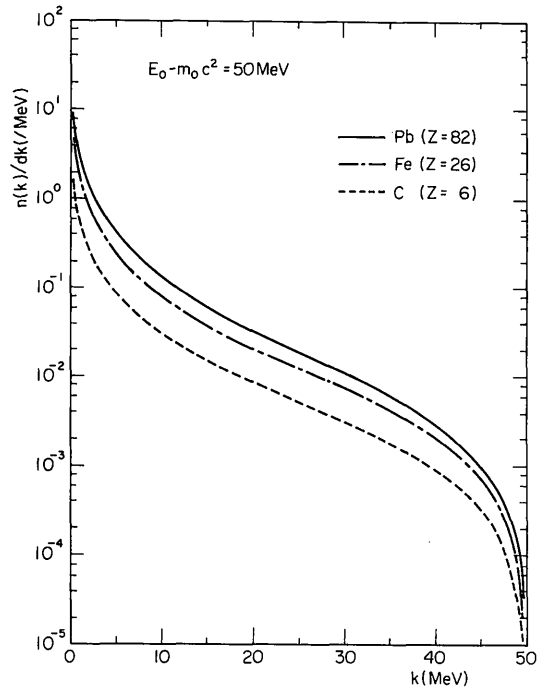


図-14(a)

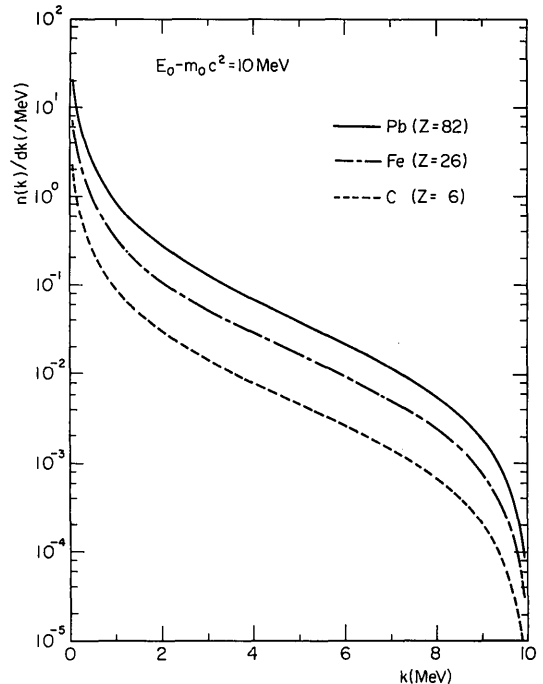


図-14(b)

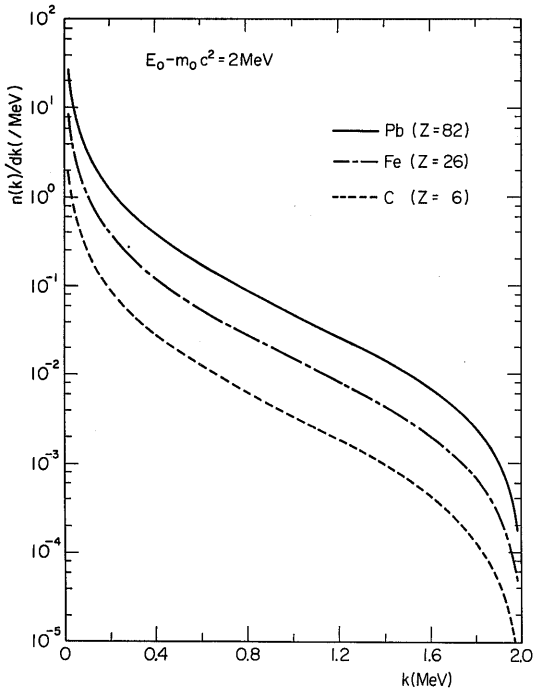


図-14(c)

図-14 鉛，鉄，炭素のそれぞれの無限媒質に入射した運動エネルギー (a) 50 MeV, (b) 10 MeV, (c) 2 MeV の電子が静止するまでに放出される全制動輻射光子の光子エネルギー依存。

4. モンテカルロ放射線遮蔽計算への適用の方法

4.1 モンテカルロプログラムへの組み込み位置

モンテカルロ放射線遮蔽プログラムでは、図15の実線で示される手順で光子を追跡している。すなわち、ある場所で光子が物質と相互作用を起すか否かを判定し、起す場合には、その結果生成する光子を追跡し、起さない場合には、光子の進行方向に沿って次の場所に進み、同様の判定をし、これを光子が体系外に出るまで繰り返す。さて、数 MeV 以上の光子の物質との主な相互作用は、コンプトン散乱、電子対生成であり、この2つの相互作用により運動エネルギー数 MeV 以上の電子が発生するので、プログラム上は、図15の点線で示されるように、コンプトン散乱ルーチン、電子対生成ルーチンの後に制動輻射ルーチンを付け加えることになる。制動輻射ルーチンには、入射電子の全エネルギー E_0 、運動方向、媒質の原子番号が入力され、この E_0 が (37) 式等の E_0 として用いられ、電子の運動方向が、制動輻射の角度分布の 0° 方向として用いられる。そして、制動輻射光子のエネルギー、運動方向が計算され、制動輻射光子は、一次光子と同様に追跡される。

ところで、MORSE では、コンプトン散乱ルーチン及び電子対生成ルーチンでは、電子の全エネルギー及び運動方向は計算されていないので、制動輻射をモンテカルロコードに取り込むためには、両ルーチンをこれらの値を計算するように改造する必要がある。コン

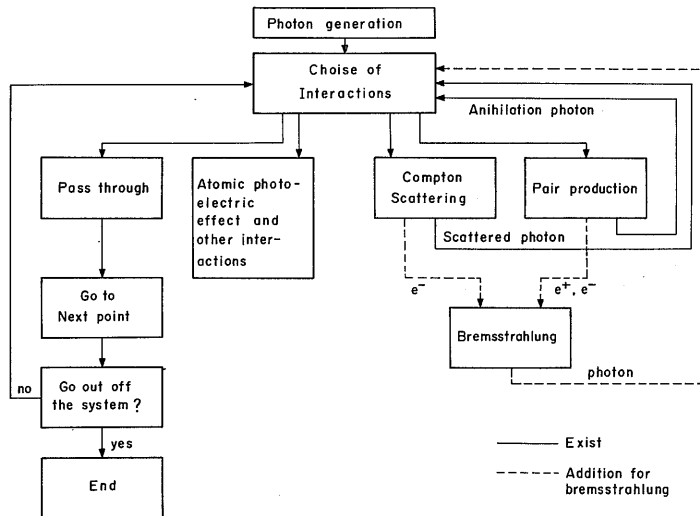


図-15 現在のモンテカルロコードの光子追跡ルーチンと、そこへの制動輻射ルーチンの組み込み。

プトン散乱では、反跡電子のエネルギー分布及び運動方向は、Klein-Nishinaの式⁽¹⁾から計算される。また、電子対生成では、生成する電子のエネルギー分布は、制動輻射と同様にボルン近似によって得られた式により計算⁽¹¹⁾⁽⁶⁾でき、角度分布は、放射線遮蔽計算においては、 0° に集中していると仮定できる⁽¹¹⁾。

なお、電子と物質との主な相互作用の一つである光電効果は、その断面積がエネルギー数100KeV以下の光子に対して大きく、それ以上のエネルギーの光子に対しては急激に小さくなる。そのため、光電効果によって、電子が数MeV以上のエネルギーを持つ可能性は非常に低いので、光電効果により発生した電子の制動輻射は無視する。

4.2 制動輻射光子エネルギー・角度分布

運動エネルギー1~10MeVの電子の平均飛程は、鉛中で0.5cm、アルミニウム中で1cm程度である⁽¹¹⁾ので、放射線遮蔽計算においては、これらの電子は移動せず、発生位置で全エネルギーを失うと仮定できる。この仮定とともに、制動輻射光子のエネルギー分布と角度分布が分離した関数で表わせると仮定すると、エネルギー分布は、(7)式で計算できる。これは、電子が静止するまでに発生する複数個の制動輻射光子を1回の計算で取り扱えることを意味するので、(7)式の使用は、制動輻射の簡便な扱いのために重要である。そして、制動輻射のエネルギー分布と角度分布を分離することは、角度分布が、電子入射エネルギー E_0 や、 k/T_0 に強くは依存しないので妥当な近似である。

次に、角度分布関数としては、次の3つのものが考えられる。

1. 2BS式または、2BN式をそのまま用いる。この場合、電子の多重散乱による角度の広がりには考慮できないが、1回散乱におけるエネルギー角度分布を取り入れることはできる。ただし、データの量が多くなるので、角度分布のエネルギーへの弱い依存が問題にならない場合には、この方法は、実用的ではない。
2. 2BS式または、2BN式から、 k 、 E_0 、 Z に依存しない、平均的な角度分布を計算する。
3. 制動輻射光子は、入射電子と同じ方向にのみ発生すると仮定する。

光子の発生方向の広がり平均 θ は $\theta(\text{rad}) \sim 1/E_0(\mu)$ で見積もることができ、例えば、 $E_0=10\text{MeV}$ ならば $\theta \sim 3^\circ$ となるので、高エネルギー電子に対しては、近似的に光子の発生方向の広がりを無視できる。

5. 結 論

制動輻射の2重微分断面積、微分断面積の代表的な式であるSauterとSchiffの式の有効性の確認するため、入射エネルギー9.66, 4.54, 2.72MeVの電子の金、アルミニウム、ベリリウムに対するそれらの断面積を同式により計算した所、実験値とのよい一致が見られた。Sauterの式とSchiffの式は、実験値とは同程度の一致をするが、Sauterの式の方が、Schiffの式よりも全般的に値が大きいため、安全側であり、放射線遮蔽計算に適していると考えられる。次に、SauterとSchiffの式を用いて、遮蔽上重要な物質である鉛、鉄、黒鉛に対する50, 10, 2MeVの電子の制動輻射二重微分、微分断面積および物質に入射した電子が静止するまでに放出する制動輻射強度を計算し、それらのスペクトルの形と絶対値の核種、電子エネルギー依存を調べた。その結果、二重微分および微分断面積は、電子が入射した物質の原子量の二乗にほぼ比例するのに対して、強度は、 $T_0=2\text{MeV}$ では、物質の原子量にほぼ比例し、 $T_0=10, 50\text{MeV}$ では、原子量への依存は、それよりも小さいことがわかった。例えば、 $T_0=50\text{MeV}$ の電子の黒鉛中での制動輻射強度は、鉛中での強度の約 $1/4$ であった。このことから、高エネルギー電子に対しては、軽い物質中の制動輻射と同様に重要であると言える。最後に、モンテカルロ放射線遮蔽計算プログラムに制動輻射を組み込む方法を検討した結果、二重微分または微分断面積よりも制動輻射強度を用いる方が、エネルギーを受け取った電子が静止するまでに行う複数回の制動輻射を一まとめにして扱えること、電子の追跡、記憶を行わなくてもよいから簡便であり、実用的であることが分った。また、制動輻射光子の放出方向は、電子の進行方向と同じと仮定して、実用上差しつかえないことが分った。

今後、本報告で述べた方法によって、MORSE等のモンテカルロコードに制動輻射を組み込む予定である。

参 考 文 献

- 1) W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation (Oxford University Press, London, 1954), third edition.
- 2) PALLAS-PL, SP-Br Takeuchi et. JAERI-M9695
- 3) H. W. Koch and J. W. Motz Reviews of Modern Physics, 314, 1959.
- 4) A. Sommerfeld, Wellenmechanik (Frederick

- Ungar, New York, 1950), Chap. 7.
- 5) H. Olsen, Phys. Rev. 99, 1335 (1955)
 - 6) H. Bethe and W. Heitler Proc. Roy. Soc. A146 (1934), 83
 - 7) F. Sauter Ann. Physik 20. 404 (1934)
 - 8) L. I. Schiff, Phy. Rev. 83, 252 (1951)
 - 9) G. Elwert, Ann. Physik 34, 178 (1939)
 - 10) Fano, Koch and Motz, Phy. Rev. 112, 1679 (1958)
 - 11) L. M. C. Dutton "The Importance of bremsstrahlung in the shielding of gamma rays having energies less than 10MeV" AEEW-R 675.
 - 12) N. Starfelt and H. W. Koch Phys. Rev, 102, 6 (1956)
 - 13) H. A. Bethe, "Handbuch der Physik" , Julius Springer, Berlin 24, 273 (1933)
 - 14) H. A. Bethe and J. Ashkin, "Passage of Radiations through Matter" ,Part II of Experimental Nuclear Physics" , edited by E. Segr'e, John Willey and Sons Inc. New York, 1, 166 (1953)
 - 15) Table 4, page 203 of reference 14.