流体と弾性変形する構造体の連成に関する基礎研究

谷澤克治*、竹本博安**、宮本　武***、平方　勝**、
山田安平**、岡　正義**、南真紀子*

Study of Nonlinar Interaction between Ideal Fluid and Elastic Body

by

Katsuji TANIZAWA, Hiroyasu TAKEMOTO, Takeshi MIYAMOTO,
Masaru HIRAKATA, Yasuhira YAMADA, Masayosi OKA
and Makiko MINAMI

Abstract

Introducing the velocity and acceleration potential [1], a nonlinear hydroelastic interaction between ideal fluid and floating elastic body is formulated in this report. In the formulation, elastic body motions are expressed by large amplitude rigid mode motions and small amplitude elastic vibrations superposed on it. Large amplitude free surface motion is also considered. Based on this formulation, a two dimensional simulation program was developed for the analysis of transient hydroelastic problems. In this simulation program, boundary element method (BEM) is used to solve the boundary integral equations of velocity potential and acceleration potential. Mixed Eulerian and Lagrangian method (MEL) is used to track the free surface motion. To validate the formulation and simulation program, free vibration of a hinged beam in unbounded fluid was simulated and the results were compared with analytical solution of Kito [2]. Using this simulation program, two dimensional elastic beam impact on a wave crest was simulated. Simulated water surface impact is very transient. In the impact process, as wetted surface expands, added mass increases rapidly, the narrow peak impact pressure zone travels with very high speed and hydroelastic deformation takes place. Although the presented result in this paper is just a test trial of the simulation program and the resolution is not enough to catch the detail of the phenomenon, effect of elasticity to the impact is clearly observed and strong correlation between pressure and normal acceleration of vibration is confirmed.

*　運動性能部
**　構造強度部
***特別研究官
原稿受付　平成12年10月24日
審 査 済　平成13年　4月　2日

目　次

記　号

$O-XYZ$　：　空間固定座標系
$o-xyzZ$　：　物体固定座標系
ϕ　：　速度ポテンシャル
ϕ_t　：　速度ポテンシャルの時間偏微分
Φ　：　加速度ポテンシャル
$\boldsymbol{n}$　：　物体表面の法線方向単位ベクトル (流体領域に対し外向きを正にとる。)
$\boldsymbol{N}$　：　物体表面の一般化法線方向単位ベクトル, $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})$
ϕ_n　：　$\boldsymbol{n} \cdot \nabla\phi$
Φ_n　：　$\boldsymbol{n} \cdot \nabla\Phi$
$\boldsymbol{R}$　：　流体粒子の位置ベクトル
$\boldsymbol{R_o}$　：　物体重心の位置ベクトル
$\boldsymbol{r}$　：　流体粒子の物体重心に対する相対位置ベクトル
p　：　流体の圧力
$\boldsymbol{\omega}$　：　物体の角速度ベクトル
v_n　：　剛体運動モードによる弾性体表面の法線方向速度
a_n　：　剛体運動モードによる弾性体表面の法線方向加速度
$\mathcal{M}$　：　弾性体の慣性テンソル
$\boldsymbol{\beta}$　：　弾性体のジャイロモーメント
$\boldsymbol{\alpha}$　：　弾性体の剛体運動モードの一般化加速度
$\boldsymbol{F_f}$　：　一般化流体力
$\boldsymbol{F}$　：　一般化外力
u　：　弾性振動による弾性体表面の法線方向変位
u_t　：　弾性振動による弾性体表面の法線方向速度
u_{tt}　：　弾性振動による弾性体表面の法線方向加速度
$[M]$　：　弾性振動方程式に現れる質量行列
$[K]$　：　剛性行列
$[IP]$　：　内挿行列
$[IP]^+$　：　$[IP]$の$Moor-Penrose$一般逆行列
k_n　：　弾性体表面の法曲率

1　緒　　言

荒天中を航走する船舶や荒天中で操業する海洋構造物には時として激しい波浪衝撃が発生し、その巨大な衝撃荷重により大きなダメージを被ることがある。これらの構造物が荒天中においても安全に操業するには、設計段階から波浪衝撃荷重を十分に考慮しておくことが肝要であり、衝撃荷重を推定するための多くの研究が精力的になされ大きな成果をあげてきた。これまでの水面衝撃の研究では、剛体が水面に突入する現象を扱い、構造物の変形や弾性応答は無視されてきた。また、たとえ考慮されていても、衝撃荷重は剛体を仮定して求め、弾性応答は与えられた衝撃荷重に対する応答として計算されることが多かったように思われる。例えば、TSLAMやSRSLAM等の荒天波浪中での船体運動の非線形計算法では、スラミング衝撃荷重は運動量理論に基づく方法で簡便に求め、船体の弾性応答は船体を梁とみなして衝撃荷重とは別に計算している。

しかし、近年の高速船の設計においては軽量化の要求から、今まで以上に合理的な衝撃荷重の推定法が求められており、これには流力弾性問題として水面衝撃現象をとらえ、より正確に衝撃荷重と弾性応答を推定する必要がある。そこで、最近では流力弾性問題として水面衝撃現象を扱う研究が始められている。Kvalsvold & Faltinsen [3] また Faltinsen [4] は流力弾性問題として双胴高速船のウエットデッキスラミングを扱い、衝撃荷重に及ぼす弾性影響の研究

を行った。Khabakhpasheva & Korobkin [5] は線形理論を用いて弾性平板の水面衝撃問題を研究した。荒井&宮内 [7] は差分法で円筒殻の流力弾性衝撃をシミュレートした。角ら [8] は小さな deadrise angles を持つ弾性板の水面衝撃実験を行った。遠山 [9] は Wagner [10] の衝撃理論を流力弾性衝撃へ拡張し、円筒殻ならびに平板の流力弾性衝撃の解析を行った。

一方、著者らも水面衝撃現象の研究を実験 [11, 12, 13] と数値計算 [14, 15] の両面より行ってきたが、その一方でより一般的な非線形波浪荷重ならびに浮体応答の非線形理論と数値解法の研究を実施してきた [1, 16]。これら研究では加速度ポテンシャルの概念を導入して、加速度場で理想流体と剛体との非線形相互作用を表現できる理論を導き、その応用として波浪と浮体との非線形連成運動を時間領域で数値計算するシミュレーションプログラムを開発した。本理論では理想流体の仮定を外すことはできないが、剛体の制約を緩め弾性体に拡張することが可能であることが当初から分かっており [17]、この拡張により波浪と弾性浮体との非線形相互作用を解析できる数値計算法を開発することが可能となる。また、この計算法を流力弾性衝撃に適用することも可能である。

そこで本重点基礎研究「理想流体と弾性体との非線形連成運動に関する研究」では理想流体と弾性体との非線形連成運動を自由表面の運動も含めて時間領域でシミュレートするための理論的定式化を行うと共に、この定式化に従った数値計算プログラムを開発し、無限流体中での両端単純支持梁の接水振動の時間領域でのシミュレーションを行って定式化の検証とプログラムの精度確認を行った。また水面衝撃現象の一例として波頂に水平に落下するオイラー梁による水面衝撃現象のシミュレーション計算を実施し、流力弾性衝撃現象の解析への適用性を調べた [18, 19]。本報では以上の研究成果をまとめて報告する。

2　弾性体と自由表面を有する理想流体との相互作用の定式化

本報の定式化では流体は非粘性、非圧縮、流れは非回転であると仮定し、流体の速度ならびに加速度は、速度ポテンシャル ϕ と加速度ポテンシャル

$$\Phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \tag{1}$$

の勾配で与えられるものとする [16, 1]。また弾性体の運動は大変位を許す剛体モードの運動に微小振幅の弾性振動が重畳したものとして扱い、剛体運動と弾性振動との相互作用は無視できるものと仮定する。

2.1　弾性体表面での流体の速度と加速度

まず準備として、物体表面に沿って運動する流体の速度と加速度の表示式を示す。本報では Fig.1 に示す空間固定座標系 $O-XYZ$ と物体固定座標系 $o-xyz$ を用いる。物体固定座標系の原点 o は重心に位置している。図中の P は流体に固定された点、$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_o$, はそれぞれ空間固定座標系の原点から P および o を指す位置ベクトルであり、$\boldsymbol{r}$ は o から P の相対位置を指す位置ベクトルである。これらの位置ベクトルを用いると点 P の位置、速度、加速度はそれぞれ

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_o + \boldsymbol{r} \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{R}}_o + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle \tag{3}$$

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{R}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} + \langle\ddot{\boldsymbol{r}}\rangle + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle \tag{4}$$

と書ける [20]。ここで、$\dot{\boldsymbol{R}}_o$ と $\boldsymbol{\omega}$ は重心の速度および角速度、$\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle$ と $\langle\ddot{\boldsymbol{r}}\rangle$ は物体固定座標系で観測した点 P の速度と加速度である。

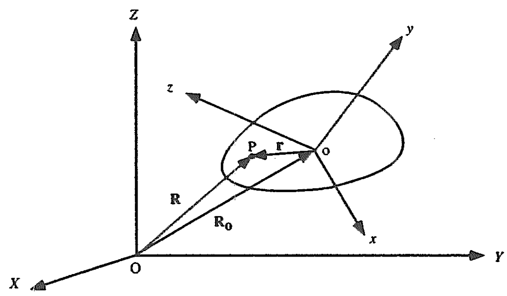

Fig.1 Frame of reference

2.2　境界値問題の定式化

次に点 P の速度と加速度の表示式を用いて、弾性体表面での幾何学的境界条件を求める。理想流体を仮定し流体の運動を速度ポテンシャル ϕ と加速度ポテンシャル Φ で記述すると、これらのポテンシャルに対する弾性体表面での幾何学的境界条件は

$$\phi_n = \boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{R}} \tag{5}$$

$$\Phi_n = \boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{R}} \tag{6}$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{n}$ は弾性体表面の法線方向単位ベクトルであり、ϕ と Φ に付けた添字 n は微分操作 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla$ を施したことを表す。(3) 式を (5) 式に、また (4) 式を (6) 式に代入すると、境界条件

$$\phi_n = v_n + \boldsymbol{n}\cdot\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle \tag{7}$$

$$\Phi_n = a_n + \boldsymbol{n}\cdot\langle\ddot{\boldsymbol{r}}\rangle + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n}\cdot 2\boldsymbol{\omega}\times\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle \tag{8}$$

が得られる。ここで v_n と a_n は剛体運動による弾性体表面の法線方向速度 (法速度) および法線方向加速度 (法加速度) であり、それぞれ

$$v_n = \boldsymbol{n}\cdot(\dot{\boldsymbol{R}}_o + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

$$a_n = \boldsymbol{n}\cdot(\ddot{\boldsymbol{R}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

である。弾性振動が無い場合は (7) 式の右辺第二項は $\boldsymbol{n}$ と $\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle$ の直交性により零になる。しかし、弾性振動が存在する場合は $\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle$ には振動よる法線方向成分が存在するため、$\boldsymbol{n}$ と直交せず零にならない。弾性体振動による弾性体表面の法線方向の変位を u とすると、弾性体振動による法速度 $u_t = \partial u/\partial t$ と法加速度を $u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$ を用いて

$$\boldsymbol{n}\cdot\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle = u_t \tag{11}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\langle\ddot{\boldsymbol{r}}\rangle = u_{tt} - k_n\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle^2 \tag{12}$$

が得られる。ここで k_n は、弾性体表面の法曲率である。(12) 式に法曲率に比例する求心加速度項が現れるのは、$\langle\ddot{\boldsymbol{r}}\rangle$ が弾性体表面に固定された点の加速度ではなく、表面を滑動する流体の物体固定座標系から観測した加速度であるからである。これらの関係式を考慮すると、弾性体表面での幾何学的境界条件式

$$\{\phi_n\} = \{v_n\} + \{u_t\} \tag{13}$$

$$\{\Phi_n\} = \{a_n\} + \{u_{tt}\} + \{q\} \tag{14}$$

が導かれる。ここで

$$q = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{n}\cdot 2\boldsymbol{\omega}\times\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle - k_n\langle\dot{\boldsymbol{r}}\rangle^2 \tag{15}$$

は流体の速度場から加速度場への寄与であり、速度場の解から陽に計算することができる項をまとめたものである。数値計算では Fig.2 に白丸 ∘ で示す弾性体接水表面の全ての collocation point に (13) 式と (14) 式を境界条件として用いるので、その事を明示するために変数を中括弧 $\{array\ formula\}$ の中に入れた。

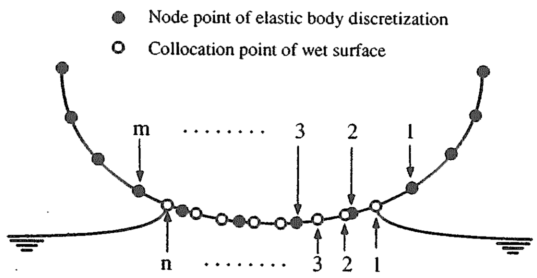

Fig.2 Explanatory drawing of node points of elastic body discretization and collocation points on wet surface for fluid motion computation

2.3 加速度ポテンシャルに関する弾性体表面での陰境界条件

さて、(14) 式で与えられた幾何学的境界条件には法加速度 a_n と u_{tt} が含まれているが、これらは未知数であるため (14) 式を陽に用いることはできない。その理由は、弾性体表面の法加速度は流体と弾性体との動的な力の釣合により定まるものであり、流体と弾性体との連成運動を解いて初めて決定できるからである。実際に加速度場を解くには (14) 式をそのまま用いるのではなく、弾性体の運動方程式を用いて (14) 式から法加速度を消去して得られる陰境界条件を用いる。そこで次に、弾性体の運動方程式から得られる法加速度の表示式を用いて、陰境界条件式を導く。

2.3.1 剛体モードの運動による弾性体表面の法加速度

剛体運動の一般化運動方程式は

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{F} \tag{16}$$

と書ける。ここで、$\boldsymbol{\mathcal{M}}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ は慣性テンソルならびに剛体運動の一般化加速度、$\boldsymbol{F}$ は一般化外力、$\boldsymbol{\beta}$ はジャイロモーメントである。2 次元問題では $\boldsymbol{\beta} = 0$ である。一般化法線方向ベクトル $\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})$ を導入して一般化流体力を接水表面 s 上での圧力積分

$$\boldsymbol{F}_f = \int_s p\,\boldsymbol{N}ds = \int_s (-\Phi - Z)\,\boldsymbol{N}ds \tag{17}$$

で書き表し、他の重力や推力等の外力を $\boldsymbol{F}_g$ と書くと、全外力は

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_f + \boldsymbol{F}_g = \int_s (-\Phi - Z)\,\boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g \tag{18}$$

となる。これらの式を用いると剛体運動による弾性体の表面の法加速度の表示式

$$
\begin{aligned}
a_n &= \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{\beta}) \\
&= \boldsymbol{N}\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}\{\int_s(-\Phi - Z)\boldsymbol{N}ds + \boldsymbol{F}_g - \boldsymbol{\beta}\} \quad (19)
\end{aligned}
$$

が得られる。また境界要素法を用て (19) 式の積分を離散化すると

$$\{a_n\} = [A]\{\Phi\} + \{B\} \quad (20)$$

が得られる [1)]。

2.3.2　弾性振動による弾性体表面の法加速度

任意の弾性体の振動方程式を記述することは容易ではないが、離散化振動方程式であれは、一般的に

$$[\hat{\boldsymbol{M}}]\{\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}\} + [\hat{\boldsymbol{K}}]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} = [\hat{\boldsymbol{F}}]\{\hat{p}\} \quad (21)$$

の形に書き表せることが知られている。ここで $\{\hat{\boldsymbol{u}}\}$ および $\{\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}\}$ は弾性振動による節点変位と節点加速度、$[\hat{\boldsymbol{M}}]$ は質量行列、$[\hat{\boldsymbol{K}}]$ は剛性行列、$\{\hat{p}\}$ は節点での圧力、そして $[\hat{\boldsymbol{F}}]$ は圧力を各節点に作用する等価な集中荷重に変換するための変換行列である。本報告では簡単化のため外力として水圧だけを考え、弾性体の内部減衰項は省略することにする。式中のハットマーク'^'は弾性体の節点について求めた値であることを示している。この離散化方程式は有限要素法等による動的構造解析に良く用いられる式である。この方程式を $\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}$ に関して解くと、

$$\{\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}\} = -[\hat{\boldsymbol{K}}_M]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} + [\hat{\boldsymbol{F}}_M]\{\hat{p}\} \quad (22)$$

が得られる。ここで、$[\hat{\boldsymbol{K}}_M] = [\hat{\boldsymbol{M}}]^{-1}[\hat{\boldsymbol{K}}]$ また $[\hat{\boldsymbol{F}}_M] = [\hat{\boldsymbol{M}}]^{-1}[\hat{\boldsymbol{F}}]$ である。以上の定式化は3次元問題でも成り立つが、以下では問題を2次元に限ることにする。

Fig.2は2次元の流力弾性問題の模式図である。図中に白丸○で示した点は、流体境界上のcollocation pointで、接水面の運動に従い弾性体表面を移動する。一方、図中に黒丸●で示した点は弾性体を離散化する節点で、弾性体表面に固定されており移動しない。先に示した (14) 式はcollocation point○に関する式であり、(22) は節点●に関する式である。そこで、これらの式を結合するためには、(22) 式をcollocation point○に関する式に書き換える必要がある。

まず、(22) 式から弾性体表面の法線方向成分に関係する式だけを抜き出す。

$$\{\hat{u}_{tt}\} = -[\hat{K}_M]\{\hat{u}\} + [\hat{F}_M]\{\hat{p}\} \quad (23)$$

ここで、$\{\hat{u}\}$ と $\{\hat{u}_{tt}\}$ はそれぞれ節点●の変位と加速度 $\{\hat{\boldsymbol{u}}\}$, $\{\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}\}$ の法線方向成分であり、$[\hat{K}_M]$ と $[\hat{F}_M]$ は $[\hat{\boldsymbol{K}}_M]$ と $[\hat{\boldsymbol{F}}_M]$ から法線方向成分に関連する部分だけを取り出した部分行列である。通常、(22) 式は弾性体に固定された一つの全体座標系で記述されるため、これらの部分行列を求めるには全体座標系から各要素の局所座標系への変換が必要である。

次に、節点●に関する式から内挿法によりcollocation point○に関する式を求める。Fig.2の節点●のうち、1から m で示す内挿に必要な最小限の点を選び、(23) 式から $\hat{u}_i, i = 1 \sim m$ に関係する部分だけを抜き出して

$$\{\hat{u}'_{tt}\} = -[\hat{K}'_M]\{\hat{u}'\} + [\hat{F}'_M]\{\hat{p}'\} \quad (24)$$

と書く。ここでダッシュ' ′'は内挿に必要な最小限の点の集合であることを示している。n 行 m 列の内挿行列 $[IP]$ を導入し、1から n で示すcollocation point○での $\{u_{tt}\}$ の値を節点●での値を用いて内挿すると、

$$\{u_{tt}\} = [IP]\{\hat{u}'_{tt}\} \quad (25)$$

と記述できる。$[IP]$ の導出とその正則性については付録に示す。

次に、内挿の逆の操作が必要となる。これには $[IP]$ の逆行列を求める必要があるが、$[IP]$ は正方行列ではないため、一般に逆行列が存在するとは限らず、存在してもユニークであるとは限らない。しかし、もし逆行列 $[IP]^{-1}$ が存在し、それが

$$
\left.
\begin{array}{lll}
(a) & [IP][IP]^{-1}[IP] & = [IP] \\
(b) & [IP]^{-1}[IP][IP]^{-1} & = [IP]^{-1} \\
(c) & ([IP]^{-1}[IP])^T & = [IP]^{-1}[IP] \\
(d) & ([IP][IP]^{-1})^T & = [IP][IP]^{-1}
\end{array}
\right\} \quad (26)
$$

を満たす場合には、$[IP]^{-1}$ はMoore-Penrose一般逆行列と呼ばれるユニークな逆行列であり、通常 $[IP]^+$ と記述される。$[IP]^+$ は m 行 n 列の行列で、$[IP]^+$ が存在すれば内挿の逆操作を正確に行うことが可能になる。幸い、本報で用いる内挿行列には $[IP]^+$ が存在し、次の定理を用いて求めることができる。

$$[IP]^+ = ([IP]^T[IP])^{-1}[IP]^T \ , \quad when\ Rank([IP]) = m \tag{27}$$

$$[IP]^+ = [IP]^T([IP]^T[IP])^{-1} \ , \quad when\ Rank([IP]) = n \tag{28}$$

Moore-Penrose 一般逆行列については岡本ら [21] が詳しく解説している。

$[IP]^+$ を用いると $\{\hat{p}'\}$ は

$$\{\hat{p}'\} = [IP]^+\{p\} \tag{29}$$

と書ける。そこで、(24) 式に $[IP]$ を掛け、(25) 式と (29) 式を用いると、collocation pointo での u_{tt} の値は

$$\{u_{tt}\} = -[IP][\hat{K}'_M]\{\hat{u}'\} + [IP][\hat{F}'_M][IP]^+\{p\} \tag{30}$$

となる。ここで、$p = -\Phi - Z$ を (30) 式に代入すると、弾性振動による弾性体表面の法加速度と加速度ポテンシャルとの関係式

$$\{u_{tt}\} = [C]\{\Phi\} + \{D\} \tag{31}$$

$$[C] = -[IP][\hat{F}'_M][IP]^+ \tag{32}$$

$$\{D\} = -[IP][\hat{K}'_M]\{\hat{u}'\} + [C]\{Z\} \tag{33}$$

が得られる。

2.3.3 Φ の弾性体表面での陰境界条件

境界条件式 (14) 中の法加速度 a_n と u_{tt} は未知数であるが、これらは (20) 式と (31) 式を用いて消去することができ、次の陰境界条件式

$$\{\Phi_n\} = [A + C]\{\Phi\} + \{B + D + q\} \tag{34}$$

が得られる。本陰境界条件式は弾性体表面での加速度ポテンシャル Φ とそのフラックス Φ_n との関係を与える式である。この境界条件式は Φ の幾何学的境界条件と弾性体の剛体モードと振動モードの運動方程式から導かれたもので、幾何学的境界条件であると同時に流体と弾性体の連成運動を記述する力学的境界条件でもある。本陰境界条件を用いることで、流力弾性問題を振動モード分解を行わずに時間領域でシミュレートすることができる。

2.4 流力弾性問題の数値計算法

加速度場の境界値問題を境界要素法で解くためには、Φ はラプラスの式を満たさないため適切ではない。しかし、先に導いた Φ に関する境界条件から容易に $\phi_t(\equiv \partial\phi/\partial t)$ に関する境界条件を導くことができる。ϕ_t はラプラスの式を満たすので、数値計算には ϕ と ϕ_t を用い、これらに関する境界値問題を境界要素法で解いて、流力弾性問題の計算を行う。

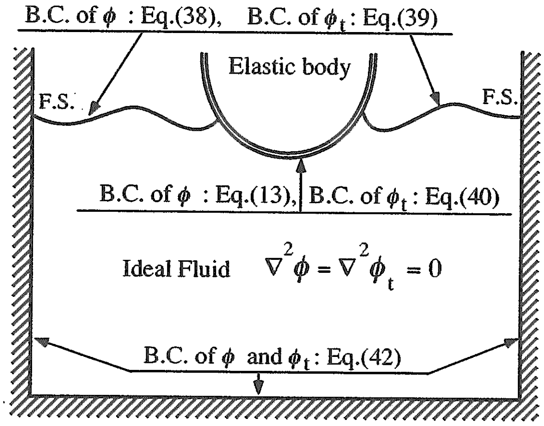

Fig.3 Boundary value problem

Fig.3 に境界値問題を整理して示す。グリーンの恒等式より積分方程式

$$c(\mathcal{Q})\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{Q})\\ \phi_t(\mathcal{Q})\end{array}\right\} = \int_S \left\{\left\{\begin{array}{c}\phi(\mathcal{P})\\ \phi_t(\mathcal{P})\end{array}\right\}\frac{\partial}{\partial n}\ln R(\mathcal{P},\mathcal{Q}) - \ln R(\mathcal{P},\mathcal{Q})\left\{\begin{array}{c}\phi_n(\mathcal{P})\\ \phi_{tn}(\mathcal{P})\end{array}\right\}\right\} dS \tag{35}$$

を得る。ここで $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ は境界上の点、c は点 $\mathcal{Q}$ での境界の外角である。境界要素を用いてこの積分方程式を離散化すると

$$[H]\{\phi\} = [G]\{\phi_n\} \tag{36}$$

$$[H]\{\phi_t\} = [G]\{\phi_{tn}\} \tag{37}$$

となる。ここで $[H], [G]$ が影響係数行列である。この離散化境界値問題を以下の境界条件の下で解く。

ϕ と ϕ_t に関するの自由表面の力学的境界条件は

$$\phi = \int_0^t \{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - gZ\}\, dt \tag{38}$$

$$\phi_t = -\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - gZ \tag{39}$$

である。ここで時間積分は流体粒子を追跡してラグランジェ流に行う。自由表面の幾何学的境界条件は、自由表面上の流体粒子運動を追跡して自由表面

の運動を計算することで満足させることができる。すなわち、混合オイラー・ラグランジェ法 (MEL) と呼ばれる方法を用いる。弾性体による波の散乱放射問題では放射条件が必要となるが、その時には自由表面条件に減衰項を付加した減衰領域を設けることで、放射条件を満足させればよい [1]。

弾性体表面での ϕ に関する境界条件は (13) 式で与えられ、ϕ_t に関する陰境界条件は (1) 式を (34) 式に代入して得られる。

$$\{\phi_{tn}\} = [A+C]\{\phi_t\} + \{B+D+q'\} \quad (40)$$

$$q' = q + [A+C]\{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\} - \frac{\partial}{\partial n}\left\{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right\} \quad (41)$$

ここで、q' は ϕ の解から陽に計算することができる。

計算領域の底面と側面での境界条件は

$$\phi_n = \phi_{tn} = 0 \quad (42)$$

である。

Fig.4 にシミュレーション法のフローチャートを示す。シミュレーション計算のフローの概略は以下の通りである。

1. 最初に与えられた初期自由表面形状ならびに初期条件から離散化方程式 (36),(37),(23) 式を構築する。
2. 次に、内挿行列とその Moore-Penrose 一般逆行列を計算する。また ϕ の境界条件を求めて速度場を解く。
3. ϕ の解を用いて ϕ_t に関する境界条件を (39),(40),(42) 式から計算し、加速度場を解く。
4. ϕ_t の解から弾性体接水面での圧力分布 $\{p\}$ と流体力 $\boldsymbol{F}_f$ を計算する。
5. 剛体運動の加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ を (16) で計算し、弾性振動による節点加速度を $\{\hat{\boldsymbol{u}}_{tt}\}$ を (22),(29) 式より計算する。
6. MEL 法を用いて自由表面の位置と ϕ の値を次の時間ステップでの値に更新する。
7. また弾性体の変位は速度を、速度は加速度を時間積分して更新する。時間積分に 4 次の Runge-Kutta 法を用いた。

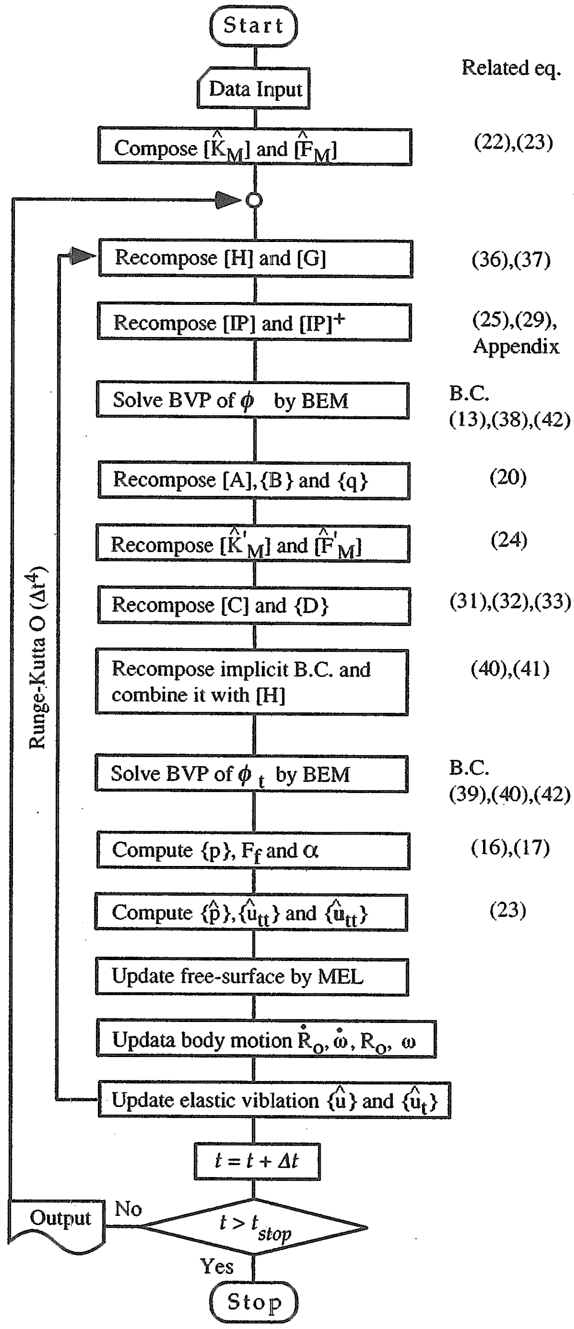

Fig.4 Flow of the simulation

3　簡単なシミュレーションによる定式化の検証

以上の定式化に基づくシミュレーションプログラムを作成し、無限流体中に置かれた一様梁の接水振動を時間領域でシミュレートした。この計算では梁の両端の境界条件を単純支持とし、剛体運動は省略した。計算に用いた梁の分割数は 20 である。梁の振動は初期変位

$$u(x)_{at\ t=0} = u_o \sin\frac{n\pi x}{L}, \ [0 \le x \le L] \quad (43)$$

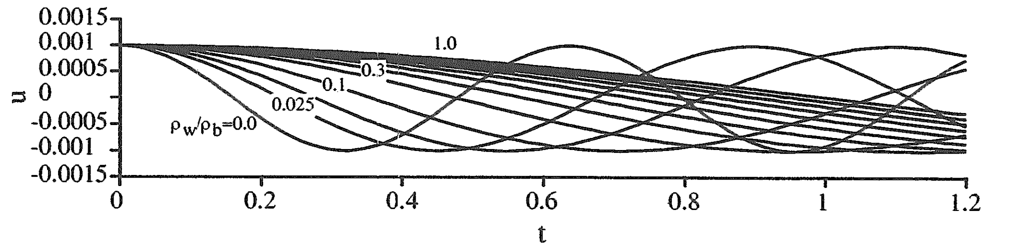

Fig.5 Simulated hydro-elastic vibration of a hinged beam : u at the center of beam

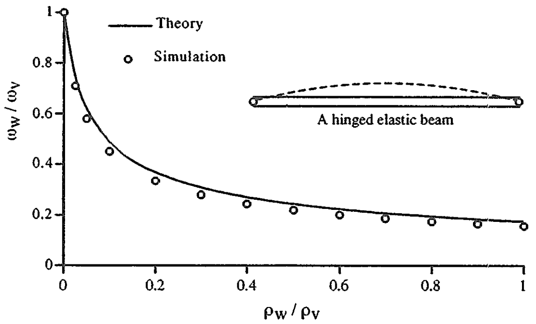

Fig.6 Natural frequency of the lowest mode vibration of the beam in unbounded fluid

Table 1-a Nondimensionalization

Variables	Unit value
time	$\sqrt{h\rho_b L^4/EI}$
velocity	$\sqrt{EI/h\rho_b L^2}$
acceleration	$EI/h\rho_b L^3$
force	EI/L^2
pressure	EI/L^4
mass	$h\rho_b L$

Table 1-b Nondimensionalization

Variables	Unit value
time	$\sqrt{L_b/g}$
velocity	$\sqrt{L_b g}$
acceleration	g
force	$\rho g L_b^3$
pressure	$\rho g L_b$
mass	ρL_b^3
rigidity	$\rho g L_b^5$

を与えて励起した。ここで x 軸は梁の中性軸、n は振動モード数、u_o は初期変位の振幅で梁の長さの 0.1%とした。計算は梁の長さ L、梁の曲げ剛性 EI、梁の厚さ h と梁の密度 ρ_b の積で定義される梁の線密度 $h\rho_b$ を単位として無次元化して実施した。具体的な無次元化は Table.1-a に示す。

Table 2 Natural frequencies of the beam vibration

(a) In vacuum

Mode	$\omega_{vn}/\omega_{v1(Theory)}$		
	$\rho_w/\rho_b = 0$		
n	Theory	Simulation	Difference (%)
1	1	0.999	-0.06
2	4	4.000	0.00
3	9	9.000	0.00
4	16	16.002	0.01
5	25	25.006	0.02
6	36	36.019	0.05
7	49	49.048	0.10
8	64	64.106	0.17
9	81	81.212	0.26

(b) In unbounded fluid

Mode	$\omega_{wn}/\omega_{w1(Theory)}$		
	$\rho_w/\rho_b = 0.1$		
n	Theory	Simulation	Difference (%)
1	1.000	0.949	-5.10
2	5.082	5.211	2.54
3	12.822	13.425	4.70
4	24.420	25.876	5.96
5	39.968	42.672	6.77
6	59.516	63.941	7.43
7	83.091	89.727	7.99
8	110.712	120.014	8.40
9	142.389	154.859	8.76

最初に Fig.5 に最も低次の振動モード $(n = 1)$ の梁中央での変位の時間波形を示す。図から流体の密度 ρ_w が大きくなるに連れて振動周期が長くなっている様子が読みとれる。本シミュレーションで得られた振動周波数の流体密度依存性を Fig.6 に示す。横軸は流体と弾性体との密度比であり、縦軸は梁の流体中での固有振動数 ω_w を真空中での固有周波数 ω_v で正規化したものである。図中の実線は鬼頭 [2] が求めた無限長の梁の接水振動周波数の理論値

$$\frac{\omega_w}{\omega_v} = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{2a\rho_w}{n\pi h\rho_b} \tag{44}$$

で、a は振動波形の半波長である。理論では端部影響が考慮されていないため本計算結果との厳密な比較はできないが、丸印で示す計算値は理論値と定性的に良く一致している。

次に、高次振動の固有周波数の計算結果を理論値と比較して Table 2 に示す。$\rho_w/\rho_b = 0$ の場合、すなわち真空中での計算結果は梁理論から求められる理論値に極めて良く一致しており、9 次のモードでも差は僅かである。一方、$\rho_w/\rho_b = 0.1$ の接水振動の計算も定性的には鬼頭の理論値と良く一致している。接水振動の計算で見られる差は、無限長梁の接水振動の理論値では端部影響が考慮されていないためと考えられる。Fig.7(a)-(i) に各モードの計算で得られた変動圧の分布を示す。

4　水面衝撃の計算例

試計算としてオイラー梁の水面衝撃問題をシミュレートした結果を示す。Fig.8 にオイラー梁が波頂に衝突した瞬間を示す。梁の落下速度は一定 $(V = 1)$ で、その中央で波頂に衝突する。また梁の両端は剛体に固着されている。問題を単純にするため梁の長さ L_b, 曲げ剛性 EI, 線密度 $\rho_b h$, 流体領域の幅 L, 平均深さ D, 流体の密度 ρ_f, 重力加速度 g はすべて 1 とし、他の量は ρ_f,g,L_b を用いて無次元化した。具体的な無次元化は Table 1-b に示す。梁は 10 要素に等分割、流体境界は梁の接水部に 20、自由表面に 20x2、その他の境界に 10x3 の collocation point を配した。

梁が水面に衝突する前の自由表面の運動を Fig.9 に示す。この水面運動は時刻 $t = 0$ において与えられた形状, $\eta(x)_{t=0} = 0.1\cos(2\pi x)$, で静止した状態からの非線形シミュレーションで得られたものである。梁が波頂に衝突する時刻を $t = 0.7$ とすると、その時の水面の上昇速度は 0.3367 であり、相対的な衝撃速度は 1.3367 となる。

Fig.10 に衝突後の自由表面形状の計算結果を示す。衝突の瞬間には、接水幅は本来ゼロであるべきだが、数値計算ではこれを満足させることが困難であるので波頂の一部をカットし $\Delta x \approx 0.03$ の微小な有限幅を与えて衝突後のシミュレーション計算を行った。また、衝撃後のシミュレーションには梁に沿って飛び出す薄いスプレー部分も計算の妨げになるため、スプレー部もカットしながら計算を進めた。衝撃過程のシミュレーションは以上のように大まかに行ったものである。

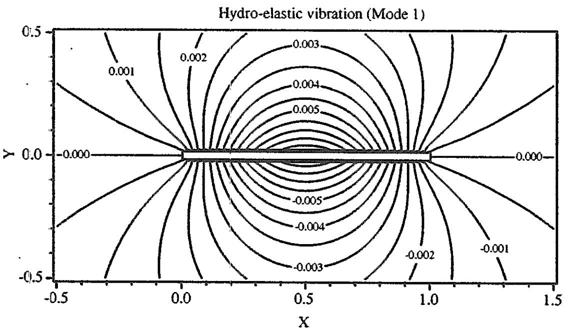

Fig.7(a) Pressure distribution (Mode 1)

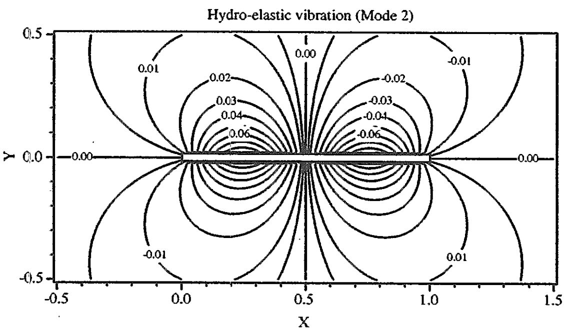

Fig.7(b) Pressure distribution (Mode 2)

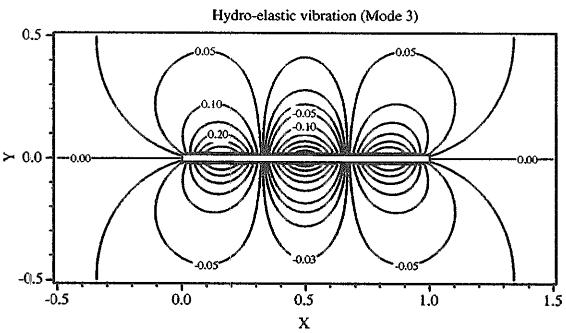

Fig.7(c) Pressure distribution (Mode 3)

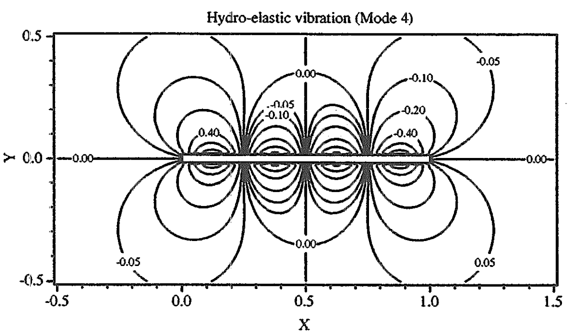

Fig.7(d) Pressure distribution (Mode 4)

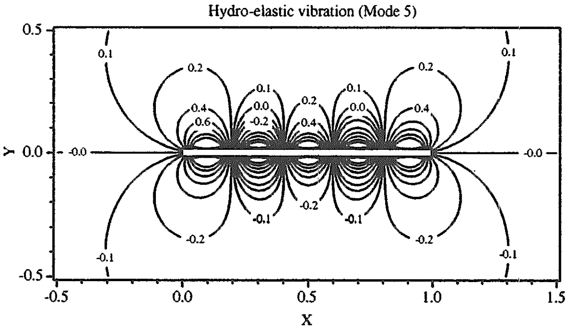

Fig.7(e) Pressure distribution (Mode 5)

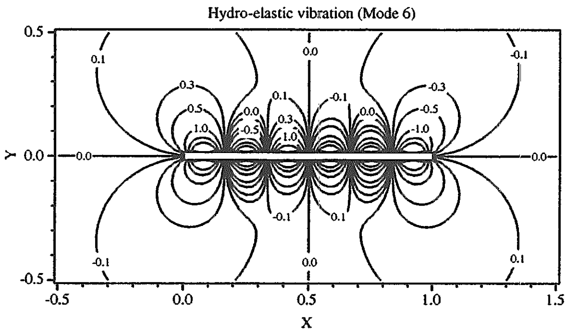

Fig.7(f) Pressure distribution (Mode 6)

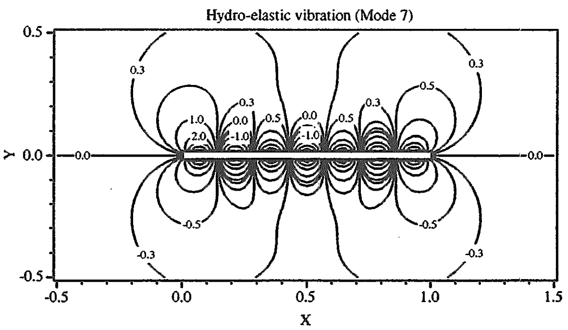

Fig.7(g) Pressure distribution (Mode 7)

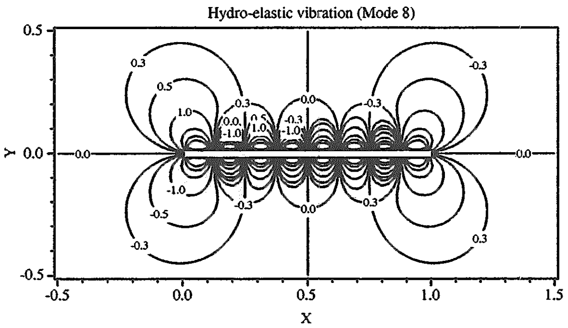

Fig.7(h) Pressure distribution (Mode 8)

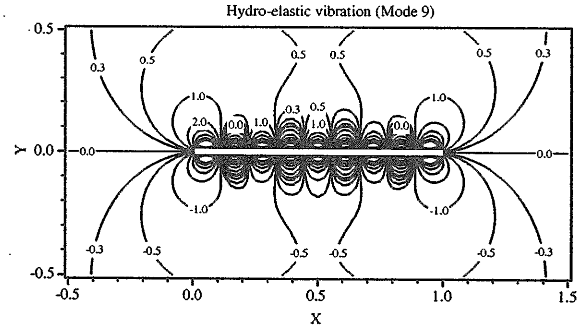

Fig.7(i) Pressure distribution (Mode 9)

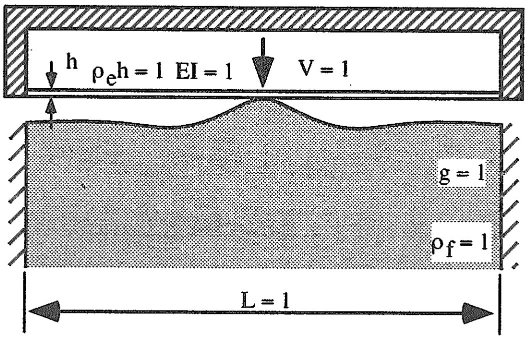

Fig.8 Simulation of Euler beam impact on a wave crest

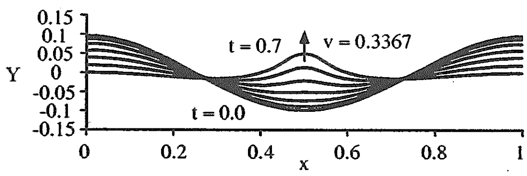

Fig.9 Free-surface motion before the contact

Fig.11 に計算で得られた弾性梁上の衝撃圧分布 (実線) と剛体梁上の衝撃圧分布 (破線) を比較して示す。弾性影響を見るために剛体梁の水面衝撃も同じ計算コードでシミュレートした。時刻 $t = 0.712$ から $t = 0.720$ にかけて破線の周りに実線が変動している様子が確認できる。この変動が弾性の影響である。

次に、弾性梁の変形を Fig.12 に示す。時刻 $t = 0.732$ において弾性変形に二つのピークが観察できるが、これは Fig.11 に示した衝撃圧分布の二つのピークに対する静的な応答ではなく、動的な 3 次の弾性応答によるものと考えられる。

弾性梁の $x = 0.1 \sim 0.5$ における変位 u と加速度 u_{tt} の時間波形を Fig.13 と Fig.14 に示す。また、剛体梁と弾性梁の $x = 0.4 \sim 0.5$ における衝撃圧の

時間波形を Fig.15 と Fig.16 に示す。衝撃の初期の段階では非常に高い衝撃圧が計算されているが、この高い衝撃圧は波頂をカットしたことに起因する初期条件の特異性によるものである。よって衝撃圧波形の最大値は信頼できない。より正確なシミュレーションには、初期条件に特異性の無い解析解を用いる必要があろう [15)]。しかし、衝撃の初期段階を除けば、剛体梁と弾性梁の衝撃圧の計算値は妥当なものである。Fig.15 には弾性振動による衝撃圧の変動が観察できる。流力弾性衝撃が正しくシミュレートされていれば、同じ変動が梁の法加速度にも観察されなければならない。$x = 0.5$ における衝撃圧の変動と Fig.14 に示す同じ $x = 0.5$ における弾性梁の法加速度を比較すると明らかに強い相関が確認できることから、本計算法の定式化に大きな誤りはなく、シミュレーションプログラムも定量的な信頼性はこれから向上させる必要があるものの、定性的には正しい答えを出すものと考える。

5　結　言

本研究では自由表面が存在する場合にも適用可能な流力弾性問題の時間領域非線形計算法を開発するため、弾性体と自由表面を有する理想流体との非線形相互作用の定式化を行った。また、2次元の流力弾性シミュレーションプログラムを試作し、オイラー梁の水面衝撃問題をシミュレートした。以下の項目は本研究の主な結果である。

1. 速度ポテンシャル ϕ ならびに加速度ポテンシャル Φ に関する弾性体表面での厳密な幾何学的境界条件を導いた。
2. 加速度ポテンシャル Φ と弾性振動による物体表面の法加速度 u_{tt} との関係式を導いた。
3. 弾性体表面での Φ に関する幾何学的かつ力学的境界条件である陰境界条件式を導いた。
4. 3 次の B-Spline に基づく内挿行列と、その Moore-Penrose 一般逆行列を導入し、数値計算に必要な内挿およびその逆操作技術を開発した。
5. これらを総合して 2 次元の流力弾性シミュレーションプログラムを開発した。
6. 無限流体中での両端単純支持梁の接水振動をシミュレートし、計算結果が定性的に鬼頭の理論値と良く一致することを示した。
7. オイラー梁の流力弾性水面衝撃の試計算を実施し、弾性振動と衝撃圧との間に明らかな相関が見られることを確認した。

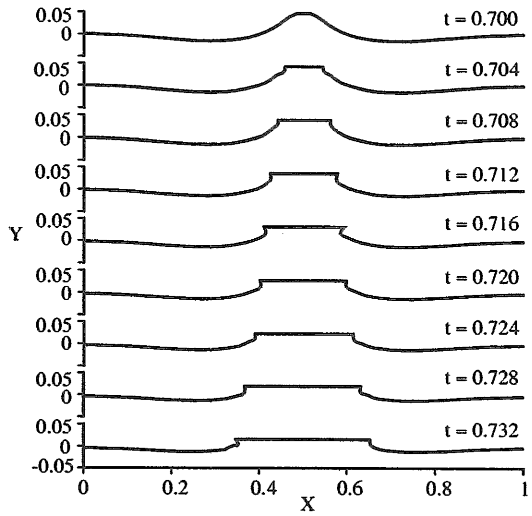

Fig.10 Free-surface motion after the contact

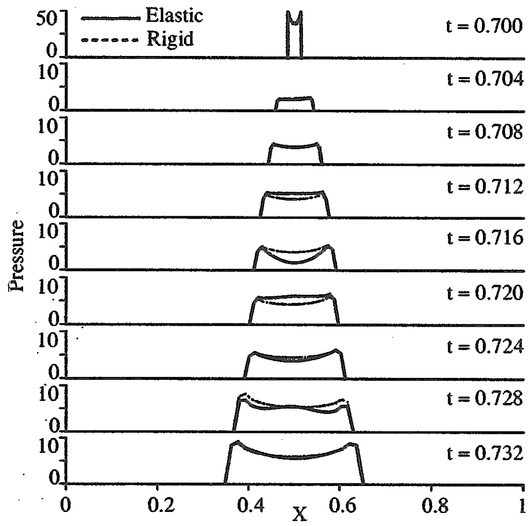

Fig.11 Impact pressure distribution

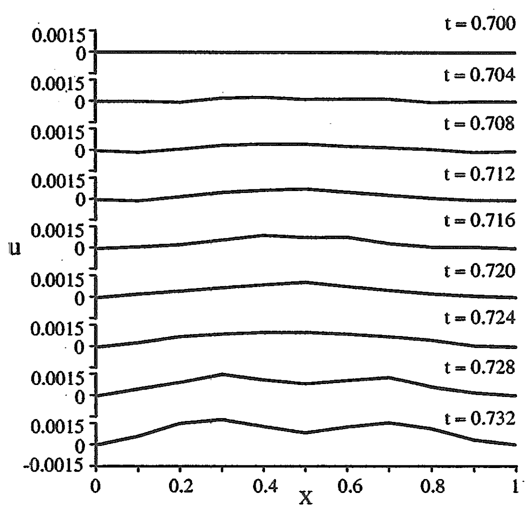

Fig.12 Beam distortion during the impact

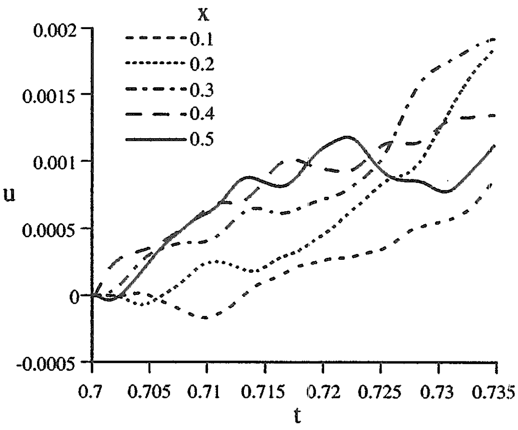

Fig.13 Time history of beam vibration : u

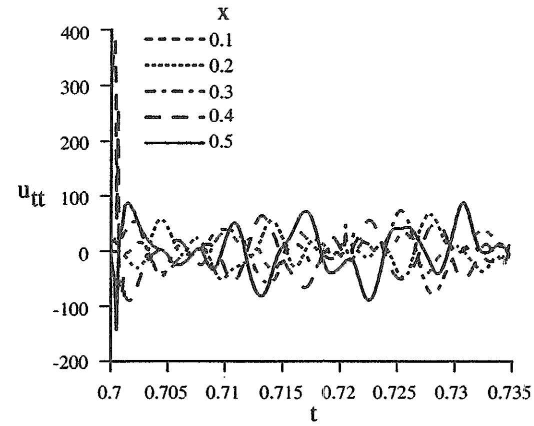

Fig.14 Time history of beam vibration acceleration : u_{tt}

参考文献

1) 谷澤克治, "加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究", 学位論文, 大阪大学, (1997), pp.1-127

2) Kito,F., "Principles of hydro-elasticity ", *Yokendo*, (1970), pp.1-129

3) Kvalsvold,J. and Faltinsen,O., "Hydroelastic modeling of wetdeck slamming on multihull vessels", *J Ship Res.*, vol.39, (1995), pp.225-229

4) Faltinsen,O.M., "The effect of hydroelasticity of ship slamming", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, vol.355, (1997), pp.575-591

5) Khabakhpasheva,T.I. and Korobkin,A.A., "Wave impact on elastic plates ", *Proc. 12th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, (1997), pp.135-138

6) Kawai,T. and Muraki,T., "Matrix method of Analysis of ship structure (IV)", *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, vol.126, (1969), pp.245-252

7) 荒井誠, 宮内達哉, "水面衝撃をうける円筒殻の流体・構造連成応答シミュレーション", 船論, vol.182, (1997), pp.827-835

8) 角洋一, 他, "微小水撃角における弾性平板の水面衝撃の研究", 船論, vol.182, (1997), pp.639-646

9) 遠山泰美, "スラミングに対するクロスデッキパネルの弾性応答について", 船論, vol.183, (1998), pp.417-423

10) Wagner,V.H., "Über stoβ und gleitvorgänge an der oberfläche von Flüssigkeiten", *Zeitsihrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, vol.12, (1932)

11) 宮本武, 谷澤克治, "船首部に作用する衝撃荷重について（第1報、第2報）", 船論, vol.156, (1984), pp.297-305, vol.158, (1985), pp.301-310

12) 竹本博安, "楔形模型による矩形版の水面衝撃実験とその解析", 船論, vol.156, (1984), pp.306-313

13) 竹本博安, "水面衝撃水圧に関する一考察", 船論, vol.156, (1984), pp.314-322

14) 谷澤克治, "境界要素法による楔の着水問題の相似解", 関船誌, vol.196, (1985), pp147-154

15) Zhang,S., Yue,D.K.P. and Tanizawa,K., "Simulation of plunging wave impact on a vertical wall", *J Fluid Mech.*, vol.327, (1996), pp.221-254

16) Tanizawa,K., "A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves ", *J. Soc. Nav. Arch. Japan*, vol.178, (1995), pp.179-191

17) Tanizawa,K., "A Nonlinear simulation method of hydro-elastic problem ",

Proc. 5th Symposium on Nonlinear and Free-Surface Flow, Hiroshima, (1997)

18) 谷澤克治, "浮体の弾性変形を考慮した波浪中動揺の非線形計算法", 応用力学研究所研究集会講演論文集, 福岡, (1997), pp.64-68

19) Tanizawa,K., "A time-domain simulation method for hydroelastic impact problem" *Proc. 2nd Int. Conf. Hydroelasticity in Marine Tech.*, Fukuoka, Japan, (1998), pp119-127

20) 中川憲治, "工科のための一般力学", 森北出版, (1977), pp.113-120

21) 岡本良夫, 武者利光, "逆問題とその解き方", オーム社,(1992),pp1-238

22) Kawai,T., 1970, "Matrix method for vibration and elastic response ", *Baifu-kan*, (1970), pp.1-235

付録:Cubic-B spline を用いた内挿行例の求め方

一価関数 $f(x)$ の与えられたサンプルポイントでの値 $\{\hat{f}\} = \{f(\hat{x}_1), f(\hat{x}_2), \ldots, f(\hat{x}_m)\}^T$ を3次のB-スプラインを用いてフィッティングし、サンプルデータ間の値を内挿する行列（内挿行列）を求める。本付録ではハットマーク ^ は与えられたオリジナルのサンプルポイントの値であることを示し、$f(\hat{x}_i)$ は簡単に $\hat{f}_i$ と記述する。

3次のB-スプラインを用いたカーブフィッティングでは、次に示す区間毎に3次のテント関数の和で $f(x)$ を近似する関数を求める。

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} w_i B_i(x) , \tag{A-1}$$

ここで w_i は各テント関数の重みであり、$B_i(x)$ は以下に示す区間毎に3次のテント関数である。

$$B_i(x) = \begin{cases} 0 & & & x < x_{i-2} \\ b_{1i}(x) & x_{i-2} & \leq & x < x_{i-1} \\ b_{2i}(x) & x_{i-1} & \leq & x < < x_i \\ b_{3i}(x) & x_i & \leq & x < x_{i+1} \\ b_{4i}(x) & x_{i+1} & \leq & x < x_{i+2} \\ 0 & x_{i+2} & \leq & x \end{cases} \tag{A-2}$$

$$b_{1i}(x) = \frac{(x-x_{i-2})^3}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_i-x_{i-2})(x_{i-1}-x_{i-2})} \tag{A-3}$$

$$\begin{aligned} b_{2i}(x) = & \frac{(x-x_{i-2})}{(x_{i+1}-x_{i-2})}\left\{\frac{(x-x_{i-2})(x_i-x)}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})}\right. \\ & \left. + \frac{(x_{i+1}-x)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})}\right\} \\ & + \frac{(x_{i+2}-x)(x-x_{i-1})^2}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})} \end{aligned} \tag{A-4}$$

$$\begin{aligned} b_{3i}(x) = & \frac{(x_{i+2}-x)}{(x_{i+2}-x_{i-1})}\left\{\frac{(x-x_{i-1})(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\right. \\ & \left. + \frac{(x_{i+2}-x)(x-x_i)}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+1}-x_i)}\right\} \\ & + \frac{(x-x_{i-2})(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} \end{aligned} \tag{A-5}$$

$$b_{4i}(x) = \frac{(x_{i+2}-x)^3}{(x_{i+2}-x_{i-1})(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})} \tag{A-6}$$

サンプルポイント $\hat{x}_i,\ i = 1 \sim m$ を (A-1) 式に代入すると線形方程式

$$\{\hat{f}\} = [\hat{S}]\{\hat{w}\} \tag{A-7}$$

が得られる。式中の $\{\hat{w}\} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_m\}^T$ は、重み配列であり、$[\hat{S}]$ は3次のB-スプライン行列である。$[\hat{S}]$ の要素はサンプルポイントの座標とテント関数だけから定められる。この方程式を解いて、重み配列を決定する。

$$\{\hat{w}\} = [\hat{S}]^{-1}\{\hat{f}\} \tag{A-8}$$

点 x_j における $f(x)$ の近似値、ずなわち内挿値は、(A-1) 式と得られた重み行列 $\{\hat{w}\}$ から計算できる。Fig.A-3 は与えられたサンプルポイント $\hat{x}_i,\ i = 1 \sim m$ と内挿ポイント $x_j,\ j = 1 \sim n$ を示している。(A-1) 式を全ての内挿点に適用すると、内挿値 $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}^T$ の配列は

$$n\{f\} = [S]\{\hat{w}\} \tag{A-9}$$

と書き表すことができる。ここで、$[S]$ は n 行 m 列のスプライン行列で、その要素はサンプルポイント $\{\hat{x}_i\}$ と内挿ポイント $\{x_j\}$ を用いて計算される。最後に (A-8) 式と (A-9) 式とを統合して $\{f\}$ と $\{\hat{f}\}$ との線形関係式を得る。

$$\{f\} = [S][\hat{S}]^{-1}\{\hat{f}\} = [IP]\{\hat{f}\} \tag{A-10}$$

本式の $[IP] = [S][\hat{S}]^{-1}$ が内挿行列である。

$[IP]$ は n 行 m 列の行列で、その Moore-Penrose 一般逆行列 $[IP]^+$ は $[IP]$ が正則である限り、(27) 式もしくは (28) 式で求められる。Fig.A-4 は $\{\hat{x}\}$ の

典型的な悪いサンプリング例である。この例の場合は $[IP]^+$ は存在しない。理由は簡単である。図で示すテント関数 $B_1(x)$ は $\{x\}$ のどの点をもカバーしない。すなわち、$\hat{x_1}$ は内挿にとって全く不要な点であり、$\hat{f}_1$ の値は内挿値に何の影響も与えない。結果として、$[IP]$ の逆行列は不定となる。$[IP]^+$ が存在するためには $\{\hat{x}\}$ に内挿に不必要な余分な点が含まれないようにする必要がある。

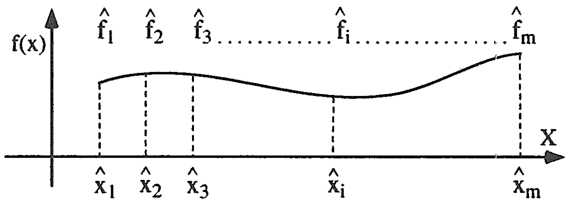

Fig.A-1 Sampling points of function $f(x)$

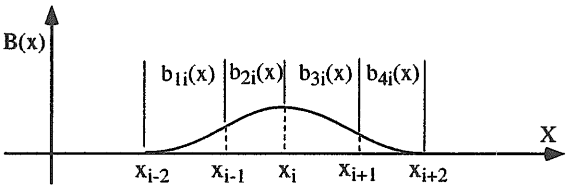

Fig.A-2 Cubic-B spline tent function

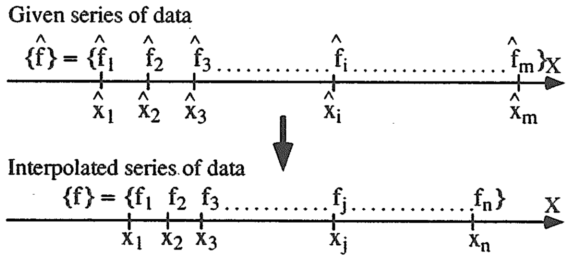

Fig.A-3 Sampling points and interpolated points

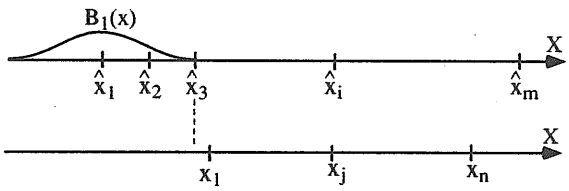

Fig.A-4 An example of bad choice of sampling points