

物流と数理計画

久保幹雄（東京海洋大学）、小林和博（物流研究センター）

On Physical Distribution and Mathematical Programming

by

Mikio KUBO, Kazuhiro KOBAYASHI

1. まえがき

物流はロジスティクスの一部であり、ロジスティクスとは物の流れの最適化に他ならない。数理計画は、最適化理論の一分野であり、数式モデルを経由したアプローチに特徴を持つ。

数理計画の最近の進歩はめざましい。最近では、計算機の速度の向上を遙かに上回る速度で市販の混合整数計画ソルバーの性能が向上しており、その実務への適用が期待される。本稿では、幾つかの例をもとに、数理計画の物流への適用可能性について考える。

物流における数理計画の利用は多岐にわたる。古典的な Weber 型施設配置モデルや経済発注量モデルは、数理計画の分野では非線形計画で求解でき、輸送手段の巡回順決定モデルやロジスティクス・ネットワーク設計モデルは、混合整数計画に帰着できる。以下では、物流における代表的なモデルに対する数理計画アプローチを紹介する。

2. 数理計画

数理計画とは、実務の問題を数式として書き下すことを経路して最適解（最も良いことを保証された解）、もしくはそれに近い解を得るための方法論で

ある。通常は、数式は一つの目的関数といくつかの制約式から構成される。

数理計画モデルの種類には色々なものがあるが、最も基本的でかつ簡単なものとして、線形計画モデルがある。線形計画モデルとは、目的関数及び全ての制約式が線形式であるモデルを表す。このモデルは解きやすく、実際問題の最適解をきわめて短時間で得ることができる。

残念なことに我々が実務で出会う問題が全て線形計画モデルとして定式化できるわけではない。求めたい変数が特定の整数であるという制限を付けたモデルは整数計画モデルとよばれ、工夫次第で様々な実際問題を表現することができる。また、一部の変数が整数に限定されている場合を混合整数計画モデルとよぶ。整数計画や混合整数計画モデルでは、問題の規模の増加に伴い計算時間が急激に増加することが（おそらく）避けられないことが示されており、このような現象は一般に「組合せ爆発」と呼ばれる。数理計画パッケージに含まれるソルバーには組合せ爆発を回避するための種々の工夫が組み込まれている。大規模な問題は、性能の良いソルバーを用いその内部アルゴリズムで解きやすいようにモデルを定式化することで解ける場合も少なくない。整数計画問題の整数変数を連続変数とみなしたものが線形計画緩和問題である。線形計画緩和問題の情報を用いて

整数計画問題を解く方法はよく用いられる。

目的関数及び全ての制約式が線形式と限らない場合は非線形計画モデルとよばれる。制約式を満たすベクトルの集合を実行可能領域といい、その領域内のベクトルを実行可能解という。いま、実行可能領域が凸集合の場合を考える。目的関数が凸関数の場合、その最小化問題の最適解は勾配を 0 とおいた方程式を解くことにより得られる。一方、目的関数が凹関数の場合、その最小化問題の最適解は実行可能領域の端点となることはわかっているが通常その端点が非常に多いため、最適解を得ることは難しい。

非線形関数を線形関数の集まりとして近似する方法として区分的線形関数を用いた方法がある。区分的線形関数により近似した問題は線形計画モデルに帰着でき、大規模な問題でも短時間で解くことができる。

3. ロジスティクス・ネットワーク設計問題

ロジスティクス・ネットワーク設計問題は古典的な施設配置問題の拡張であり、ロジスティクス・ネットワーク設計問題の全体の最適設計を行う。このモデルでは、物の空間上の移動は実数変数であるフローとして定式化される。フローに伴う固定費用がない場合は線形計画に帰着されるので、超大規模問題でも容易に求解できるが、輸送手段や段取りに伴う固定費用が存在する場合は、整数変数を用いる必要があるため混合整数計画となる。この場合には、求解可能な問題の大きさも制限されるが、データの適当な集約を行えば現実問題の求解もそれほど困難なことではない。数理計画モデルで求解することにより得られるのは、倉庫、工場、生産ラインの設置の是非、地点間別の各製品群の単位期間内の総輸送量、生産ライン別の各製品群の単位期間内の総生産量、輸送モードの選択などである。

また、単位期間を月（もしくは週や日）とした多期間モデルも、同じように混合整数計画として定式化できる。これは、月（週、日）別の需要量情報をもとに、各月における生産量、輸送量、在庫量を決定するためのモデルであり、従来は工場内だけで用いられてきた機械容量などの資源制約を考慮した生産計画をサプライ・チェーン全体に拡張したものである。この多期間モデルにおいて、輸送機器（トラックや船など）をネットワーク上を移動する資源として捉えることにより、多期間の輸送・在庫計画の最適化に対しても適用することができる。ただし、大規模問題の求解は、ソルバーの性能や定式化の工夫をしないと難しくなる。

4. 動的ロットサイズ決定問題

ロジスティクス・ネットワーク設計問題が主に空間内の物の移動を最適化するのに対して、動的ロットサイズ決定問題は空間上の移動は所与とした上で時間上の移動を最適化する。これは、多期間のロジスティクス・ネットワーク設計問題の特殊形だが、生産スケジュールから生まれた問題であるので、時間上の様々な制約を扱えるように発展してきた。

最も基本的な単一段階単一品目の動的ロットサイズ決定問題の基本形は、以下の仮定を持つ。

1. 期によって変動する需要量を持つ単一の品目を扱う。
2. 品目を生産するには、生産数量に依存しない固定費用と数量に比例する変動費用がかかる。
3. 計画期間は予め決められており、最初の期の在庫量（初期在庫量）は 0 とする。
4. 次の期に持ち越した品目の量に比例して在庫保管費用がかかる。
5. 生産時間は 0 とする。これは生産を行ったその期にすぐに需要を満たすことができることを表す。
6. 各期の生産可能量には上限がある。
7. 生産固定費用、生産変動費用、ならびに在庫費用の合計を最小にするような生産方策を決める

動的ロットサイズ決定問題は混合整数計画に帰着できるが、単に定式化しただけでは求解が難しいことが多い。そのため、適用する問題に応じた定式化の工夫や切除平面（カット）、もしくは問題の構造を利用したメタ解法が数多く提案されている。最近では、数理計画ソフトウェア Xpress-MP⁵⁾を用いた LS Lib⁶⁾が開発されており、問題に応じた工夫が比較的容易に扱えるようになっている。

実用的には、数理計画ソルバーを用いたメタ解法が推奨される。ここでは、緩和固定法とよばれるアプローチを紹介する。

いま、小規模な（期数が小さい）ロットサイズ決定問題がその定式化を混合整数計画ソルバーにかけることによって短時間で求解可能であるとする。ここで、求解可能とは、良好な近似解を短時間で得ることができると読み替えても良い。この小規模問題を逐次最適化することによって、全体の近似解を得ようというのがアイデアである。

まず、一般の混合整数計画問題で緩和固定法を

解説しておく。混合整数計画に含まれる整数変数を、自由変数、固定変数、連続緩和変数の3つに分けて考える。自由変数は、オリジナルの問題と同じ意味を持つ整数変数であり、全ての変数が自由変数である問題は、元の問題に他ならない。

固定変数は、問題の規模を縮小するために一時的に固定された変数である。連続緩和変数は、実数変数として緩和された変数であり、全ての整数変数を連続緩和変数にした問題は、線形計画緩和問題に他ならない。

まず、固定変数がない状態からはじめ、一部の変数を自由変数とし、残りの変数を連続緩和変数として混合整数計画ソルバーで最適化する。求まった解の自由変数の全て、もしくは一部分を得られた最適解に固定し固定変数とする。この操作を全ての変数が固定変数になるまで繰り返す。ここで重要になるのは、自由変数の選択方法とその順序である。

ロットサイズ決定問題に対しては、期が近い変数同士は互いに密接な関係があると考えられる。また、近い未来の意志決定が重要であると考えられるので、期の番号の小さい順に自由変数としていく方法が有効であると推測される。上の理由により、自由変数の選択法としては、連続する期内の段取りに関する変数を一度に決めるものとする。

5. 安全在庫配置問題

在庫をどこに配置するかは、サプライ・チェーン全体を設計する際に重要な役割を果たす意志決定である。問題自身は、保証リード時間を変数としたとき在庫費用が凹関数になることから、非線形計画に帰着される。しかし、凹関数の最小化を汎用として扱える数理計画ソルバーはまだ発展途上であり、実問題への適用は危険である。この問題の提起者であるマサチューセッツ工科大学の S.Graves¹⁾は、問題の特殊構造を利用した動的計画による解法を提案していたが、実は混合整数計画ソルバーでも求解可能であることが最近指摘されている。混合整数計画への帰着は、非線形凹関数を区分的線形関数として近似することによって行われ、さらにフロー被覆不等式とよばれる一連の不等式がソルバーによって追加されやすいように、定式化に冗長な制約を加えておく必要がある。

6. 発注量決定問題

サプライ・チェーンにおける意志決定は、一般にストラテジックレベル（4半期から年単位）、タクテ

ィカルレベル（時間から4半期単位）、オペレーショナルレベル（リアルタイムから時間単位）に分けられる。安全在庫配置問題がタクティカルレベルの在庫を扱っていたのに対して、オペレーショナルレベルの在庫適正化は、発注量決定問題で扱われる。発注量決定モデルは、需要の不確実性を考慮するか否かによって、大きく2つに分類される。

需要が確定的に分かっていると仮定した問題は、古典的な経済発注量決定のための Harris のモデルの拡張となる。Harris のモデルは以下の仮定をもつ。

1. 品目は一定のスピードで消費されている。
2. 品目の品切れは許さない。
3. 発注リード時間（注文してから品目が到着するまでの時間）は0である。
4. 発注の際には、発注量によらない固定的な費用（これを発注費用とよぶ）が発生する。
5. 在庫保管費用は保管されている在庫量に比例してかかるものとする。
6. 初期からはじめて無限期間先までを考慮する。
7. 初期在庫は0とする。

Harris のモデルを複数の在庫地点に拡張した問題は、ネットワーク型の経済発注量モデルと呼ばれ、非線形計画に帰着される。発注費用と在庫費用のトレードオフの最適化は凸関数の最小化になるので、通常の非線形計画ソルバーで容易に求解できる。また、区分的線形関数に近似することで、線形計画ソルバーでも求解可能である。

需要の不確実性を陽的に扱う場合には、確率的に与えられた条件をどのように扱うかが重要である。数理計画の分野では、不確実性を持つデータに対しては確率計画とよばれる一連のアプローチが研究されてきた。このアプローチは、金融工学の分野ではある程度の成功をおさめたが、在庫の最適化においては問題の規模が大きいことや、条件が複雑なことから、直接の適用で成功した例は少ない。混合整数計画ソルバーで直接求解する方法として、確率分布のかわりに幅を持ったパラメータを用いたロバスト最適化アプローチが提案されている。実際の発注量決定は、簡単なルールによって構成された方策を用いて行い、現場の制御はこの方策で用いるパラメータによって行うことが多い。方策のパラメータは、問題の構造を用いた動的計画や非線形計画のアルゴリズムで最適化できる。

7. 配送計画問題

配送計画とは、主にサプライ・チェーンの最下流で発注し、複数の需要地点に輸送手段（トラックや船、運搬車とも言う）を用いて、巡回しながら物を運ぶ問題である。

配送計画問題の基本形は以下の仮定をもつ。

1. デポと呼ばれる特定の地点を出発した運搬車が、顧客を経由し再びデポに戻る。このとき運搬車による顧客の通過順をルートとよぶ。
2. デポに待機している運搬車の種類および最大積載重量は既知である。
3. 顧客（需要地点）の位置は既知であり、各顧客の需要量も事前に与えられている。
4. 地点間の移動時間、移動距離、移動費用は既知である。
5. 1 つのルートに含まれる顧客の需要量の合計は運搬車の最大積載重量を超えない。
6. 運搬車の台数は、決められた上限を超えない。
7. 運搬車の稼働時間が与えられた上限を超えない（超過時間を残業費用として考える場合もある）。

通常は、さらに需要地点への到着時間枠など様々な条件が付加される。これらの付加条件を全て取り去った問題は、巡回セールスマン問題とよばれる古典的な組合せ最適化問題になる。巡回セールスマン問題に対しては、最大で 24,978 個の地点を巡回する最適解が数値計画ベースの（とは言っても問題の特性をフルに生かした）解法で求められているが、配送計画問題に対しては、このようなアプローチは推奨されない。数値計画ベースの解法としては、輸送手段に対して可能な巡回路を部分的に列挙し、必要に応じて巡回路を追加する列生成法とよばれる解法がしばしば有効である。

列生成法は配送計画だけでなく、航空機産業における乗務員スケジューリング問題や機団割当問題、鉄道・バス産業における乗務員スケジューリング問題、トラック産業におけるトレーラー型輸送問題に対して適用可能である²⁾。

8. おわりに

数値計画は諸刃の剣である。うまくはまると、現実問題を鮮やかに解決してくれる。その一方、使い方を間違えると現実問題の解決とはほど遠い解を算出する。対象とする物流の実際問題のほとんどは、NP-困難とよばれる計算量的に難しい問題のクラスに属する。したがって、万能のソルバーは存在せず、問題毎に工夫されたアプローチが必要になる。たとえば、双対ギャップが小さくなるような強い定式化、解の対称性を避ける定式化、カットを生成するための工夫、列生成法や Lagrange 緩和などの問題の構造を利用した解法が代表例であるが、これらの適用は専門家の助けが必要になるだろう。今後は、実務家と研究者の共同研究によって、様々な物流の実際問題が解決されていくことを期待する。

参考文献

- 1) S.C.Graves and S.Willems.” Supply Chain Design: Safety Stock Placement and Supply Chain Configuration.” In A.G.de Kok and S.C.Graves, editors, “Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation”, volume 11 of Handbook in Operations Research and Management Science, chapter 3, pp.95-132, Elsevier, 2003
- 2) 久保幹雄:「ロジスティクス工学」朝倉書店, 第1版, 2001
- 3) 久保幹雄:「実務家のためのサプライチェーン最適化入門」朝倉書店, 第1版, 2004
- 4) 久保幹雄:「ロジスティクスの数理」共立出版, 第1版, 2007
- 5) <http://www.dashoptimization.com/>
- 6) <http://www.core.ucl.ac.be/LS-LIB/Libs/>