

# プロペラ後流中の舵が受ける起振力について\*

菅 井 和 夫\*\*

## On Vibratory Forces induced on the Rudder behind a Propeller

by

Kazuo Sugai

### Summary

This paper deals with the theoretical investigation into the vibratory forces induced on the rudder behind a propeller.

It is shown that the induced velocity in the position of the rudder is almost the same as that far behind a propeller. Therefore, we can adopt the induced velocity far behind a propeller as the circumstances of the rudder. This induced velocity can be obtained by representing the circulation distribution for the propeller with the linear combination of modified Bessel functions.

Since the reduced frequency of the rudder is considerably large, the inductions of oscillating pressure distribution on the rudder are limited in extremely near field of itself. In addition, the oscillating velocity induced by the propeller is concentrated in narrow region near the tip of the propeller. Accordingly, we can treat the rudder as the oscillating wing with low aspect ratio. Then, the problem is reduced to an integral equation. This integral equation has the analytical solution, therefore, the vibratory forces induced on the rudder can be obtained without difficulty.

Calculations are made for the rudder of aspect ratio 2 in the position of 0.5 D behind Troost B4-55 propeller.

## 1. 緒 言

プロペラにより誘起せられる起振力は、bearing force と surface force の2つに大別することができる。bearing force とは、プロペラ翼に働く力が、翼の船体に対する相対的位置により変動するため、プロペラ軸を通して船体に伝達される起振力であり、プロペラがウェーク等のある不均一な流れの中で作動するために起こるものである。一方、surface force とは、プロペラ翼面上に生じた圧力分布が、プロペラ翼が空間的に回転することにより、附近の流れの場に時間的変動を生じ、この流れの中にある物体を介して船体に伝達される起振力であり、たとえプロペラが均一な流れの中で作動している場合でも生ずるものである<sup>1)</sup>。

bearing force については、プロペラが不均一流中におかれるため、いわゆる非定常プロペラとしての取扱が必要となり、理論的にも実験的にも研究は極め

て困難である。surface force については、プロペラそのものは定常プロペラとしての取扱いができるため、研究は割合進んでおり、プロペラ近傍の物体表面に生ずる圧力場については、すでに Breslin によって解明されている<sup>2)</sup>。しかし、プロペラ後流中にある物体の受ける力についてはプロペラ後流そのものが時間的に変動し、かつ場所的にも変化するため、かなり複雑であり、その上、後流中の物体は非定常な取扱いをする必要があるため、研究は困難であり、今までにも見るべきものがほとんどない。

本論文は、理論により、まずプロペラ後流の流れの場の性質を明かにし、次いでその後流中におかれた舵の受ける起振力の性質を、舵を非定常翼として取扱うことにより解明したものである。

## 2. プロペラ後流の流場

線型流体力学の定常プロペラ理論は、渦理論より発展し、近藤博士による加速度ポテンシャル理論の導入により端麗な形に完成した<sup>3)</sup>。さらに最近にいたり、

\*昭和39年5月造船協会春季講演会において発表

\*\*運動性能部

花岡博士による非定常プロペラ理論にまで発展している<sup>4)5)</sup>。本章では、まず花岡博士によって導かれたプロペラ理論を基礎とし、近藤博士が循環分布をベッセル関数で表示することにより、空気プロペラの流場を解いたと同じ手法を船用プロペラに適用し、特に舵近傍におけるプロペラ後流の性質を明かにすることにす

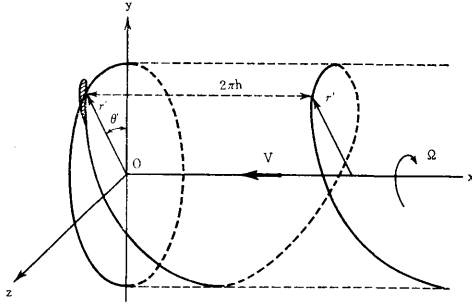


Fig.1 Representation of propeller and trailing vortex

$$\Phi(x, r, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - n/\mu'}{\lambda + n - i\mu^*} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) \times e^{i\{n(\theta-\theta') + \frac{\lambda}{h}(x-x')\} - i2nm\pi/l} d\lambda \quad (1)$$

で与えられる<sup>6)</sup>。したがって、回転方向の誘導速度は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{i}{4\pi^2 \mu h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\mu' \lambda - n/\mu')}{\lambda + n - i\mu^*} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) \times e^{i\{n(\theta-\theta') + \frac{\lambda}{h}(x-x')\} - i2nm\pi/l} d\lambda \quad (2)$$

となる。ただし、 $\mu = r/h$ 、 $h = V/\Omega$  であり、 $(x', r', \theta')$  は翼面上の点の座標を示す。また、 $\Gamma(\mu')$  は翼の循環分布、 $l$  は翼数、 $\mu^*$  は Rayleigh の粘性抵抗を表わしたものである。ここで

$$\frac{n(\mu' \lambda - n/\mu')}{\lambda + n - i\mu^*} = n\mu' - \frac{n^2(\mu' + 1/\mu')}{\lambda + n - i\mu^*} + \frac{i n \mu' \mu^*}{\lambda + n - i\mu^*} \quad (3)$$

と書改めることができる。また

$$\left. \begin{aligned} v &= 1/h(x-x') \\ \varphi_m &= (\theta - \theta') - 2\pi m/l = \varphi - 2\pi m/l \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

の記号を用いることにすると

$$\frac{1}{R(v, \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i v \lambda + i n \varphi} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) d\lambda \quad (5)$$

であるから、両辺を  $\varphi$  で微分すると

$$\frac{-\mu\mu' \sin \varphi}{\sqrt{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi}} = \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \int_{-\infty}^{\infty} e^{i v \lambda + i n \varphi} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) d\lambda \quad (6)$$

となる。(3)、(6) 両式の関係を使つて (2) 式を書改め、 $\mu^* \rightarrow 0$  とすると

(318)

る。

## 2.1 速度ポテンシャルと回転方向誘導速度

Fig.1 のように、プロペラは均一流中を一定角速度  $\Omega$  で回転しながら一定速度  $V$  で  $x$  軸の負の方向に直進しているものとする。空間の任意の点  $(x, r, \theta)$  における速度ポテンシャルは、

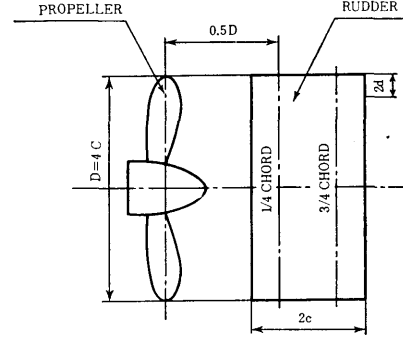


Fig.2 Arrangement of propeller and rudder

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{4\pi\mu h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') \frac{\mu\mu'^2 \sin \varphi}{R(v, \varphi_m)^3} d\mu' \\
&\quad - \lim_{\mu^* \rightarrow 0} \frac{i}{4\pi^2\mu h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n^2(\mu'+1/\mu')}{\lambda+n-i\mu^*} \\
&\quad \quad \times I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) e^{in\varphi+i\nu\lambda-i2nm\pi/l} d\lambda \\
&\quad - \lim_{\mu^* \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2\mu h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\mu'\mu^*}{\lambda+n-i\mu^*} \\
&\quad \quad \times I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) e^{in\varphi+i\nu\lambda-i2nm\pi/l} d\lambda
\end{aligned} \tag{7}$$

つぎに

$$\begin{aligned}
V_n &= \lim_{\mu^* \rightarrow 0} e^{i\varphi n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\nu\lambda} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>)}{\lambda+n-i\mu^*} d\lambda \\
&= \lim_{\mu^* \rightarrow 0} e^{i\varphi n} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\nu\lambda}}{\lambda+n-i\mu^*} - \frac{e^{-i\nu\lambda}}{\lambda-n-i\mu^*} \right\} I_n(|\lambda|\mu_<) K_n(|\lambda|\mu_>) d\lambda
\end{aligned} \tag{8}$$

で表わされる新しい函数を導入する。

$$\sum_{n=0}^{l-1} e^{-i2nm\pi/l} = \begin{cases} 0, & n \neq lk \\ l, & n = lk \end{cases} \quad (k; \text{整数}) \tag{9}$$

なる関係があるから、結局 (7) 式は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi\mu h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') \frac{\mu\mu'^2 \sin \varphi_m}{R(v, \varphi_m)^3} d\mu' - \frac{il}{4\pi^2\mu h} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{k=-\infty}^{\infty} l^2 k^2 \left( \mu' + \frac{1}{\mu'} \right) V_{lk} \tag{10}$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} V_n &= s_+^{(n)} + i2\pi I_n(|n|\mu_<) K_n(|n|\mu_>) e^{i\varphi n}, & v > 0 \\ V_n &= s_-^{(n)} & v < 0 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$$\left. \begin{aligned} s_+^{(n)} &= -i\pi e^{i\varphi n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\nu\lambda}}{\lambda-in} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') d\lambda \\ s_-^{(n)} &= i\pi e^{i\varphi n} \int_0^{\infty} \frac{e^{\nu\lambda}}{\lambda+in} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') d\lambda \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

(10) 式は、プロペラによる回転方向の誘導速度を求める基本式である。しかし、一般に  $s_+^{(n)}$ ,  $s_-^{(n)}$  等を計算するには、かなりの工夫と労力を必要とする。そこでまず、比較的簡単なプロペラの無限後方における流場からしらべて行くことにする。

## 2.2 無限後方の流場

無限後方 ( $v \rightarrow \infty$ ) では、(10) 式において右辺第 1 項および第 2 項中 (11) 式の右辺第 1 項に相当する分は消失するから、 $r = \Gamma/hV$  とおくと、回転方向誘導速度は、

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_{v=\infty} = \frac{Vl}{\pi\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\mu_0} d\mu' \gamma(\mu') l^2 k^2 \left( \mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_{lk}(\mu' \mu_<) K_{lk}(\mu' \mu_>) e^{i lk \varphi} \tag{13}$$

となる。これは、近藤博士が導いた式と完全に一致している。ここでプロペラ翼の循環分布が

$$l\Gamma(\mu) = \sum_{\nu} l\Gamma_{\nu}(\mu) = \sum_{\nu} a_{\nu} \frac{I_{\nu}(\nu\mu)}{I_{\nu}(\nu\mu_0)} \tag{14}$$

のごとく、変形ベッセル函数の線型結合で表わされるものとする。ただし、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$  である。

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} lk \left( \mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \Gamma_{\nu}(\mu') I_{lk}(\mu' \mu_<) d\mu' = \frac{lk}{l^2 k^2 - \nu^2} [lk\mu' I_{lk}(\mu' \mu_<) \Gamma'_{\nu}(\mu') - \mu' I_{lk}(\mu' \mu_<) \Gamma'_{\nu}(\mu')]_{\mu_1}^{\mu_2} \tag{15}$$

$$I_{lk}(\mu) K_{lk}(\mu) - I_{lk}(\mu) K'_{lk}(\mu) = \frac{1}{lk\mu} \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{lk \sin(lk\varphi)}{l^2 k^2 - \nu^2} = \frac{\pi}{2l} \frac{\sin \nu \left( \frac{\pi}{l} - \varphi \right)}{\sin \frac{\nu\pi}{l}} \tag{17}$$

等の関係式を用い、かつ Nicholson の漸近展開を利用すると、循環分布の  $l\gamma_{\nu}$  成分による回転方向の誘導速度は、

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_v}{\partial \theta} \right]_{v=\infty} &= Vr_v(\mu) \frac{\nu}{4\mu} \frac{\cos \nu \left( \frac{\pi}{l} - \varphi \right)}{\sin \frac{\nu \pi}{l}} \\ &+ \frac{Vl\gamma_v(\mu_2)}{4\pi\mu} \sqrt{\frac{p_2}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2 k^2}{l^2 k^2 - \nu^2} \left( 1 + \frac{q_2}{lk} \right) \left( \frac{s}{s_2} \right)^{lk} e^{ilk\varphi} \\ &+ \frac{Vl\gamma_v(\mu_1)}{4\pi\mu} \sqrt{\frac{p_1}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2 k^2}{l^2 k^2 - \nu^2} \left( 1 + \frac{q_1}{lk} \right) \left( \frac{s_1}{s} \right)^{lk} e^{ilk\varphi} \\ &+ \frac{Vl\mu_2 \gamma'_v(\mu_2)}{4\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{p_2 p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{lk}{l^2 k^2 - \nu^2} \left( \frac{s}{s_2} \right)^{lk} e^{ilk\varphi} \\ &- \frac{Vl\mu_1 \gamma'_v(\mu_1)}{4\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{p_1 p}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{lk}{l^2 k^2 - \nu^2} \left( \frac{s_1}{s} \right)^{lk} e^{ilk\varphi} \end{aligned} \quad (18)$$

で与えられる。ただし

$$p = \sqrt{1 + \mu^2}, \quad q = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{p^3}, \quad s = \frac{\mu}{1+p} e^p$$

である。さて、ここで便宜上

$$f(z, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+t}, \quad f(z, -t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k-t} \quad (19)$$

なる函数を導入し、さらに

$$\mathfrak{F}_n(u) = f\left(u^2, n - \frac{1}{2}\right), \quad \mathfrak{F}_{-n+1}(u) = f\left(u^2, -n + \frac{1}{2}\right) \quad (20)$$

と書くことにする。(18) 式の関係から、結局、全循環分布  $l\gamma$  による回転方向の誘導速度は、

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_{v=\infty} = \sum_{\nu} \frac{V\nu}{4l\mu} a_{\nu} \frac{I_{\nu}(\nu\mu)}{I_{\nu}(\nu\mu_0)} \frac{\cos \nu \left( \frac{\pi}{l} - \varphi \right)}{\sin \frac{\nu \pi}{l}} + \frac{V}{4\pi\mu} \sqrt{\frac{p_0}{p}} \sum_{\nu} (2n-1) a_{\nu} \mathfrak{F}_{-n+1}(u) \quad (21)$$

のごとく与えられる。ただし、 $\nu/l = n - 1/2$ ,  $u = (S/S_0)^{1/2} e^{i\varphi/2}$  であり、また  $\mathfrak{F}_{er}(u)$  は  $\mathfrak{F}(u)$  の real part を表わしている。なお、翼の尖端位置で、 $\varphi = 0$  すなわち後流渦面と一致した場合の誘導速度は、(21) 式からは求

Table 1 Characteristics of propeller

TROOST B4-55

NUMBER OF BLADES	4
EXPANDED AREA RATIO	0.55
BOSS RATIO	0.167
PITCH RATIO	0.942
ADVANCE CONSTAT	0.665

めることができない。この場合には、附録 1 に示すような、特別の計算法によらねばならない。

数値計算例として Troost B4-55 型プロペラの無限後方における回転方向誘導速度を求めた。計算したプロペラの主要目、作動状態等は、Table 1 に示すごとくである。このプロペラの循環分布としては、中島博士が、Weissinger 法により求めたものを利用する<sup>7)</sup>。ここでは、その循環分布を Fig.3 に示すように、近似的に変形ベッセル函数の線型結合

$$l\gamma(\mu) = 24.57 \left\{ \frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}\mu\right)}{I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\mu_0\right)} - \frac{I_1(\mu)}{I_1(\mu_0)} \right\} + 1.00 \left\{ \frac{I_2(2\mu)}{I_2(2\mu_0)} - \frac{I_6(6\mu)}{I_6(6\mu_0)} \right\} \quad (22)$$

で置換える。無限後方における回転方向誘導速度は、(21) 式に (22) 式を代入して計算することができる。

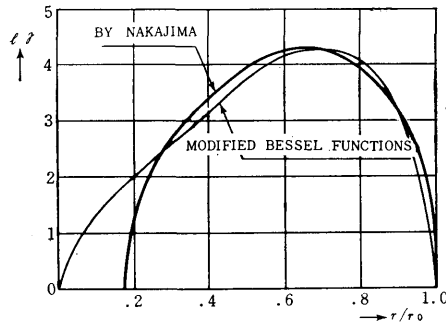


Fig.3 Circulation distribution for the propeller

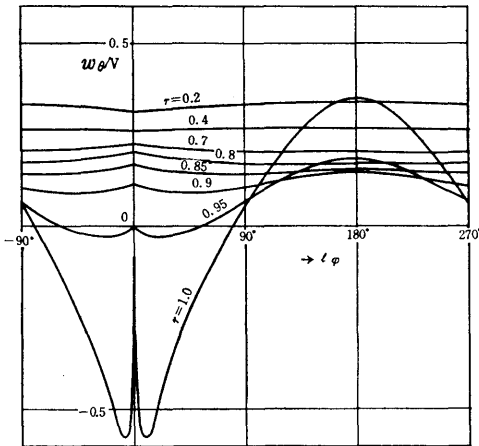


Fig. 4 Induced velocity in the circumferential direction far behind a propeller

Fig. 4 は、かくして計算されたプロペラの無限後方における回転方向誘導速度を示したものである。この図から次のようなことを知ることができる。すなわち、回転方向誘導速度の変動部分は、翼端の極く近傍だけが大きく、それ以外の場所では非常に小さい。しかも、翼端附近と同様に後流渦が強いはずのプロペラ中心附近も、変動部分は問題にならない程度に小さい。また変動の様子は、回転数の翼数倍を振動数とする単一の正弦波では表わすことができ、ほかに渦面の位置で不連続となるような高調波成分も含まれているが、この高調波成分は、基本波に対し無視しても構わない程度に小さなものである。以上のことから、各半径位置における回転方向誘導速度の前進速度に対する比  $w_\theta/V$  は、 $a + b \cos \varphi$  の形で近似的に表わすことができることになる。Fig. 5 は、変動部分の振幅  $b$  の半径方向分布を最小自乗法的に求めたものである。この図から、変動部分は翼端が最大で内方に向かって急激に減少し、 $r/r_0 = 0.5$  より内方では変動部分が存在しないとしてもほぼ差し支えないことがわかる。

### 2.3 舵の位置における流場

空間内の任意な点における回転方向誘導速度は、すでに (10) 式で求められている。したがって、舵の位置における誘導速度もこの式から計算できる訳である。しかし、実際にこの計算を行なうにはかなりの困難を伴う。その理由は、前にも述べたように、 $s_+^{(n)}$ 、 $s_-^{(n)}$ 等を計算することが相当困難であり、 $v$  の大小に従った計算方法を変えてやる等、種々の工夫を必要とするからである。

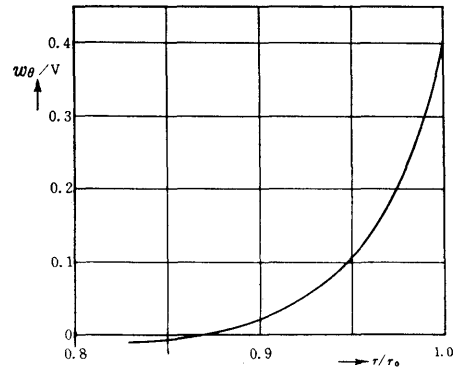


Fig. 5 Amplitude distribution of the oscillating velocity

ここでは、舵の位置における流場が、無限後方の流場とどの程度相違しているかをしらべることにする。それには、まず (11) 式において  $s_+^{(n)}$  の値が第 2 項に対しどの程度の割合になっているかを知る必要がある。舵は、Fig. 2 に示すごとく、高さがプロペラの直径  $D$  に等しく、アスペクト比 2 で、前縁より  $1/4$  弦長線がプロペラの後方  $0.5D$  の位置にあるものとする。 $1/4$  弦長線の位置を以って舵の位置を代表させると、 $v = 9.45$  となる。このように  $v$  が大きい場合には、 $s_+^{(n)}$  は、附録 2 に示すように、漸近表示として第 2 種 Legendre 陪函数の函数項級数の形で求めることができる  $I_n(n|\mu) K_n(n|\mu) = 0 \left( \frac{1}{n} \right)$  であり、 $s_+^{(n)} = 0 \left\{ \frac{1}{n} \frac{1}{(2x)^{n+1}} \right\}$  であるから、 $x > 1$  により、 $s_+^{(n)}$  の方が速かに収斂する。したがって、 $n$  の一番小さなものだけを比較して、 $s_+^{(n)}$  が十分小さければ、全体として  $s_+^{(n)}$  の項を無視してもよいことになる。数値計算例として舵の前縁より  $1/4$  弦長線の位置において、 $k=1$ 、すなわち  $n=4$  の場合の値を求めた結果、 $R_e s_+^{(4)} = 0.00063$ 、 $I_m s_+^{(4)} = -0.00014$  となった。これは、(11) 式の右辺第 2 項の  $n=4$  の場合の値  $0.0423$  に比べて十分小さく、したがって、舵の位置では  $s_+^{(n)}$  は無視しても差し支えないことがわかる。

つぎに、(10) 式の右辺第 1 項の値を無限後方の値と比較することにする。 $r/r_0 = 0.9$  において、 $\varphi = \pi/2l$  の場合、第 1 項の値は  $-0.00037$  となり、無限後方における変動部分の振幅  $0.022$  に比べて十分小さく、これも無視して差し支えない。

結局、舵の  $1/4$  弦長線の位置におけるプロペラ後流

の流場は、無限後方の流場とほとんど等しいということになるから、プロペラ後流中の舵が受ける力を考える場合、プロペラ近傍における局所的な流場は考慮する必要がなく、境界条件として無限後方の流場を使って十分近似できることがわかる。

### 3. 非定常流中の舵が受ける力

線型流体力学であるから、プロペラ後流による力を定常部分と変動部分に分けて考えることができる。これからは、変動部分だけをとり出して考えることにする。

#### 3.1 プロペラ後流中の舵の取扱い方

前章で述べたごとく、プロペラ後流の変動部分は、翼端にだけ集中しているから、Fig.2のごとく、高さがプロペラ直径に等しいような舵を考えた場合、縮流を無視すると、舵の受ける変動流は、舵の上下端部の極くせまい範囲に限られる。ここでは、このような場合舵が受ける振動的な力を求めるには、流体力学的にいかなる取扱いをなすべきかを検討することにする。↗

$$H = \Gamma / \pi DV$$

$$i_{\theta} = 2 \left( 1 - \frac{\mu_r}{\mu'_r} \right) \mu_r l^2 \sum k I_{lk} (lk \mu'_r) K'_{lk} (lk \mu_r) \quad \mu'_r < \mu_r$$

$$= \left( 1 - \frac{\mu_r}{\mu'_r} \right) l \{ 1 + 2l \mu_r \sum k I'_{lk} (lk \mu_r) K_{lk} (lk \mu'_r) \} \quad \mu'_r > \mu_r$$

であり、また  $\mu_r = r/h_r$  である。舵の後流渦のピッチは、

$$h_r = \frac{V + w_x}{\omega} \quad (24)$$

で与えられるものとする。ただし、 $w_x$  はプロペラ後流のx軸方向の誘導速度、 $\omega$  は、プロペラ後流の回転方向誘導角速度を表わす。舵の後流渦が直線状の場合には、 $h_r = \infty$  に相当する。螺旋状に出ている場合、舵の上下端の極く近傍だけに問題を限ると、(24)式の分子の  $w_x$  は  $V$  に対して省略しても差し支えない。そうすると、例えば、 $r/r_0 = 0.9$  の場合、 $h_r = 3.75D$  ↗

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{1}{4\pi\rho V} \iint_{S'} \Pi_0 dx' dy' \int_{-\infty}^{\tilde{x}} e^{-t \frac{v}{V} (\tilde{x} - \tilde{x}')} \frac{d\tilde{X}}{\sqrt{\tilde{X}^2 + (y-y')^2}}$$

$$= - \frac{1}{4\pi\rho V} \iint \frac{\Pi_0 e^{-t \frac{v}{V} \tilde{x}}}{(y-y')^2} G \left( \frac{v}{V} |y-y'| \right) dx' dy' \quad (25)$$

のごとく与えられる。ただし、 $\tilde{x} = x - x'$ 、 $G \left( \frac{v}{V} |y-y'| \right)$  は非定常翼の誘導因子で、附録3のごとくに与えられる。附録3のFig. A3は、1/4弦長線にある束縛渦が3/4弦長線位置に誘導する非定常誘導因子を示したも

(322)

↘プロペラ後流は、回転方向以外に軸方向にも誘導速度を有し、全体として螺旋を画いている。したがって、舵から出る後流渦も螺旋を画いていることになり、後流渦による誘導速度は、直進翼の場合とは異なったものになる。しかし、後流渦が螺旋状であるための影響を非定常的に取扱うことは、極めて困難な問題である。ここでは、大凡のOrderを掴むため、定常的な場合について、後流渦が直線状に出ている場合と螺旋状に出ている場合とでどの程度の差があるかをしらべることにする。簡単なために、Prantle揚力線について誘導因子の相違を求める。後流渦が螺旋状である場合は、あたかも2舵を翼プロペラと見なしたと同じことになり、Lerbsと全く同じ計算を<sup>8)</sup>2翼プロペラについて行なえばよいことになる。すなわち、回転方向の誘導速度を  $w_{\theta r}$  とすれば、

$$w_{\theta r} / V = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \eta'} \frac{i_{\theta}}{\eta - \eta'} d\eta' \quad (23)$$

で与えられる。ここで

↘となり相当大きな値となっている。したがって、誘導因子  $i_{\theta}$  の値も  $\mu_r = \mu'_r$  の場合を例にとると、 $i_{\theta} = 0.993$  となり、直進翼の場合の誘導因子1.000とほとんど等しい。結局、プロペラ後流中の舵に働く力を計算する場合、実際には後流渦は螺旋面を形成しているものと思われるが、これを平面渦と見なして直進翼の取扱いをしても、事実上ほとんど誤差を生じないことになる。

つぎに、非定常直進翼の誘導因子を求めることとする。非定常翼の翼面上の法線方向誘導速度は、

のである。この図から非定常誘導因子  $G$  は、 $\frac{v}{V} |y-y'|$  の値が僅かに零から離れただけで急激に減少することがわかる。4翼プロペラが前進常数0.665で作動している場合、舵の翼弦長を  $2c$  とすると、2倍の reduced

frequency は,  $\kappa \equiv \frac{2cV}{V} = 9.45$  となる。このように  $\kappa$  の値が大きい場合, 揚力面の圧力飛躍の影響はその極く近傍にだけ限られ, 少し離れると急激に影響がなくなる。したがって, Fig. 5 にも示したごとく舵が受ける変動流は, 上下端部の極くせまい範囲に限られており, しかも誘導速度の影響も圧力飛躍の極く近傍に限られることになるから, プロペラ後流中の舵が受ける変動力を考える場合, 極めて幅のせまい, つまり極めてアスペクト比が小さい非定常揚力面としての取扱いをすればよいことになる。

$$\Phi_0(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x e^{-i\frac{V}{V}(x-X)} \phi_0(X, y, z) dX \quad (26)$$

で与えられる。ここで, 舵の上下端部のせまい範囲で, 幅  $2d$ , 翼弦長  $2c$  なる小縦横比揚力面を考える。プロペラ後流の舵面に垂直な速度成分を  $w^\theta(x, y)$  とおくと, 積分方程式は,

$$w^\theta(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{\hat{u}(x', y')}{y-y'} dx' dy' \left[ 1 + \frac{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}}{x-X'} \right] \quad (27)$$

のごとく与えられる。附録 4) 十分アスペクト比が小さい場合,  $\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2} \approx |x-X'|$  と近似してもよいから, (27) の積分方程式は, 非常に簡単になって,

$$w^\theta(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{dy'}{y-y'} \quad (28)$$

の形で書表わされる。ただし

$$\Phi(x, y) = \int_{-c}^x u(x', y) dx'$$

である。 $\eta = y/d$  とおくと, (28) 式は,

$$w^\theta(x, y) = -\frac{1}{\pi d} \int_{-1}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \quad (29)$$

となる。小縦横比揚力面の一つの特徴として, 翼面の圧力分布をそれぞれ  $x$  軸方向と  $y$  軸方向に依存するものに分離することができる。したがって, (29) 式の積分方程式は, (26) 式の関係を使って,

$$w^\theta(x, \eta d) = -\frac{1}{\pi d V} \int_{-\infty}^x e^{-i\frac{V}{V}(x-X)} dX \oint_{-1}^1 \frac{d\phi}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \quad (30)$$

となる。さて,  $w^\theta(x, \eta d)$  は変数分離ができて

$$w^\theta(x, \eta d) = U_1(x) U_2(\eta d) \quad (31)$$

のごとく書くことができる。さらに  $U_1(x)$  については,

$$U_1(x) = e^{i\frac{V}{V}(x+\delta)} \quad (32)$$

のごとき表現が可能である。ただし  $\frac{V}{V}\delta$  は, プロペラ後流の舵に対する位相差を表わしたものである。 $\phi(x, \eta d)$  もまた変数分離ができて

$$\phi(x, \eta d) = \phi_1(x) \phi_2(\eta d) \quad (33)$$

のごとく書表わすことができる。(31), (32), (33) の各式の関係を使うと, (30) の積分方程式は,

$$e^{i\frac{V}{V}(x+\delta)} = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x e^{-i\frac{V}{V}(x-X)} \phi_1(x) dX \quad (34)$$

$$U_2(\eta d) = -\frac{1}{\pi d} \oint_{-1}^1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \quad (35)$$

のごとき 2 つの積分方程式に分けられる。(34) の積分方程式は, 直ちに解かれ

### 3.2 小縦横比非定常揚力面

小縦横比の揚力面理論としては, Jones<sup>9)</sup>, Lawence<sup>10), 11)</sup>等のものがあげられる。ここでは, Jones と同様に, 極めてアスペクト比が小さい場合,  $\sqrt{(X-x')^2 + (y-y')^2} \approx |X-x'|$  とおけることから, 非定常翼に対する簡単な形の積分方程式を導いた。そして, この積分方程式に解析解が存在することから<sup>12)</sup> 舵の場合に適当した境界条件を入れるだけで, 舵にかかる起振力を比較的簡単に計算することができた。

非定常流場の速度ポテンシャルと加速度ポテンシャルの関係は,

$$\phi_1(x) = i\nu U_1(x) + V \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \quad (36)$$

となる。(35)の積分方程式も、解析的に解くことができる。積分常数を  $C$  とすると、

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = \frac{d}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} \frac{U_2(\eta'd)}{\eta-\eta'} d\eta' + \frac{C}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (37)$$

となる。境界条件として、 $\eta = -1$  において  $\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = 0$  になるものとし、

$$\left. \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right]_{\eta=-1} = 0 \quad (38)$$

を与える。積分定数  $C$  を求めて、(37)式に代入すると、結局、

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = \frac{d}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \quad (40)$$

が得られる。したがって、

$$\psi_2(\eta d) = \frac{d}{\pi} \int_{-1}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{1-\eta'^2}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \quad (41)$$

となる。(36)、(41)両式の関係を(33)式に入れると、翼の両面の圧力差  $\Pi(x, y)$  は

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= \rho \phi(x, \eta d) \\ &= \left\{ i\nu U_1(x) + V \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \right\} \frac{\rho d}{\pi} \int_{-1}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{1-\eta'^2}} d\tilde{\eta} \\ &\quad \times \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \end{aligned} \quad (42)$$

のごとくに求められる。(42)式は、小縦横比非定常揚力面の圧力を求める基本式であり、プロペラ後流中の舵が受ける起振力も、この式をもととして計算することができる。

### 3.3 舵が受ける起振力

舵が受ける起振力を計算する前に、まず(42)式の右辺に現われる積分

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\eta}}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \quad (43)$$

を求めることにする。この積分を変形すると

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\eta} \sqrt{\frac{1+\tilde{\eta}}{1-\tilde{\eta}}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\eta'}{1+\eta'}} U_2(\eta'd) \frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\eta} \frac{1+\tilde{\eta}}{\sqrt{1-\tilde{\eta}^2}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \frac{1-\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2}} U_2(\eta'd) \frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \end{aligned} \quad (44)$$

となる。さらに  $\tilde{\eta} = \cos \beta$ 、 $\eta = \cos \beta'$  とおくと

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\beta_0} (1 + \cos \beta) d\beta \oint_0^{\pi} \frac{1 - \cos \beta'}{\cos \beta - \cos \beta'} U_2(\beta') d\beta' \quad (45)$$

となる。ここで、Fig.5に示したプロペラ後流の変動振幅の  $\eta$  方向分布を Fourier 級数で置換えることにする。翼端で零にならないことから

$$U_2(\beta') = a_0 + \sum a_n \cos n\beta'$$

のごとき余弦級数で置換えた方が便利である。翼幅  $2d$  としては、 $r/r_0 = 0.8 \sim 1.0$  の範囲をとってやれば、(38)式の境界条件はほぼ満足される。かくして、(45)式の  $U_2(\beta')$  を Fourier 級数で置換え、かつ

$$\oint_0^{\pi} \frac{\cos n\beta'}{\cos \beta - \cos \beta'} d\beta' = \pi \frac{\sin n\tilde{\beta}}{\sin \tilde{\beta}}$$

の関係を使くと、(45)式の積分を求めることができる。Fig.6はかくして求めた積分  $J$  の  $\eta$  方向の分布を図示したものである。

つぎに、翼幅方向にはかった単位長さ当りの揚力  $L(y)$  を求めることにする。

(324)



$$\begin{aligned}
 L(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c-\varepsilon}^c \Pi(x, y) dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c-\varepsilon}^{-c+\varepsilon} \Pi(x, y) dx \\
 &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c+\varepsilon}^c \Pi(x, y) dx \quad (46)
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここに右辺第1項は運動量変化に基づき舵の前縁に働く力で、Munkの運動量理論と同一の力である。この力を  $L_M$  とおくと、単位幅の翼素に生ずる原点まわりの変動振りモーメントは、

$$M(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c+\varepsilon}^c \Pi(x, y) x dx + L_M \cdot C \quad (47)$$

で与えられる。さて、

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c-\varepsilon}^{-c+\varepsilon} \left\{ i\nu U_1(x) + V \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \right\} dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-c-\varepsilon}^{-c+\varepsilon} V \frac{\partial U_1(x)}{\partial x} dx \quad (48)
 \end{aligned}$$

であるから、揚力係数の  $y$  方向の分布  $C_L(y)$  は、

$$\begin{aligned}
 C_L(y) &= \frac{L(y)}{\frac{1}{2} \rho V^2 \times 2c} \\
 &= e^{i\frac{\nu}{V}c} \cdot e^{i\frac{\nu}{V}\delta} \frac{d}{c} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\eta'^2}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \\
 &\quad + 2(e^{i\frac{\nu}{V}c} - e^{-i\frac{\nu}{V}c}) e^{i\frac{\nu}{V}\delta} \frac{d}{c} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\eta'^2}} d\tilde{\eta} \oint_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} U_2(\eta'd) \left\{ \frac{1}{\eta-\eta'} + \frac{1}{1+\eta'} \right\} d\eta' \\
 &= \left\{ e^{i\frac{\kappa}{2}} + 2(e^{i\frac{\kappa}{2}} - e^{-i\frac{\kappa}{2}}) \right\} e^{i\frac{\kappa}{2}} \frac{\delta}{c} \cdot J \quad (49)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

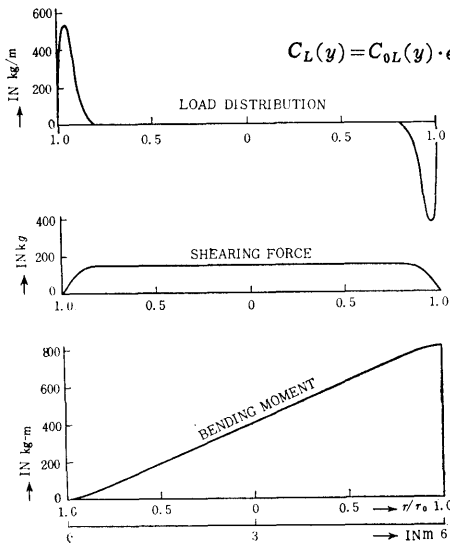


Fig. 7 Amplitude of vibratory forces induced on the rudder

$$C_L(y) = C_{0L}(y) \cdot e^{i\frac{\kappa}{2}} \frac{\delta}{c}$$

とおき、プロペラ後流の舵に対する位相関係を除外して考えると、 $C_{0L}(y)$  の絶対値  $|C_{0L}(y)|$  は、

$$\begin{aligned}
 |C_{0L}(y)| &= \sqrt{(R_e C_{0L})^2 + (I_m C_{0L})^2} \\
 &= \sqrt{\left(\cos \frac{\kappa}{2}\right)^2 + \left(5 \sin \frac{\kappa}{2}\right)^2} \cdot \frac{d}{c} \cdot J \quad (50)
 \end{aligned}$$

また位相差  $\sigma$  は

$$\tan \sigma = \frac{J_m C_{0L}}{R_e C_{0L}} = -\frac{5 \sin \frac{\kappa}{2}}{\cos \frac{\kappa}{2}} \quad (51)$$

で与えられる。(50)式から明かなごとく、揚力係数の変動の絶対値  $|C_{0L}|$  は、 $\kappa$  の値いかんによって hump, hollow を生ずる。すなわち、 $\kappa = (2n+1)\pi$  のとき Max となり、その値は、

$$|C_{0L}|_{\max} = 5 \cdot \frac{d}{c} \cdot J \quad (52)$$

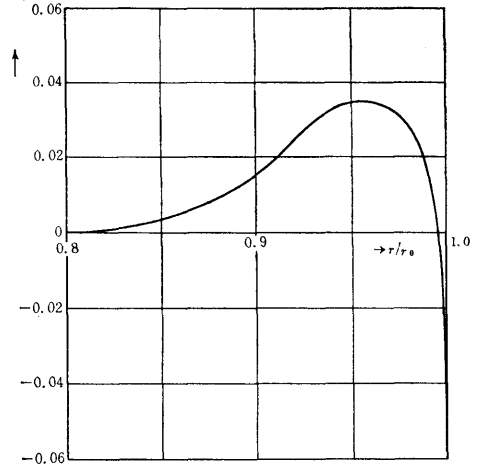


Fig. 6 Value of the integral J

また、 $\kappa = 2n\pi$  のとき Min となり、その値は、

$$|C_{0L}|_{\min} = \frac{d}{c} \cdot J \quad (53)$$

となる。このように、 $\kappa$  の値によって hump, hollow を生ずるから、前進常数と舵の翼弦長の組合せを適当にすることにより、起振力を軽減することが可能である。

数値計算例として、舵の大きさが  $6\text{m} \times 3\text{m}$  で、 $V = 10\text{m/sec}$  の場合を考える。Fig.7 は、荷重分布、剪断力、曲げモーメントの時間的変動の振幅を表したものである。この例は、4翼プロペラの場合であるから、横力は舵の上半分と下半分で打消し合い、舵全体では零となっている。しかし、翼数が奇数個の場合には、横力も当然発生する。

#### 4. 結 言

プロペラ後流中の舵が受ける起振力を理論的に求める方法を確立するとともに、若干の数値計算を行なっ

た。これらの結果から、

- (1) 舵の位置におけるプロペラ後流の流場は、無限後方の流場にほとんど等しい。
- (2) プロペラ後流の変動部分は、翼端近傍のごくせまい範囲に限られる。
- (3) プロペラ後流中の非定常舵は、小縦横比非定常揚力面として取扱うことができる。
- (4) 舵の受ける起振力には、 $\kappa$  により hump, hollow が存在するから、プロペラの前進常数と舵の翼弦長の組合せを適当にえらぶことにより、これを軽減することができる。

等のことを明かにすることができた。

流体力学の理論的な研究をはじめるとは、優れた指導者と良い環境を得ることが大切なことのように思われる。その点、著者は、花岡博士の懇切なるご指導を仰ぐことができ、また山内部長をはじめ運動性能部諸兄の深い理解と激励を得ることができたことを幸いに思っている。ここに厚くお礼を申上げる次第である。

#### 附 録

**A.1  $r/r_0 = 1.0$ ,  $\varphi = 0$  の場合の回転方向誘導速度** プロペラ翼端と同じ半径位置で、後流渦面と一致した場合、プロペラによる無限後方の回転方向誘導速度は、(13) 式より、

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right]_{\substack{v=\infty \\ \varphi=0 \\ \mu=\mu_0}} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{Vl}{\pi\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\mu} d\mu' \gamma(\mu') l^2 k^2 \left( \mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_{lk}(lk\mu') K_{lk}(lk\mu) \quad (A1-1)$$

のごとくに与えられる。ここで

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \int_0^{\mu_0} \frac{l\gamma(\mu') \bar{K}(\mu, \mu')}{(\mu - \mu')^2} d\mu' \quad (A1-2)$$

とおいて、Hadamard の主値をとることとする。部分積分を行ない、 $\mu = \mu_0 \zeta$ ,  $\mu' = \mu_0 \zeta'$  とおくと、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \int_0^1 \frac{\partial l\gamma(\zeta')}{\partial \zeta'} \frac{\bar{K}(\zeta, \zeta')}{\zeta - \zeta'} d\zeta' \quad (A1-3)$$

となる。ただし

$$l\gamma(\zeta') \bar{K}(\zeta, \zeta') = \frac{V(\zeta - \zeta')^2}{\pi\zeta} l\gamma(\zeta') \left( \mu_0 \zeta' + \frac{1}{\mu_0 \zeta'} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{lk}{2\sqrt{\rho_0 \rho}} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{lk} \quad (A1-4)$$

である。ここで公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2} \quad |r| < 1$$

を利用すると、結局 (A1.4) 式は、

$$l\gamma(\zeta') \bar{K}(\zeta, \zeta') = \frac{V(\zeta - \zeta')^2}{2\pi\zeta\sqrt{\rho_0 \rho}} l^2 \gamma(\zeta') \left( \mu_0 \zeta' + \frac{1}{\mu_0 \zeta'} \right) \frac{\left( \frac{s}{s_0} \right)^l}{\left( 1 - \frac{s^l}{s_0^l} \right)^2} \quad (A1-5)$$

となる。さらに、 $\zeta = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi)$  とおくと、(A1.3) 式から

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ \mu=\mu_0}} = - \sum_{p=1}^m l r(\psi_p) \bar{K}(\psi_n, \psi_p) \sum_{k=1}^m k \sin k\psi_p \frac{\sin k\psi_n}{\sin \psi_n} \frac{1}{m+1} \quad (\text{A1.6})$$

が得られる。ただし

$$l r(\psi_p) \bar{K}(\psi_n, \psi_p) = \frac{V(\cos \psi_n - \cos \psi_p)^2}{2 \cos \psi_n \sqrt{p_0 p}} l^2 r(\psi_p) \left( \mu_0 \cos \psi_p + \frac{1}{\mu_0 \cos \psi_p} \right) \frac{\left( \frac{s}{s_0} \right)^l}{\left( 1 - \frac{s^l}{s_0^l} \right)^2} \quad (\text{A1.7})$$

であり、また

$$- \sum_{k=1}^m k \sin k\psi_p \frac{\sin k\psi_n}{\sin \psi_n} \cdot \frac{1}{m+1}$$

は、Mullthopp の係数<sup>(13)</sup>である。

## A.2 $s_+^{(n)}$ の計算法

$v$  が大きい場合の  $s_+^{(n)}$  の計算法について述べる。

$$\begin{aligned} s_+^{(n)} &= -i\pi e^{i\varphi n} \int_0^\infty \frac{e^{-v\lambda}}{\lambda - in} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') d\lambda \\ &= -i\pi \int_0^\infty e^{i n s} ds \int_0^\infty e^{-s\lambda} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

と書かれる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{s^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi}} &= \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n \int_0^\infty e^{-s\lambda} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') \cos n\varphi d\lambda \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから、両辺に  $\frac{\cos n\varphi}{\pi}$  を乗じて、 $\varphi$  で 0 から  $\pi$  まで積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{s^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi}} d\varphi &= \int_0^\infty e^{-s\lambda} J_n(\lambda\mu) J_n(\lambda\mu') d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{\mu\mu'}} Q_{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{s^2 + \mu^2 + \mu'^2}{2\mu\mu'} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

(A2.2) 式の関係を (A2.1) 式に入れて、逐次部分積分して行くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\pi} s_+^{(n)} &= \left[ \frac{e^{i n s}}{i n} Q_{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{s^2 + \mu^2 + \mu'^2}{2\mu\mu'} \right) \right]_\infty^v - \frac{1}{i n} \int_\infty^v e^{i n s} \frac{d}{ds} Q_{n-\frac{1}{2}} ds \\ &= \frac{e^{i n v}}{i n} Q_{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{s^2 + \mu^2 + \mu'^2}{2\mu\mu'} \right) + \frac{e^{i n v}}{n^2} \frac{d}{dv} Q_{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n^2} \int_\infty^v e^{i n s} \frac{d^2}{ds^2} Q_{n-\frac{1}{2}} ds \\ &= e^{i n v} \left\{ \frac{1}{i n} Q_{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{(i n)^2} \frac{d}{dv} Q_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{(i n)^3} \frac{d^2}{dv^2} Q_{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{(i n)^4} \frac{d^3}{dv^3} Q_{n-\frac{1}{2}} \dots \right\} \\ &= \frac{e^{i n v}}{i n} \left\{ \sum_{k=0}^{u-1} \left( \frac{-1}{i n} \right)^k \frac{d^k}{dv^k} Q_{n-\frac{1}{2}} + 0(n-u) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

ここで、

$$z = \frac{v^2 + \mu^2 + \mu'^2}{2\mu\mu'}$$

と書くことにすると、 $z > 1$  である。また、この  $z$  と  $\alpha = z - \sqrt{z^2 - 1}$  なる関係にある  $\alpha$  は、 $\alpha < 1$  であり

$$\frac{v^2 + \mu^2 + \mu'^2}{2\mu\mu'} = z = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} \quad (\text{A2.4})$$

なる関係式が成立つ。(A2.4)の置換をすると、(A2.3)の各函数項は、

$$\left. \begin{aligned} Q_{n-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{\pi\sqrt{\alpha}}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(n)}(\alpha) \\ \frac{d}{dv} Q_{n-\frac{1}{2}}(z) &= -\frac{\pi\sqrt{\alpha}^3 v}{2\mu\mu'} b_{\frac{1}{2}}^{(n)}(\alpha) \\ \frac{d^2}{dv^2} Q_{n-\frac{1}{2}}(z) &= -\pi\sqrt{\mu\mu'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu\mu'}^3} \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(n)}(\alpha) - \frac{3v^2}{\sqrt{\mu\mu'}^3} \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(n)}(\alpha) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2.5})$$

等となる。結局、 $\frac{d^k}{dv^k} Q_{n-\frac{1}{2}}(z)$ の値は、Laplaceの係数 $b_s^{(n)}(\alpha)$ の数値表<sup>14)</sup>から求めることができる。

### A.3 非定常翼の誘導因子

翼面上の点( $z=0$ )における法線方向の誘導速度は、

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{1}{4\pi\rho V} \iint_{s'} \Pi_0 ds' \int_{-\infty}^{\tilde{x}} e^{-i\frac{v}{V}(\tilde{x}-x)} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} \quad (\text{A3.1})$$

で与えられる。さらに右辺の積分は、

$$\int_{-\infty}^{\tilde{x}} e^{i\frac{v}{V}X} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} = \int_{-\infty}^0 e^{i\frac{v}{V}X} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} + \int_0^{\tilde{x}} e^{i\frac{v}{V}X} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} \quad (\text{A3.2})$$

のごとくに分けられる。(A3.1式を)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} &= -\frac{1}{4\pi\rho V} \iint \frac{\Pi_0 e^{-i\frac{v}{V}\tilde{x}}}{(y-y')^2} G\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) dS' \\ &= -\frac{1}{4\pi\rho V} \iint \frac{\Pi_0 e^{-i\frac{v}{V}\tilde{x}}}{(y-y')^2} \left\{ G^{(1)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) + G^{(2)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) \right\} dS' \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

の形においたとき、 $G^{(1)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right)$ および $G^{(2)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right)$ は、(A3.2)式の右辺第1項および第2項に相当する非定常翼の誘導因子であり、

$$\begin{aligned} G^{(1)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) &= (y-y')^2 \int_{-\infty}^0 e^{i\frac{v}{V}X} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} \\ &= \frac{v}{V}(y-y') K_1\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) + i \frac{\pi v}{V} \frac{|y-y'|}{2} \left\{ I_1\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) - L_1\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) - \frac{2}{\pi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A3.4})$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}\left(\frac{v}{V}|y-y'|\right) &= (y-y')^2 \int_0^{\tilde{x}} e^{i\frac{v}{V}X} \frac{dX}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} \\ &= \frac{\tilde{x} e^{i\frac{v}{V}\tilde{x}}}{\sqrt{x^2+(y-y')^2}} - i \frac{v}{V} \int_0^{\tilde{x}} \frac{X \cdot e^{i\frac{v}{V}X}}{\sqrt{X^2+(y-y')^2}} dX \end{aligned} \quad (\text{A3.5})$$

で与えられる。Fig. A3は、数値計算例として、4翼プロペラが前進常数0.665で作動している場合、その後流中にある舵の1/4弦長線にある束縛渦が3/4弦長線位置に誘導する誘導因子を图示したものである。

### A.4 非定常翼の積分方程式

翼面に垂直な速度成分を $w_\theta$ とし、かつ $x-X=X'-x'$ とおくと、(25)式より、

$$\begin{aligned} w_\theta &= -\frac{1}{4\pi\rho V} \int_{-a}^a \int_{-c}^c \Pi_0 dx' dy' \\ & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{v}{V}(X'-x')} \frac{dX'}{\sqrt{(x-X')^2+(y-y')^2}} \end{aligned} \quad (\text{A4.1})$$

が得られる。ここで $\partial\Phi_{0u}/\partial x - \partial\Phi_{0l}/\partial x = 2\dot{u}$ とすると

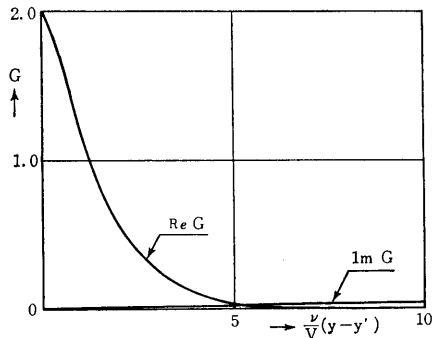


Fig. A3 Induced factor for the oscillating wing

$$\frac{\Pi_0}{\rho} = i\nu (\Phi_{0u} - \Phi_{0l}) + V \left( \frac{\partial \Phi_{0u}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{0l}}{\partial x} \right) = i2\nu \int_{-c}^x \hat{u}(\hat{x}) d\hat{x} + 2V \frac{\partial}{\partial x} \int_{-c}^x \hat{u}(\hat{x}) d\hat{x} \quad (\text{A4.2})$$

$\hat{u}$  は  $-c$  より前方では零である。この式を  $\int_{-c}^x \hat{u} d\hat{x}$  について解くと

$$\int_{-c}^x \hat{u} d\hat{x} = \frac{1}{2\rho V} \int_{-c}^x e^{-i\frac{\nu}{V}(x-\hat{x})} \Pi_0(\hat{x}) d\hat{x} \quad (\text{A4.3}) \quad (\text{A4.1}) \text{ の } x', X' \text{ の積分順序を交換すると,}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho V} \int_{-c}^c \Pi_0 dx' \int_{x'}^{\infty} e^{-i\frac{\nu}{V}(X'-x')} \frac{dX'}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} \\ &= \frac{1}{\rho V} \int_{-c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} dX' \int_{-c}^{X'} \Pi_0(x') e^{-i\frac{\nu}{V}(X'-x')} dx' \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

(A4.3) を代入し, さらに  $X'$  について部分積分すると,

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} dX' \int_{-c}^{X'} \hat{u}(x') dx' \\ &= 2 \left[ \frac{x-X'}{(y-y')^2 \sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} \int_{-c}^{X'} \hat{u}(x') dx' \right]_{-c}^{\infty} \\ &\quad - 2 \int_{-c}^{\infty} \frac{\hat{u}(X')(x-X')}{(y-y')^2 \sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} dX' \\ &= -2 \int_{-c}^{\infty} \frac{\hat{u}(X')}{(y-y')^2} \left\{ 1 + \frac{x-X'}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}} \right\} dX' \end{aligned} \quad (\text{A4.5})$$

さらに, 
$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{y-y'} = \frac{-(x-x')^2}{(y-y')^2 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

なる関係を使うと, 結局積分方程式は,

$$w_{\theta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-c}^a dy' \int_{-c}^{\infty} \frac{\hat{u}(X')}{y-y'} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2}}{x-X'} \right\} dX' \quad (27)$$

となる。

#### 参考文献

- 1) 谷口中; “プロペラ起振力について” 船体振動シンポジウム, 1963
- 2) J.P. Breslin; “Review and Extension of Theory for Near-Field Propeller-Induced Vibratory Effects” The 4th Symposium on Naval Hydrodynamics (1962, Washington D. C.)
- 3) K. Kondo; “The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller” 九大工学部紀要, 第9巻, 第3号 1942
- 4) 花岡達郎; “非定常プロペラ理論序説” 造船協会論文集 110号
- 5) 花岡達郎; “非定常プロペラ揚力線の積分方程式について” 造船協会論文集 110号
- 6) T. Hanaoka; “Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller” The 4th Symposium on Naval Hydrodynamics
- 7) 中島康吉; “プロペラ揚力面理論とその応用 (第2報)” 造船協会論文集 109号
- 8) H. W. Lerbs; “Moderately Loaded propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation” SNA ME Vol. 60, 1952
- 9) R. T. Jones; “Properties of Low-Aspect-Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above the Speed of Sound” NACA Report, 1946
- 10) H. R. Lawrence; “The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds” 19th Annual Meeting. I. A. S., 1951
- 11) H. R. Lawrence and E. H. Gerber; “The Aerodynamic Forces on Low Aspect Ratio Wing Oscillating in an Incompressible Flow” J. of Aeronautical Science Vol. 19, 1952
- 12) J. Kondo; “Finite Hilbert Transformation and Airfoil Equation” Proceeding of the 9th Jap an National Congress for Applied Mechanics, 1959
- 13) H. Multhopp; “Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln” Lufo, 1938
- 14) E. W. Brown and D. Brouwer; “Table for the Development of the Disturbing Function” Cambridge. 1933