

在庫管理と船舶スケジューリング の同時最適化モデルの開発

小林 和博*

Inventory Routing Problem for Ship Scheduling Problem

by

Kazuhiro KOBAYASHI

Abstract

Mathematical models for inventory routing problem are studied. The inventory routing problem is an important subject in supply chain management. In the literature, many mathematical models and the algorithms for solving these models are proposed. The existing models are classified according to their mathematical methods and their applications. This enables us to solve the inventory routing problem in maritime transportation industry in Japan. One of the most important approach for this problem is the Markov decision process approach. Moreover, an important approximation method for Markov decision process model is the approximate dynamic programming. The approximate dynamic programming approach enables us to apply these mathematical models for real world problems. The approximate dynamic programming incorporate the mathematical programming models and the simulation for the real world problem. We discuss an approximate dynamic programming approach for the multi-stage ship scheduling problem.

* 運航・物流系
原稿受付 平成 23 年 10 月 14 日
審査日 平成 23 年 12 月 19 日

目 次

1. まえがき	2
2. 既存研究の分類	3
2.1 船舶スケジューリング	3
2.1.1 数理モデル	3
2.1.2 集合分割アプローチ	4
2.1.3 実務への適用例	5
2.2 在庫管理の基礎	5
2.2.1 経済発注量モデル	5
2.2.2 新聞売り子問題	6
2.3 在庫配送計画問題の既存研究	7
2.3.1 配送計画問題との違い	7
2.3.2 在庫配送計画問題の例題	7
2.3.3 単一顧客の場合の解析	8
2.3.4 複数顧客の場合の解析	8
2.3.5 Campbellらのモデル	10
2.3.6 在庫船舶スケジューリング	12
2.3.7 2顧客の確率的 IRP のマルコフ決定過程モデル化の例	12
2.3.8 確率的 IRP のマルコフ決定過程モデル化	12
2.4 宮本らによる在庫配送計画問題の事例	14
3. 本研究での開発モデルと手法	15
3.1 生産計画をもとにしたモデル	16
3.1.1 前提条件	16
3.1.2 数理モデル	16
3.2 多期間の船舶スケジューリングに対する近似動的計画法	17
3.2.1 動的計画法	17
3.2.2 最適性方程式	17
3.2.3 近似動的計画法導入	17
3.2.4 開発モデル	18
3.2.5 数値計算結果	21
3.3 船舶スケジューリングと在庫管理の同時最適化モデル	22
3.3.1 数理モデル	22
3.3.2 近似動的計画法の導入	23
まとめ	24
参考文献	24

1. まえがき

船舶スケジューリングは、海運企業が直面する重要な計画問題である。海運企業は、荷主企業から貨物輸送の依頼を受ける。海運企業は、自らが管理する複数の船舶を運用し、これら荷主企業から引き受けた貨物を輸送することを業務として行う。この際、積み日や揚げ日の指定を満たす

ように、船舶の運航スケジュールを作成することを、船舶助ジューリングとよぶ。船舶スケジューリングでは、荷主から引き受けた貨物を全て輸送するスケジュールの中で、できるだけコストの小さいものを見つけることが望ましい。船舶スケジューリングでは、輸送すべき貨物の内容は、外部の荷主によって指定される。これらのデータは、問題の入力データとして扱う。ところが、もし海運企業自身が輸送する貨物の内容を決めることができれば、よりすすんだ効率化が実現できる可能性がある。これはサプライチェーンマネジメントの実務では Vendor Managed Inventory とよばれる方式である。この方式により、在庫管理と貨物の輸送をあわせて計画の対象とすることで、貨物の輸送のみを計画の対象とする場合よりもより大きなコストの削減が期待できるのである。

本研究では、船舶スケジューリングと在庫管理に関して、以下の二つの項目を実施した。

一つめの実施項目は、既存研究の調査と分類である。在庫管理と貨物の輸送を同時に効率化の対象とする問題は、在庫配送計画問題 (Inventory Routing Problem) とよばれ、80 年代から数理計画の分野で膨大な研究がなされている。本研究では、これらの研究を調査し、対象とする問題および用いている数理的手法によって分類することにより、今後海上物流の分野で生じる在庫船舶スケジューリングのニーズに対応できるようにすることを目的としている。

二つめの実施項目は、既存研究で開発されたモデル・手法を、海上物流に適用するために必要なモデルの開発である。具体的には、生産計画をもとにした船舶スケジューリングモデル、近似動的計画法を導入した船舶スケジューリングモデル、および在庫と船舶スケジューリングの同時最適化モデルを開発した。在庫管理と船舶スケジューリングを同時に効率化の対象としようとする、長期・多期間の計画を考慮する必要がある。また、長期の計画を扱う場合は、データの不確実性を如何に扱うかが問題となる。そこで、数理最適化モデルの入力データ自体を、実際の運航・貨物データの統計的情報を用いて更新する必要がある。そのための有力なツールが近似動的計画法である。そこで、近似動的計画法を多期間の船舶スケジューリングに適用する方法を開発した。多くの既存研究は、陸上輸送を想定したものであるが、ここで開発した近似動的計画法を用いたシミュレーション手法と組み合わせることによって、気象の影響から不確実性の影響が大きい海上物流の分野にも適用すること

が可能となる。

本報告の構成は以下の通りである。2章では、本研究の主要な目的の一つである、在庫配送計画に関する既存研究の分類と、それらにおける各モデルおよび計算手法を、具体的に述べる。3章では、2章での分類をもとに、新たに本研究で開発した数理モデルと計算手法を述べる。

2. 既存研究の分類

2.1 船舶スケジューリング

荷主が海運企業に行う貨物輸送依頼のことをオーダーという。表-1は、オーダーの例である。

表-1 オーダーの例

積港	揚港	積日	揚日	品種	量
響	田原	5	7	Co	600
相生	田原	6	7	軽油	300
鹿島	新潟	7	11	Cre	1,200

1つのオーダーは、積港、積日、揚港、揚日、品種、量で指定される。オペレーターは複数の船舶を管理・運用し、荷主から受けたオーダーを処理していく。

オペレーターが管理・運用する船の集合を船隊とよぶ。船隊には自社保有の船舶に加えて、船舶のオーナーから一定期間運用を任される定期用船が含まれる。また、一時的な需要の増加に対応するため、一航海単位で船をレンタルすることがある。これをスポット用船とよぶ。オペレーターは、荷主からの注文状況と船隊全体の運航状況を併せて考えながら、受注したオーダーをどの船舶でどのようなスケジュールで輸送するかを計画する。同時に、必要であればスポット用船の計画も立てる。これを実務では配船計画という。この配船計画を数理モデルとして扱う問題は、**Ship Scheduling**と呼ぶことが国際的には定着している。この訳語として“船舶スケジューリング”という用語を用いることを筆者は提唱している。本報告でも、この表現を用いることとする。

荷主からオペレーターへのオーダーは、ある時期に複数個まとめて出される。典型的な例では、毎月末に翌月1ヶ月分のオーダーがまとめて荷主からオペレーターに依頼される。本稿で紹介する事例では、1ヶ月分のオーダー数は126であり、これらのオーダーを7隻+スポット用船数隻で処理する。あるオーダー集合を処理するための船舶スケジュールは多数存在するので、これらのスケジュールの中からできるだけ効率の良い計画を見つ

け出す事が望ましい。

船舶スケジュールの効率化は、収益の確保、省エネルギーの双方から重要である。

オペレーターにとっては船舶スケジュールの効率性が直接収益に影響する。オペレーターが受け取る運賃収入は、オーダーの量と輸送距離によって決まるため、あるオーダー集合を処理するにあたっては、船隊の運用コストを下げるほどオペレーターが確保できる利益が増す。船隊の運用コストには、船舶維持費、人件費など種々の要素が含まれるが、個々で扱う船舶スケジューリングで効率化の対象とするのは、スポット用船費用、燃料費などの変動費用である。又、荷主にとっても、船舶スケジュールの効率化は望ましい。荷主とオペレーターに資本関係が存在する場合はオペレーターが確保する利益の多寡が自社の業績に影響し、資本関係がない場合でもオペレーターの運用コストが下がれば市場競争を通して支払う運賃の低減が期待できる。また、省エネルギーの実現のためにも船舶スケジュールの効率化は有効な対策となる。平成18年度に施行された改正省エネ法では、輸送事業者（オペレーターを含む）ならびに荷主に対して、省エネルギー目標および講じる措置の作成が義務づけられている。船舶スケジュールの効率化はこのような省エネ計画の一部として検討する価値が大きい。

船舶スケジュールの作成は、荷役条件や船舶仕様など複雑な制約を同時に考慮しなければならないため、非常に煩雑な作業となる。例えば、1ヶ月の計画を作成するために、3日から4日程度の作業が必要となる。本来は、より多く利益が確保できるような効率的な計画を作成する事が望ましいが、繁忙期には実行可能な計画の一つ作成するのが精一杯である。この煩雑な船舶スケジュール作成作業は、コンピュータによる計算で支援することができる。船舶スケジューリングの標準的な数理モデルとして集合分割問題を用いたものがある。

2.1.1 数理モデル

船舶スケジューリング問題では、船舶の基本性能の他に、港での荷役能力や荷役可能時間帯の制限など様々な制約を満たす運航スケジュールの中で、船隊の運用コストを最小にするものを見いだすことが目的である¹⁾。船舶スケジューリング問題に対しては、荷種が何か、定期船か不定期船か、計画期間と船隊の規模はどの程度か、など、扱う事例の特徴に従って、多くの研究がなされてきた。これらの研究についてはサーベイ論文にまとめられている^{2,3)}。

船舶スケジューリング問題は、運航スケジュールに関する制約条件を数式で記述することにより、数理計画問題に定式化できる。既存研究で標準的に用いられているのは、集合分割アプローチに基づいた計算手法がある。このアプローチは、運航上の様々な制約を柔軟に取り入れることができるため、主に国外で様々な事例に適用され、成功を収めている。

2.1.2 集合分割アプローチ

船舶スケジューリングは、陸上輸送を意識した配送計画問題とよく似た構造を持つ。配送計画問題は、80年代から数理計画の研究者が精力的に研究に取り組んできた問題である。これまで、効率的な計算を行うための様々な手法が提案されており、それらは船舶スケジューリング問題に対しても有効なものが多く、集合分割アプローチもそのひとつである⁴⁾。配送計画問題に対して開発された手法を船舶スケジューリングに適用する場合には、海上輸送特有の制約を考慮する必要がある。その中で最も大きなもののひとつとして、船舶ごとの仕様の違いが挙げられる。トラックや航空機が仕様に基づいて大量生産される“規格品”であるのに対して、船舶は受注ごとに一隻が建造される“オーダーメイド品”である。したがって、船舶スケジューリング問題では常に非均質(heterogeneous)な船舶からなる船隊を扱うことになる。さらに、運搬する品目によって船種が明確に分かれている事が挙げられる。これにより、梱包された小包やコンテナやトラックや鉄道で運ぶときとは違った、複雑な制約が生じる。

集合分割アプローチは、各船舶が実行可能なスケジュールをあらかじめ列挙しておき、その中から、全てのオーダーを処理し、かつ最もコストが小さくなるようなスケジュールを選択する手法であるが、スケジュールを選択する際に集合分割問題とよばれる数理計画問題を用いる点に特徴がある。

図-1はオーダー数が6、船舶数が3である場合の集合分割アプローチを図解するものである。船舶1はスケジュール1,2,3,4で、船舶2は5,6で船舶3は7,8,9で運航可能であるとする。第 j 番目のスケジュールを示す列の最上部には、 $x[j]$ が示されている。第 j 番目のスケジュールで運航した際に処理されるオーダーの行には、1が示されている。例えば、船舶1がスケジュール1で運航した場合には、オーダー1とオーダー2が処理される。引き受けた六つのオーダーは全て処理される必要があるため、各オーダーはいずれかの船舶で処理されなければならない。いま、船舶1がス

ケジュール2で、船舶2がスケジュール5で、船舶3がスケジュール7で運航するとする。この場合、全てのオーダーがいずれかの船で少なくとも一度は処理されるため、実行可能なスケジュールとなる。他に船舶1がスケジュール1で、船舶2がスケジュール5で、船舶3がスケジュール9で運航する場合も実行可能なスケジュールとなる。このような複数の実行可能なスケジュールの中から最も運航コストが安くなるものを選択するために、集合分割問題を用いる。

第 j 番目の候補スケジュールに対応して、変数 $x[j]$ を定義する。この変数は、第 j 番目のスケジュールを採用するときに1を、採用しないときに0をとる変数である。これらを成分とするベクトル x を用いると、各オーダーがいずれかの船舶の運航スケジュールによって処理される条件は、

$$Ax = 1$$

という線形不等式によって記述することができる。ここで、行列 A の (i,j) 成分は、第 j 番目の候補スケジュールがオーダー i を処理するときに1、それ以外のときには0と設定する。

	船舶1				船舶2		船舶3		
	$x[1]$	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$x[6]$	$x[7]$	$x[8]$	$x[9]$
オーダー1	1	1						1	
オーダー2	1						1		
オーダー3		1	1						1
オーダー4			1	1	1			1	
オーダー5					1	1			1
オーダー6				1	1	1	1		

図-1 集合分割アプローチの例

右辺1は要素がすべて1であるベクトルである。また、第 j 番目の候補スケジュールに関して、そのスケジュールで運航した場合のコストを定め、 c_j と表す。この c_j を成分とするベクトル c を用いて、目的関数を $c^T x$ と定義する。これによって、集合分割問題が定義できる。

(集合分割問題)

$$\min. \quad c^T x$$

$$\text{subject to } Ax = 1, x_i \in \{0,1\}$$

集合分割問題は、整数計画問題とよばれる数理計画問題の特殊形である⁴⁾。

(整数計画問題)

$$\begin{aligned} \min. \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x_i \in Z \end{aligned}$$

整数計画問題の制約式と目的関数を定める行列 A 、ベクトル b および c を決められた形式で入力すると、その解を計算するソフトウェアが複数開発されている。これらはデータがどのような実際問題を表現しているかに関わらず答えを計算する、という意味で汎用的である。そこで、汎用ソルバーとよばれる。整数計画問題は、NP-困難とよばれる計算量的に難しい問題のクラスに属する⁴⁾。NP-困難な問題には多項式時間アルゴリズムはおそらく存在せず、指数時間以上の計算時間がかかると多くの研究者が信じている。指数時間以上の計算時間がかかるとは、言い換えると、問題規模の増加に伴い計算時間が急激に増加する“組合せ爆発”を引き起こすということである。ところが、汎用ソルバーには組合せ爆発を回避するための様々な工夫が組み込まれており、問題に応じて適切な定式化を行うことによって大規模な問題でも高速に解くことができる場合が少なくない。船舶スケジューリング問題は効率的な定式化に向けた構造を持っており、高速な汎用ソルバーを用いれば、1ヶ月、10隻、数百オーダー程度の船舶スケジューリング問題であれば、集合分割アプローチによって（よほど問題の性質が悪くない限り）十分高速に解くことができる。

集合分割アプローチでは、各船舶が実行可能なスケジュールを見つけ出し、行列 A の列に加えることが必要である。問題のサイズ（隻数、オーダー数）が小さいか、スケジュールの制約条件が厳しければ、全ての可能なスケジュールを列挙すればよい。ところが、この方法だとオーダーの内容によっては非常に長い計算時間がかかる場合がある。そこで、有望なスケジュールのみを候補とし、行列 A の列に取り入れる手法を採用する。有望なスケジュールを見つけ出すには、船舶ごとに「最短路問題」とよばれる問題を定義する。この問題を解いて得られるスケジュールを行列 A の列として加える。この方法は「列生成法」とよばれ、最短路問題が高速に解ける場合には効率的な計算が行えることがわかっている。

2.1.3 実務への適用例

集合分割アプローチに基づくアルゴリズムをケミカルタンカー船隊の実務データに適用し、その有効性を検証した。このデータでは、自社船隊7隻、寄港地25港、計画期間36日、オーダー数128、品種17種である。どのような船舶スケジューリングを望ましいと見なすかは状況によって異なる。海技研で開発したアルゴリズムでは、スポット用船で処理するオーダー数の最小化、総航行距離の最小化、のどちらかを目的として設定するかを実行時にユーザーが選択できるようにした。目的としてこれら以外のものを定義することも可能である。使用した計算機は、演算装置が Intel Core 2 Duo E6700 2.67GHz、メモリが 2GB RAM、OS が WindowsXP のパソコンである。時刻依存最短路問題、整数計画問題、線形計画問題のモデリング言語として Dash Optimization 社の Xpress Mosel Version 1.6.3 を、線形計画問題および整数計画問題の汎用ソルバーとして Xpress Optimizer Version 17.10.04 を用いた。

表-2 に数値実験結果を示した。実績ではスポット用船で処理するオーダー数は10、総航行距離が38,973であった。ケース1は、スポット用船で処理するオーダー数を最小にする船舶スケジュールで計算した結果であり、実績より1減らすことに成功している。ケース2では、スポット用船で処理するオーダー数を実績（10）以下にするという条件のもとで、総航行距離を最小化する計画を計算した結果であり、10分未満の計算時間で7.9パーセント距離を減少させることに成功している。ケース3は、スポット用船で処理するオーダー数を実績より1多い11にしたときに、総航行距離を最小化する計画を計算した結果である。

表-2 計算結果

	用船処理 オーダー数	総航行距離 (海里)	計算時間 (秒)	距離減少率
実績	10	38,973	-	-
ケース1	9	38,708	547	0.7%
ケース2	10	36,105	558	7.9%
ケース3	11	35,846	539	8%

2.2. 在庫管理の基礎

在庫理論におけるもっとも基本的なモデルが経済発注量モデルである。この章の記述は文献⁵⁾によっている。

2.2.1 経済発注量モデル

経済発注量モデルの古典として Harris のモデルが挙げられる。このモデルは以下の仮定をおいている。

- 1) 品目の消費量は一定である。この一日あたりの消費量を d 単位で表す。これは非負の実数とする。
- 2) 品目の品切れは許さない。
- 3) 品目は発注を行うと同時に納品される。いいかえると、発注から納品されるまでのタイムラグがない。
- 4) 発注の際には、発注量によらない費用がかかる。この費用を発注費用とよび、 K と表す。 K は非負の実数値をとる。
- 5) 在庫費用は在庫量に比例してかかる。1単位を1日在庫する費用を h 円とする。 h は非負の実数値をとる。
- 6) 考慮する期間は無限期間とする。
- 7) 初期在庫は0とする。

この仮定の下で、1日あたり総費用を最小化する発注方を求めることがここで考える問題の目的である。最適方策は、「定常」であることと、「在庫ゼロ発注性」を満たすことがわかる。「定常」とは、方策が時間に依存しないことであり、「在庫ゼロ発注性」は、在庫量が0になったときのみ発注することである。この性質のもとでは、在庫量の時間的な経過を表すグラフは図のようなノコギリの歯型になり、最適な発注方策を求める問題は1回あたりの発注量 Q を求める問題に帰着される。

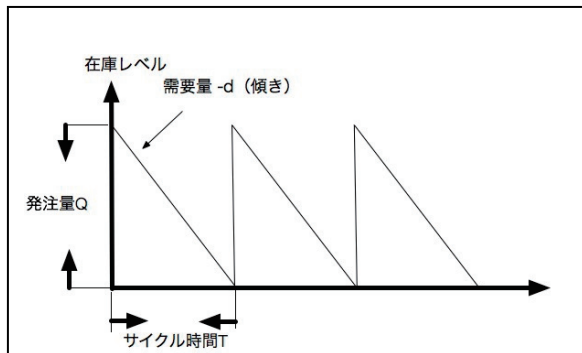


図-2 在庫ゼロ発注性

発注を行う間隔をサイクル時間、または発注間隔とよび、 T と書く。発注量 Q とサイクル時間 T の間には、

$$d = \frac{Q}{T}$$

の関係がある。需要量が一定であるという仮定のもとでは、発注量 Q とサイクル時間 T を求めることと同じであると考えられる。

2.2.2 新聞売り子問題

新聞売り子問題は、確率的在庫モデルの古典的なものである⁶⁾。新聞の売り子が、1種類の新聞を販売している。新聞が売れる量（需要量）は、経験からある程度推測できると仮定し、確率変数として与えられているものとする。いま、売れ残りのときの在庫費用と、品切れのときの品切れ費用の和が最小になるように仕入れ量を決めるものとする。どれだけの量を仕入れれば良いだろうか。解析に必要な記号を導入する。

h : 新聞1刊が売れ残ったときに課せられる在庫費用。正の値とする。

b : 新聞1刊が品切れしたときに課せられる品切れ費用。正の値とする。

D : 新聞の需要量を表す確率変数。非負で連続な確率変数であり、その分布関数を $F(x)$ 、密度関数を $f(x)$ と記す。つまり、

$$F(x) = \Pr\{D \leq x\},$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

とする。仕入れ量が s のときの総費用の期待値 $C(s)$ は

$$C(s) = E[h[s-D]^+ + b[s-D]^-]$$

となる。ここで $[\cdot]^+$ は $\max\{0, \cdot\}$ を表し、 $[\cdot]^-$ は $-\min\{0, \cdot\}$ を表す。 $C(s)$ を最小にする s は、

$$\frac{\partial C(s)}{\partial s} = hF(s) - b(1-F(s)) = 0$$

より

$$F(s^*) = \frac{b}{b+h}$$

を満たす s^* になる。ここで $F(s^*)$ は需要が仕入れ量 s^* を超えない確率、言い換えれば品切れを起こさない確率を表している事に注意すると、上式は $b/(b+h)$ が品切れをおこさない確率と同じになるように s^* を設定すればよいことを表している。

2.3 在庫配送計画問題の既存研究

船舶スケジューリングは、数理計画の分野では配送計画問題(Vehicle Routing Problem)とよばれる問題と同じ数理的構造をもっている。配送計画問題と在庫管理を同時に考慮する問題は、「在庫配送計画問題(Inventory Routing Problem, IRP)」とよばれ、80年代から膨大な既存研究がある。これらを適切に分類・整理し、必要に応じて実装することで、様々な実務上の在庫配送計画問題を解くことができる。以下でのべる内容は、Campbellらの論文⁷⁾、およびCordeauらの論文⁸⁾によっている。

2.3.1 配送計画問題との違い

IRPの配送計画問題との大きな違いは、計画期間の違いである。配送計画問題では、通常一日の計画を作成する。1日の終わりまでに、全ての配達オーダーを処理できれば良い。扱う製品の消費量が確率的であるものを確率的IRP(Stochastic IRP)とよび、確定的であるものを確定的IRPとよぶ。目的は、顧客サイトで在庫切れを起こすことなく計画期間全体での利益を最大化することである。

確率的IRPでは、需要が不確実であるため、顧客で在庫切れがおこる確率は常に正となる。すなわち、在庫切れは起こりうるものである。第 t 日に顧客 i で、 s_i だけの在庫切れが起こったときは、ペナルティ $p_i s_i$ が課されるとする。満たされなかった需要は、そのまま失われる、すなわち次期以降に満たすことはできないとする。ここでの目的は、無限期間の問題に対してきたい割引費用を最大化するような配送方策を求めることである。

2.3.2 在庫配送計画問題の例題

Cordeauらの提示した、顧客数4の例題を扱う。顧客1,2を両方訪れる運搬経路のコスト c_{12} は210円とする。

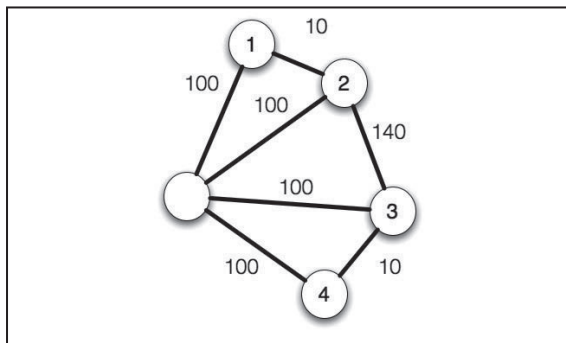


図-3 顧客数4の例

運搬車のタンク容量は5,000ガロンとし、顧客のタンク容量と消費レートは以下の表の通りだとする。

表-3 例題の入力データ

顧客 i	d_i	u_i
1	5,000	1,000
2	3,000	3,000
3	2,000	2,000
4	4,000	1,500

よりよいスケジュールは、2日ごとに以下の配達を繰り返すものである。1日目は3,000ガロンを顧客2に、2,000ガロンを顧客3に補充する。このコストは340マイルである。2日目は2つの旅程を実行する。最初の旅程は、顧客1に2,000ガロンを補充し、顧客2に3,000ガロンを補充する。2番目の旅程は、顧客3に2,000ガロンを補充し、顧客4に3,000ガロンを補充する。1番目の旅程、2番目の旅程のコストは両方210マイルとする。このスケジュールの平均コストは1日あたり380マイルである。これは、上に挙げた最初のスケジュールよりも約10パーセントコストが小さい。

このモデルには2つの点に考慮する必要がある。1つは長期の影響を、短期の意思決定にどのように反映するか、という点であり、もうひとつは短期の意思決定の対象とする顧客の集合を、どのように選択するか、という点である。長期の影響を短期の意思決定に反映する際には、必要な時期よりも早い時期に配達を行うメリットとコストを適切に捉える必要がある。

短期の意思決定を1日の意思決定だとすると、この意思決定はVRPの拡張と捉えることができる。この場合はVRPに対して開発された解法が適用できる。例えば、Campbell and Savelsbergh⁹⁾は、顧客への配達量が、定められた上限と下限の間に入るという条件の下で、挿入ヒューリスティックを効率的に実行する方法を提案している。短期の意思決定を1日の意思決定とするアプローチは、通常、最新の在庫量とその日の予測消費レートに基づいている。したがって、長期の消費レートを予測しなければならないという難しさを避けることができるので問題を単純にすることができる。

2.3.3 単一顧客の場合の解析

単一の顧客の場合には、計画期間 T の間のコスト v_T が, Jalliet ら¹⁰⁾と Dror ら¹¹⁾によって与えられている。

まず、確定的 IRP な問題を考える。顧客の消費レートを u とする。顧客のタンク容量は C とする。初期在庫量は I^0 , 顧客への配達コストは c , 運搬車のタンク容量は Q とする。最適な方策は、顧客の在庫が 0 になるタイミングで、満タンまで補充することである。従って、長さ T の計画期間のコスト v_T は以下の式で定まる。

$$v_T = \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{Tu - I^0}{\min\{C, Q\}} \right\rceil \right\} c.$$

次に確率的 IRP を考える。確率的な場合は、毎日、顧客への配達を行うか否かを判断する。隣りあう期の間、すなわち 1 期あたりの需要を U とする。これを、確率分布が既知のランダム変数で、有限な平均をもつとする。顧客でのタンク容量が運搬車のタンク容量よりも大きいとして、意思決定が顧客サイドの在庫量が確認できるのは配達が終わった時点のみとする。この場合、無限期間の意思決定であれば、定められたスケジュールに従って配達し、配達時にはタンク容量いっぱいまで補充し、そしてその後続く d 日間の配達を実行する、という最適方策が存在することを示すことができる。最適な補充間隔は d 日で、これは定数である。この d は一日あたりの期待コストを最小化するように決められる。

d 日ごとに顧客に配達を行う方策を、 d -day 方策という。この方策は、顧客で在庫切れが起こらない限りは、 d 日ごとにできるだけ多くの量を補充するものである。在庫切れが起こった場合、運搬車は直ちに顧客に配達を行うが、この配達コストは S とする。この配達は、瞬時に行われると仮定するので、在庫切れのペナルティが移動の間に増えることはないとする。また、初期時点では在庫上限いっぱいまで在庫量があるとする。

第 i 日に最初に在庫切れが生じる確率を p_i とする ($1 < i < d-1$)。このとき、 $p = p_1 + p_2 + \dots + p_{d-1}$ は、期間 $[1, \dots, d-1]$ に在庫切れを起こす確率を表す。この方策の T 期の計画期間にわたる期待総コスト $v_T(d)$ は、 $d > T$ に対しては以下で表される。

$$v_T(d) = \sum_{1 \leq j \leq T} p_j (v_{T-j}(d) + S)$$

また、 $d < T$ に対しては、以下で表される。

$$v_T(d) = \sum_{1 \leq j \leq d-1} p_j (v_{T-j}(d) + S) + (1-p)(v_{T-d}(d) + C)$$

その結果、 T 日の計画期間中、 d 日ごとに、顧客タンクを満タンにする方策の期待総コスト $v_T(d)$ は以下によって与えられる

$$v_T(d) = \alpha(d) + \beta(d)T + f(T, d)$$

ここで $\alpha(d)$ は d のみに依存した定数であり、 $f(T, d)$ は T が無限にいくと指数的にゼロに近づく関数である。また、

$$\beta(d) = \frac{pS + (1-p)c}{\sum_{1 \leq j \leq d} jP_j}$$

で、 $p_d = 1-p$ である。 $\beta(d)$ を最小化する d を見つけることに相当する。

2.3.4 複数顧客の場合の解析

Cordeau らは、IRP の研究の流れを 3 つに分類した⁸⁾。

第一の流れは、短期の計画期間中に訪れる顧客を決定し、それと同時にそれら顧客に配達する配達量を決定するものである。このために、離散時刻を用い、整数計画問題による定式化を行った。コストと時間の影響を正確にモデルに反映するために、配達ルート候補の集合を扱う。Fisher ら¹²⁾と Ball ら¹³⁾は、Air Products という企業の IRP を研究する際に、このアプローチを用いた。彼らのアプローチは、顧客への配達量、顧客の運搬経路への割当、運搬車の運搬経路への割当、運搬経路の開始時刻を決定するものである。このモデルでのコストを記述するのに以下の変数を定義する。 x_{ir} は、時刻 t に出発する運搬経路 r 上で、顧客 i に配達される量を表すとする。変数 y_{rt} は、運搬経路 r が時刻 t に出発するときは 1 を、それ以外のときは 0 を取る変数とする。 S_r は運搬経路 r で訪問される顧客の集合を、 p_i は顧客 i に配達される量を、 F_r を運搬経路 r を実行する固定コスト、 q_{it} を時刻 t までに顧客 i に配送される累積量の下限、 q_{it} を時刻 t までに顧客 i に配送され

る累積量の上限とする。これらを用いて以下のよう
にモデルを定義する。

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{r \in R} \sum_{t \in T} \left(\sum_{i \in S_r} p_i x_{irt} - F_r y_{rt} \right) \\ \text{subject to} \quad & \underline{q}_{it} \leq \sum_{r \in R} \sum_{s \leq t} x_{irs} \leq \overline{q}_{it} \\ & \sum_{i \in S_r} x_{irt} \leq Q y_{rt}, r \in R, t \in T \\ & x_{irt} \geq 0, y_{rt} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

このモデルでは、1つの顧客に1単位の配送を行う価値を用いているが、これには現在の意思決定が今の計画期間よりも後の計画に与える影響が反映されている。

今期のスケジュールにおいて顧客に配達される量は、将来その顧客に配達される量を減らす作用をもつ。この作用は、計画期間外の時点での、顧客への配達コストを評価するときに反映される。さらに、顧客での消費レートを陽にモデルに取り入れるのではなく、計画期間内の各時刻での各顧客への累積配達量の上限と下限をとおして反映される。顧客の消費レートを、上限および下限に変換する方法は、

$$\underline{q}_{it} = \max \{0, tu_i - I_i^0\}$$

および

$$\overline{q}_{it} = tu_i + C_i - I_i^0$$

である。この整数計画問題をとくためにはヒューリスティックが有効であるがその中心的な役割を果たすのはラグランジュ緩和である。

この整数計画問題のサイズは時間の離散化の仕方と、生成する運搬経路の候補集合の大きさに依存する。Campbellらは同じような構造の整数計画問題を用いて、2つのフェーズからなる方法を提案している¹⁴⁾。第1フェーズではこれからの数日間に配達を行う顧客の集合の選択、各顧客への配達量、および配達のタイミングを決定する。第2フェーズでは、第1フェーズで得られた運搬経路と運搬経路を改善するための挿入ヒューリスティックを提案している。このアプローチの利点は、第2フェーズによってより正確な配達時刻が

得られることと、より複雑な制約条件を考慮に入れる事ができる点である。この解によって導かれた配達量と配達タイミングは長期的な視点で見た場合は望ましいものになっている。ただ、短期的な視点でみると修正が必要である。実際の運搬経路を構築するには整数計画問題の解として得られる配達量よりも多くの量を配達することが提案されている¹⁴⁾。これにより運搬車の稼働率が上がり、より高い利益を上げる事が期待できる。このモデルはローリングホライズンアプローチの枠組みに埋め込まれている。

第二の流れは、単一顧客のケースの分析に基づいたものである。この流れはDrorらによって開拓された^{19,20)}。顧客*i*の期待総コストを最小化する最適補充間隔 t_i^* を用いて、この短期(t)の計画期間内で配達する顧客の集合を決定する。もし $t_i^* \leq t$ であれば、顧客はこの計画期間内に配達を受ける。最適である第 t_i^* 日のかわりに、計画期間中の第 t 日に配達を行う場合の、将来のコストの期待増加を反映するために、第 t 日に配達を行うコスト c_t を決定する。一方、 $t_i^* \geq T$ であれば、すなわち、最適な配達日が計画期間外に出た場合は、第 t_i^* 日ではなく、計画期間内の第 t 日に配達を行う利益 g_t を計算する。これらの計算値は、短期の意思決定が長期の計画におよぼす影響を的確に反映する必要がある。

これに続いて、顧客を運搬車と日に割り当てる整数計画問題を解く。この割り当ては、コスト (c_t, g_t) と運搬コストの和を最小化するようなものである。ある日のある顧客への配達量は固定されていて、それはその日に顧客のタンク容量の上限まで満たすのに必要な量に設定される。このモデルでは、巡回セールスマン問題(TSP)または配達計画問題を解く必要がある。

第三の流れは、配達方策の漸近的解析である。Anilyらは^{21,22)}は、運搬車が無限にあるときの、固定分割方策の解析を行った。同じ分割内の顧客は、地域に分割されるが、この際には、各地域内の需要が、おおむね運搬車の積載量に等しくなるようにする。顧客は2つ以上の領域に含まれてよいとする。ただしその場合、顧客の需要をその領域の間に分割されるものとする。このような固定分割方策の中で、長期にわたる平均コストの最小値の上限と下限を与え、さらに固定分割を与えるためのヒューリスティック(modified circular regional partitioning とよんでいる)を提案した。

Anily and Federgruenは顧客が平面上に独立の同一な分布関数に従い分布しているという仮定のもとで、特定の補充方策のクラスに限定したときに漸近的に最適になる近似解法を構築している。

この解法は、その補充方策の下では各グループごとに独立に補充頻度を決定すればよいので経済発注量を用いる事ができる²¹⁾。

同様のアイデアを用いて、Gallego らは直送方式の長期での有効性を評価した。直送方式は、すべての在庫配送方策の中で、少なくとも 94% の効率性があることを示した²³⁾。ただし、最小経済的発注量が運搬車のタンク容量の少なくとも 71% であることを条件とする。これは多くの顧客が運搬車の容量よりもかなり小さい量の配達量を要求する場合、直送方式はよい方策とはならないことを示している。このアイデアを展開したのが Barmel ら²⁴⁾である。彼らのモデルでは、顧客は無制限の在庫を持てる。この問題を、Capacitated Concentrator Location Problem(CCLP)に変換して解き、その解を IRP の解に変換した。そしてヒューリスティックによってこの解を改善する方法を提案した。Chan らは、ゼロ在庫発注方策を分析した²⁵⁾。この方策においては、顧客の在庫がゼロになったときだけ補充が行われる。これを固定分割ルーティング方策と組み合わせることによって、最悪ケースの下限値を導いた。Gaur らは、時刻によって変動する需要のモデルを考察した²⁶⁾。彼らはランダム化ヒューリスティックを提案し、周期的な固定分割方策を提案した。

Federgruen and Zipkin は、1 日の在庫配送計画問題を扱っている²⁷⁾。これは、「新聞売り子問題」を拡張したモデルである。彼らのアプローチでは、VRP から多くのアイデアを用いている。彼らは局所探索を用いた近似解法と一般化 Benders 分解法を用いた厳密解法を提案している。このモデルでは、1 つの工場には在庫の上限があり、顧客での消費レートはランダム変数であるとしている。対象とする日に、この工場の在庫を複数の顧客の間に割り当てるが、その際に、配達コスト、在庫コスト、在庫切れコストの和を最小にすることを目的とする。この問題を非線形整数計画問題として定式化した。在庫コストと品切れコスト、および在庫の上限の存在によって、全ての顧客を毎日訪問するわけにはいかない。この非線形整数計画問題では、顧客の運搬経路の割り当てを決めると、あとは在庫割当問題に分割される。分割された在庫割当問題では、各運搬車について、在庫量と在庫切れコストおよび巡回路を求める。初期の実行可能解を生成しておいて、それらの運搬経路間で顧客を交換することによって反復的に解を改善する方法をとる。運搬経路間で顧客を交換すると、新しい在庫割当問題が定義されることになる。

第四の流れは、確率的 IRP をマルコフ決定過程としてモデル化するものである。マルコフ決定過程によるモデル化は後述する。

2.3.5 Campbell らによるモデル

Campbell らは、IRP に対して 3 つのモデルを提示した⁷⁾。

第一のモデルは、周期的なスケジュールがよいスケジュールを与えるという仮定に基づいている。また、よい周期的なスケジュールは、分割可能であるという仮定にも基づいている。長期にわたって、単一の運搬車によって効率的に配達を受けることができる顧客の集合を、クラスタとよぶ。クラスタ内の顧客に配達を行うコストは、顧客の物理的な位置に依存するだけでなく、各顧客がもっている在庫容量と消費レートにも依存している。このモデルでは、いくつかのクラスタからなる周期的スケジュールを構築する。すなわち、各顧客はちょうど 1 つのクラスタに属することになる。ここで考慮すべき 2 つの重要な点は、1 つのクラスタで運搬を行うコストはどう評価するか、という点と、顧客をクラスタにどのように分割するか、という点である。このためにクラスタで運搬を行うコストを評価するためのモデルを提案している。最も簡単な評価方法では、あるクラスタ内の 1 つの顧客に配達するときには常にそのクラスタ内の全ての顧客へ配達するものである。このときのコストは、このクラスタに含まれる顧客の集合 S を巡回する巡回セールスマン問題の巡回路の長さ $l(S)$ で与えられる。このクラスタの配達コストを評価するためには、これに加えて、配達をどのくらいの頻度で行えばよいかを決める必要がある。この頻度はおおむね次で与えられる。

$$\left\lceil \min \left(\min_i \frac{c_i}{u_i}, \sum_{k \in K} \frac{Q}{u_k} \right) \right\rceil \cdot r$$

ただし、このコスト評価はコストを大きめに評価してしまう傾向がある。それは、あるクラスタ内のすべての顧客に配達を行うという方策に限っているため、本当は必要のない顧客にも配達をしてしまう可能性があるからである。この過大評価を修正するために次のように条件緩和を行う。クラスタ内の顧客の部分集合を巡回する巡回セールスマン問題の最適巡回路 r の巡回路長を C_r とする。定式化のために次の変数を定義する。計画期間内の運搬経路 r によって顧客 i に配達される量を d_{ir} とする。また、運搬経路 r を用いる回数を x_r とする。これらを用いて以下の数理モデルを定義する。

$$\begin{aligned}
& \min. \sum_r C_r x_r \\
& \text{subject to} \\
& \sum_{i \in r} d_{ir} \leq \min(Q, \sum_{i \in r} C_i) x_r, \forall r \\
& d_{ir} \leq \min(Q, c_i) x_r, \forall r, \forall i \in r \\
& \sum_{i \in r} d_{ir} = T u_i, \forall i, x_r, d_{ir} \geq 0
\end{aligned}$$

ここで x_r は整数とする。最初の制約式は、計画期間内の運搬経路 r で配送される総量は、運搬車のタンク容量と運搬経路に含まれる顧客のタンク容量の和との小さい方の値と、 r が用いられる回数の積よりも小さいことを課している。2番目の制約式は、各顧客には、運搬車のタンク容量とタンク容量の小さい方の値と r が用いられる回数の積よりも多くは配達しないことを課している。3番目の制約式は、計画期間中に顧客に配達される量は、その期間中の消費量に等しいことを課している。

クラスタに対するこのコスト評価は過小評価を与える。それは、この評価方法は運搬車が1台しかないという制約を無視しているからである。

第二のモデルは、時刻を離散化したモデルである。時刻を離散化した場合の整数計画問題を以下で定義する。顧客 i の初期在庫量を I_i とする。第 t 日までに顧客 i に配達する必要のある下限値を l_i^t とする。すなわち $l_i^t = \max(0, -I_i + t u_i)$ とする。また、第 t 日までに顧客 i に配達できる総量の上限値を u_i^t とする。すなわち、 $u_i^t = C_i - I_i + t u_i$ である。運搬経路 r を第 t 日に割り当てるとき1をとる変数を x_r^t とし、運搬経路 r 上の顧客 i に第 t 日に配達する量を d_{ir}^t とする。これらを用いて以下のモデルを定義する。

$$\begin{aligned}
& \min. \sum_i \sum_r c_r x_r^t \\
& \text{subject to} \\
& l_i^t \leq \sum_{1 \leq s \leq t} \sum_{i \in r} d_{ir}^s \leq u_i^t, \forall i, \forall t \\
& \sum_{i \in r} d_{ir}^t \leq Q x_r^t, \forall r, \forall t \\
& \sum_r x_r^t \leq 1, \forall t \\
& 0 \leq d_{ir}^t \leq \min(Q, C_i)
\end{aligned}$$

ここで、 x は 0-1 変数とする。最初の制約式は顧客で在庫切れが発生しないことを課している。2番目の制約式は運搬経路上では運搬車のタンク容量以上には配達しないことを課している。3番目の制約式は各計画期間内には1台の運搬車しか用いないことを課している。

第三のモデルは、連続時間のモデルである。運搬経路 r の所要時間を D_r とする。運搬行動 k の開始時刻を t_k 、運搬経路 r を運搬行動 k に割り当てるとき1をとる 0-1 変数を x_{rk} 、運搬行動 k の中での顧客 i への輸送量を d_{ik} 、運搬行動 k の実施直前の顧客 i の在庫量を y_{ik} とする。これらを用いて以下の問題を定義する。

$$\begin{aligned}
& \min. \sum_k \sum_r C_r x_{rk} \\
& \text{subject to} \\
& \sum_r x_{rk} = 1, \forall k \\
& y_{i1} = I_i - u_i t_1, \forall i \\
& y_{i,k+1} = y_{ik} + d_{ik} - u_i (t_{k+1} - t_k), \forall i, \\
& \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\
& y_{ik} + d_{ik} \leq C_i \\
& \sum_i d_{ik} \leq Q \sum_r x_{rk}, \forall k \\
& 0 \leq y_{ik} \leq \min(Q, C_i), t_k \geq 0
\end{aligned}$$

ここで x は 0-1 変数とする。最初の制約式は、各運搬行動にちょうど1つの運搬経路が割り当てられることを課している。2番目と3番目の制約式は、ある計画期間と次の計画期間の在庫の整合性をとる関係式である。4番目の制約式は、配送される量が顧客のタンク容量と整合性がとれていることを課している。5番目の制約式は、配送される量が運搬車のタンク容量以上にはならないことを課している。6番目の制約式は、各運搬車は一度にちょうどひとつの運搬経路を実行することを課している。

2.3.6 在庫船舶スケジューリング

在庫を考慮した船舶スケジューリングとして、Webb and Larson の開発したモデルがある²⁸⁾が、これは戦略レベルの計画問題である。これはLarson 自身が過去に実施した船舶スケジューリング問題²⁹⁾に関連したものである。多くの企業では、実際に運搬を行う前に、運搬車を購入するか、リースするかしなければならない。これらは複数年にわたる費用がかかる。彼らの扱った戦略的問題は、単一のデポから顧客への運搬サービスを行うために必要な運搬車の数の最小値を見つけるためのものである。このモデルでは、顧客での消費レート（既知とする）からの情報を用いている。得られる運搬車のサイズによって、顧客の消費レートの多少の変動は受け止めることができる。

運搬車のサイズは、顧客を複数の共通要素をもたないクラスに分割し、各クラスに対して“運搬経路の列”を生成する事によって決められる。“運搬経路の列”とは反復して実行する運搬経路の集合である。これは、永続的に用いられる。この列の中の複数の運搬経路の中には、各顧客は複数回含まれてもよい。運搬経路の列は、セービングアプローチによって生成される。このセービング法では、運搬車の稼働率をできるだけ大きくするものであり、これにより運搬車の数を少なくすることができる。

2.3.7 2 顧客の確率的 IRP のマルコフ決定過程モデル化の例

2つの顧客が含まれる確率的 IRP の配達方策として、1つの極端なものはそれぞれの顧客を各時刻で訪れる方策であり、もうひとつは各時刻で2つの顧客両方を訪れる方策である。これらの方策のコストはそれぞれ以下で与えられる

$$v_T = \left[\frac{Tu_1 - I_1}{\min(C_1, Q)} \right] c_1 + \left[\frac{Tu_2 - I_2}{\min(C_2, Q)} \right] c_2,$$

$$v_T = \left[\frac{T}{\min\left(\frac{C_1}{u_1}, \frac{C_2}{u_2}, \frac{Q}{u_1 + u_2}\right)} \right] TSP(c_1, c_2).$$

ただし、 $TSP(c_1, c_2)$ は、 c_1 と c_2 を訪れる巡回セールスマン問題の最適解である。これ以外の方策としては、場合によって2つの顧客を訪れ、その他の場合にはそれぞれの顧客を別々に訪れるとい

う方策がある。直感的には、より大きい消費レートを持つ、またはより小さなタンク容量を持つ顧客は場合によってその顧客だけを訪れ、それ以外のときは2つの顧客の両方を訪れるのがよいと思われる。しかし、具体的に、いつ、どちらの顧客にどれだけの量を配送するかは明らかでない。

2つの顧客を続けて訪れる場合、最初の訪問顧客への配達量が決まったら、2番目の訪問顧客へは運搬車のタンク容量いっぱい量を配達するのがよい。したがって、2つの顧客にそれぞれどれだけの配達を行うか、という決定は、1つの決定、すなわち最初の顧客への配達量を決定する問題となる。このような観察に基づいても、実際の配達量を求めるのは簡単ではない。以下でその例を述べる。

製品の配達量と消費量は離散値とする。各顧客でのタンク容量は20単位とする。各顧客での消費レートは互いに独立で同一の確率分布に従うとし、確率は $P(\text{消費量}=0)=0.4$, $P(\text{消費量}=10)=0.6$ とする。在庫切れのペナルティ費用は、顧客1では1日1単位あたり1,000であり、顧客2では1日1単位あたり1,005であるとする。運搬車のタンク容量は10とする。

顧客での在庫量は毎朝計測する。そして各顧客にどれだけの量を配送するかを決める。全部で3つの運搬経路があるとする。すなわち、顧客1だけに配達する経路（コスト120）、顧客2だけに配達する経路（コスト120）、2つの顧客両方に配達する経路（コスト180）である。この問題は、無限期間のマルコフ決定過程としてモデル化される。このときの目的は、期待総コストを最小化することであり、問題のサイズが小さい（顧客数が2、経路数が3）ので、最適な期待値と最適方策を求める事ができる。

2.3.8 確率的 IRP のマルコフ決定過程モデル化

確率的 IRP を、離散時刻のマルコフ決定過程としてモデル化する。計画期間の各日の開始時に、各顧客での在庫量を観測する。その状態で、どの顧客の在庫を補充するか、その補充量はいくらか、各運搬車にはどの顧客を割り当てるか、運搬経路をそれぞれの運搬車に割り当てるか、を決定する必要がある。このような決定を、“配達行動”とよぶ。各運搬車は、1日に複数の運搬経路を実行する事ができる。期待コストは、日中の在庫量の変動と、運搬車が顧客に補充する前に在庫切れが発生する確率とを考慮して計算される。

ここでは、無限期間のマルコフ決定過程（Markov Decision Process, MDP）を対象とする。MDP は次の要素を持つ。

- (1) 状態 x は各顧客での在庫量を表すとする。状態空間 X は

$$[0, C_1] \times [0, C_2] \times \dots \times [0, C_n]$$

である。第 t 日での状態を X_t で表す。

- (2) 各状態 x に対して、実行空間 $A(x)$ を運搬行動の集合として定義する。ただしこの集合の各要素は、1 日以内に終わり、運搬車のタンク容量を超えず、配達後の顧客での在庫量がタンク容量を超えないとする。 $A \equiv \bigcup_{x \in X} A(x)$ で全ての運搬行動の集合を表す。 $A_t \in A(X_t)$ を第 t 日に選択する運搬行動とする。
- (3) 需要の分布関数がわかっていると、遷移関数 Q が得られる。すなわち、任意の状態 $x \in X$ と任意の運搬行動 $a \in A(x)$ に対して、

$$P[X_{t+1} \in B | X_t = x, A_t = a] = \int_B Q[dy | x, a]$$

- (4) コストとしては、選択される運搬経路を実行するための輸送コストと、顧客での在庫切れによって生ずるペナルティを考慮する。日の開始時点の状態が x であり、運搬行動 a が実行されたときの一日あたりの期待コストを $c(a, x)$ とする。
- (5) 目的関数は、無限期間の総期待割引コストを最小化することである。割引率を α とする。 $V^*(x)$ を初期状態を x としたときの最適期待コストとすると、下記の式で与えられる。

$$V^*(x) = \inf_{\{A_t\}_{t=0}^{\infty}} E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(X_t, A_t) | X_0 = x \right]$$

最適な期待コストは、定常方策によって実現される。この定常方策は現在の状態のみに依存し、現在の状態に対して実行可能な運搬計画のみを返すものである。すなわち、定常方策 π は、関数 $\pi: X \rightarrow A$ であって、すべての x に対して $\pi(x) \in A(x)$ となるもののことである。

そこで、任意の $x \in X$ について以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \inf_{\pi \in \Pi} E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(X_t, \pi(X_t)) | X_0 = x \right] \\ &= \inf_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \alpha \int_x V^*(y) Q[dy | x, a] \right\} \end{aligned}$$

最適方策を求めるには、この最適性方程式を解く必要がある。この方程式を解くために克服する計算上の問題は、以下の3つである。

- (1) 最適コスト関数 V^* を評価する
- (2) 最適性方程式の積分を評価する
- (3) 各状態に対して、右辺の最小化問題を解く
このためには反復的な手続きが用いられる。

この最適性方程式を厳密に解くことは難しいが、状態が有限であれば、右辺の最小化問題を解くためのアルゴリズムが複数提案されている。例えば、価値関数の近似を反復的に評価するものがある。実際の確率的 IRP ではこのような条件が満たされるようなものはほとんどない。というのも、状態空間 X の要素の数が大きすぎるからである。これは、在庫量を離散化しても解決しない。また、右辺の最小化問題は、その特殊ケースとして配送計画問題を含むほど難しい問題である。したがって、最適性方程式を直接厳密に解くのではなく、マルコフ決定過程を近似的に解くことを考える必要がある。

V を線形関数 $\hat{V}$ として近似することは、良い性質を持つ事が Bertsekas and Tsitsiklis によって議論されている³⁰⁾。しかし実際に計算可能なのは、いくつかのシンプルな分布についてだけであり、実際の規模の顧客数（数十以上）の問題に対しては、シミュレーションによる積分評価が現実的である。右辺の最小化問題を解くには、配達ルートを決めるだけではなく、その配達量も決めなければならない。これを求めるための計算量は非常に大きくなるので現実的でない。そこで、なんらかのヒューリスティックを用いることが必要である。計算量と得られる評価のトレードオフを考慮して、その近似 $\hat{V}$ を求める必要がある。この $\hat{V}$ に基づいて決める方策 $\hat{\pi}$ は、近似 $\hat{V}$ の質に依存する。

マルコフ決定過程によるモデル化は、需要の不確実性を陽に取り入れるものである。このアプロ

一チは、Minkoff³¹⁾によって始められた。Minkoffは膨大な状態空間が原因となる計算量の難しさを克服するために、分割のためのヒューリスティックを提案している。このヒューリスティックでは、線形計画問題を解いて全体の輸送コストを個別の顧客に割り当て、各顧客に対して、個別に定義される部分問題を解く。部分問題の価値関数が、元問題の価値関数を近似するために加えられる。この提案手法の限界は、配送ルート上の顧客に対して、固定された配送量の配送ルートの集合が既知である、としていることである。そして、意思決定で行うことは、これらのルートの中でどれを使うかを定めることである。この限界は、Kleywegtら^{32,33)}による近似動的計画法アプローチおよびAdelmanによる価格主導アプローチ^{17,18)}によって克服された。

Q をマルコフ決定過程の遷移関数を表すとする。 $g(x, a)$ で、時刻 t において状態 x にあったとき、決定 $a \in A(x)$ を実行したときの、単一期間の期待利得を表すとする。目的は、無限期間での期待割引利得を最大化することである。初期状態 x のときに、最適な期待価値を $V^*(x)$ とする。これは下記の方程式によって与えられる。

$$V^*(x) = \sup_{a \in A(x)} \left\{ g(x, a) + \alpha \int V^*(y) Q(dy | x, a) \right\}$$

$V^{\pi^*} = V^*$ が成立するとき、方策 π^* を「最適」という。このとき、 V^{π} は方策 π の価値関数を表すとする。マルコフ決定過程を解くことには、最適な価値関数 V^* を計算すること、そして上の最適性方程式を解く事によって最適方策 π^* を得る事が含まれている。このためには、下記の計算上のタスクを実行する必要がある。

- (1)最適な価値関数 V^* の計算。 V^* を計算するためのほとんどのアルゴリズムでは、各状態 x に対して $V^*(x)$ の近似を反復的に計算する必要がある。これらのアルゴリズムは、状態空間が小さいときのみ実用的である。
- (2)期待値の計算、すなわち最適性方程式の右辺内部の積分の計算。確率的IRPでは、この積分は多次元の積分になる。このような多次元の積分には古典的な積分計算では対応できない。

- (3)各状態に対して最適な決定を求めるためには、最適性方程式の右辺の最大化問題を解かなければならない。確率的IRPに対しては、これはVRPの複雑な拡張問題を解く事が必要である。

Kleywegtらは、これらの計算タスクを効率的に行うための近似方法を提案した^{32,33)}。マルコフ決定過程による定式化では、運搬車は無限台あるという条件が必要であるが、この方法では、有限台の運搬車を扱うことができる。最適価値関数

V^* は関数 $\hat{V}$ により近似される。その手順は以下のとおりである。まず、確率的IRPは顧客の部分集合に対しての部分問題に分割される。各部分問題は、マルコフ決定過程になる。この顧客の部分集合は、必ずしも顧客を分割するものではなくとも顧客全体をカバーしていれば良い。この部分問題は、顧客の部分集合がとりうる状態を正確に表現するように定義される。そのために、各部分問題のパラメータは、全体の確率的IRPをシミュレートすることによって決定される。次に、各部分問題を最適に解く。最後に、任意の状態 x に対して、近似値 $\hat{V}(x)$ を決定する。そのためには、

顧客の部分集合を選択し、また $\hat{V}(x)$ を状態 x に対応する分割に対応する部分問題における、最適な価値関数の和として設定する。分割は、 $\hat{V}(x)$ を最大化するように決定される。ランダム化法を用いて最適性方程式の右辺の期待値を計算する。実際の運搬行為の決定においては、運搬路においてどの顧客を訪問するかと、訪問する顧客にどれだけ量を補充するかを決定する。そのためにはヒューリスティックを用いる。初期解としては、直送ルートを用いる。これを局所探索によって改善する。局所探索では、ルートに顧客を追加し、運搬量を修正することによって改善解を見つける。この手法により、Kleywegt, Nori and Savelsberghは顧客数50までの問題を解いている。

2.4 宮本らによる在庫配送計画問題の事例

宮本らは、国内の自動販売機の在庫配送計画問題に対する数理モデルを提案している³⁴⁾。彼らは、700台の自販機、30日間の自動販売機の在庫を補充する問題に対して数理モデルを提案した。これは、自動販売機への配送時期およびその配送ルートを決めることを目的としている。問題を無限期

間のIRPとして定式化し、それを有限期間のIRPに帰着するアプローチを取っている。ここではローリングホライズン方式を用いており、30日間の計画を立てるが実際に実行するのは最初の1日分の計画としている。ここでは自動販売機におかれた製品の需要量は一定量の確定値であるとしている。すなわち確定的IRPである。在庫切れはしてもよいがその場合はペナルティ費用が課される。

自動販売機が1台の場合、デポと自販機を往復するだけなので、配送ルートを考える必要はない。この場合は配送の時期を決めるだけで良い。最適な在庫配送計画を求めるために有向ネットワークを定義し、最短路問題を解くことによる最適解の導出方法を提案している。

自動販売機が複数台の場合は、挿入法と改善法を提案している。初期解の生成には挿入法を用いている。挿入法において挿入する順番を決める要素として自販機の地理的關係と配送期の時間的關係という2つの要素があることに注意する必要がある。ここでは一台の自販機について計画期間の全ての配送計画を決め、その操作を全ての自販機について繰り返す事にする。改善法では、Cross-opt 近傍に基づく局所探索法を採用している。この局所探索では、二つのルートに注目し、その部分列を交換する。

3. 本研究での開発モデルと手法

サプライチェーンにおいて、生産、在庫、輸送は、密接に関連している。これらの3要素はお互いに密接に関連し、影響を与えあっている。より具体的には、各拠点での生産量に依存してそこでの在庫量が決まり、また、その在庫管理の方法によって、そこから運び出される量、およびそこに運び込まれる量が定まる。これらの量が定まることによって、複数の拠点間の輸送パターンが定まる。

理想的には、生産・在庫・輸送の方策を同時に定めることが望ましいが、それでは問題が複雑になりすぎるため、現実規模の問題を解いて運用に使うことはできない。現実規模の問題を解くには、この3要素のいずれかの要素を固定することによって、問題の規模を扱えるサイズに限定することが重要である。

以下の3.1で述べる開発モデルでは、生産量を固定する、すなわち入力データとして与えることによって、計画の対象を在庫と輸送に限定している。この章の内容は、既に発表した文献³⁵⁾に基

づいている。このモデルの特徴は、船舶特有の輸送形態を“ペアリング”として表現したことである。この“ペアリング”によって、「数カ所の積み地で満載し、数カ所の揚げ地で荷を揚げる」という船舶による海上輸送の特徴を効率的に表現することができるのである。この問題は、目的地およびペアリングの数が比較的小さい問題にのみ適用可能である、という制限がある。

一般に、在庫、生産に関する計画は、輸送に関する計画に比べて、より長い期間を対象とする必要がある。より長い期間を対象とした場合、モデルに含まれる変数や制約の数が組み合わせ的に急速に増える。そのため、計算量が増大し、現実規模の問題が解けなくなる、という弊害がある。また、船舶輸送に付随する移動の不確実性が原因となり、計画がそのとおりに実行されるとは限らない、という問題がある。

不確実性に対処するための有効な方法に、ローリングホライズン方式がある。これは、例えば、30日間の計画を作成し、実際には最初の2日間の計画のみを実行する、というものである。3日目以降の残りの28日間の計画は、不確実性の影響が大きくなり、有効なものではなくなるので、実際には実行しないのである。この28日間のデータを取り入れることによって、最初の2日間の計画が近視眼的なものにならず、長期的にみて有効なものとなることが期待できる。我々が対象とする在庫管理と船舶スケジューリングの数理モデルでは、問題のサイズ(変数の数と制約式の数)が大きくなる。したがって、ローリングホライズン形式は、バラ積み船などの一部の比較的扱いやすい問題にのみ適用可能である。ケミカルタンカーやコンテナ船など、より一般の問題には、ローリングホライズン形式以外の方法が必要である。これに対する標準的なアプローチは、ある期より先の計画を近似的に表現することにより、解くべき問題のサイズを縮小する方法である。これを一般的には「近似動的計画法」とよぶ。近似動的計画法は、これまで陸上輸送の分野での適用例はあるが、海上輸送での適用例はなかった。本研究では、海上輸送での船舶スケジュール作成に対して近似動的計画法を適用する手法を新たに開発した。この成果は国際会議において発表済みである¹⁶⁾。3.2では、この参考文献の内容に基づき、近似動的計画法を船舶スケジューリングに適用する方法について述べる。3.2で述べるこのモデルの開発においては、モデルをシンプルにするために在庫管理の要素は取り入れていない。3.3においては、3.2で述べたモデルを基礎として新たに開発した、在庫管理と船舶スケジューリングを同時に最適化

するモデルについて述べる。このモデルについては数値実験における性能評価、および専門家における評価は将来の課題であることを述べておく。

3.1 生産計画をもとにしたモデル

前章までは、顧客が需要をもたらす状況を想定していた。一方で、みずからの生産による在庫を管理する場合には、異なるモデルが必要である。この章では生産計画をもとにした船舶スケジューリング問題を考える³⁵⁾。目的は生産地から複数の目的地への効率的な輸送を提示することである。生産地に着目したのは、受注が3日前に初めて分かる物流段階の情報では予測に限界があり、一方、その上流の生産段階では半月先の需要が分かっており、その先の需要も予測しやすいからである。幸い、鉄鋼の物流会社は生産会社と同じグループ会社に属していることが多く、情報を共有しやすい。

3.1.1 前提条件

本モデルを考える上での前提条件を以下に示す。生産物には生産した時点で目的地が与えられているものとする。費用には本来、輸送トン数から割り出される基本運賃と空トン費用、寄港割増などがある。

基本運賃とは輸送距離と輸送トン数により支払う費用である。空トン費用とは、船舶の許容重量以下しか運ばない場合に、荷主が船主に重量の差分をいくらか支払う契約になっており、その費用である。寄港割増とは、複数の目的地をもつ船に対して港に寄った分だけ加算される費用である。ただし、空トン費用と基本運賃に関しては、簡単のため同一とする。

納期や輸送量の記述について、その日に保有できる限界量という形で代替した。

目的地が複数の場合を考慮し、ペアリングとして与えた。これにより、寄港割増を考慮した運賃や輸送できる容量などを考えることができる。

このモデルに関しては費用や時間、船の容量以外に喫水も考える必要がある。鉄鋼製品を満載にした船では港に定められた許容喫水のために入港できない場合がある。図-4 は生産地が同一である場合のペアリングを示している。

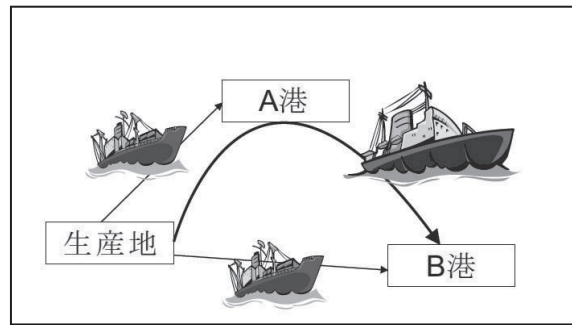


図-4 ペアリングの例

A 港と B 港へ輸送する場合、A 港と B 港に別々に輸送する場合と、一方の港を経由して二つの港へ同じ船で輸送する場合がある。

3.1.2 数理モデル

このスケジューリング問題は、以下のように数理計画問題として定式化できる。

集合

T : (離散) 時刻の集合

D : 目的地の集合

P : ペアリングの集合

L_p : 要求の集合

パラメータ

C_p : ペアリング p で運ぶ場合の運賃

M_{dt} : 目的地 d 別にみた第 t 日に生産する量

R_p : ペアリング p で運べる限界容量

B_{dt} : 目的地 d 別にみた保有限界量

U_d : 各港の喫水による入港制限

変数

x_{pdt} : 第 t 日に目的地 d に運ぶ量

$$(0 \leq x_{pdt} \leq U_d)$$

y_{pt} : 第 t 日にペアリング p で輸送するとき

1, それ以外るとき 0 である 0-1 変数

S_{dt} : 目的地 d 別の第 t 日の在庫量

z_{pt} : なるべく船を満載するための余裕変数

定式化

$$\begin{aligned}
& \min. \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} C_p y_{pt} + \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} z_{pt} \\
& \text{subject to} \\
& S_{d(t-1)} + M_{dt} - \sum_{p \in P, d \in L_p} x_{pdt} = S_{dt}, \\
& \quad \forall d \in D, \forall t \in T \\
& \sum_{d \in L_p} x_{pdt} + z_{pt} = R_p y_{pt}, \\
& \quad \forall p \in P, \forall t \in T \\
& S_{dt} \leq B_{dt}, \forall d \in D, \forall t \in T
\end{aligned}$$

目的関数は、輸送費用と船の容量と荷の総量の差を最小化するものである。第一の制約式は、在庫と生産量の間で、荷が発生したり消失したりしないことを課している。第二の制約式は、一度に輸送できる量が船の容量以下であることを課している。ここまでの制約式では何も運ばないことが最適解となる。第三の制約式で在庫として持てる量の制限を課している。納期がある場合はこの制約式として表される。

3.2 多期間の船舶スケジューリングに対する近似動的計画法

多段決定問題を定式化した動的計画問題は、状態数の多さから、必ずしも厳密に解けるわけではない。このような場合に問題を近似的に解く方法論が近似動的計画法である¹⁵⁾。本研究では、在庫船舶スケジューリング問題に対する数理的アプローチの枠組みの中で、重要な役割を果たすマルコフ決定過程によるモデル化に注目した。船舶スケジューリングの場合、陸上の配送計画問題に比べて計画期間が長く、船舶の運航の不確実性やオーダー情報の不確実性が長期の計画に及ぼす影響が大きい。そこで、近似動的計画法によってマルコフ決定過程によるモデルを近似的に解く方法を採用した。

3.2.1 動的計画法

動的計画法は、数理計画、制御を含む多様な分野で問題設定のパラダイムとして使用されている。動的計画法とは、 n 段階決定過程を n 個の1段階決定過程の列に直すことにより、多段決定問題を系統立てて逐次的に解く方法である³⁷⁾。

3.2.2 最適性方程式

モデル化の対象に不確定な要素がない場合、最適性方程式 (Bellman 方程式) は次のように表される。

$$x_t^*(S_t) = \operatorname{argmax}_{x_t} (C_t(S_t, x_t) + V_{t+1}(S_{t+1})) \quad (3.1)$$

ここでは、決定過程は時間的に多段であるとしている。すなわち、離散的な時刻の集合を T とし、各期 t において、最適な意思決定 x_t を求めることが目的である。 S_t は、期 t における“システム”の状態、 $C_t(S_t, x_t)$ は期 t に状態 S_t にあるときに決定 x_t を行うことで期 t に得られる寄与、 $V_t(S_t)$ は価値とよび、期 t 以降に最適な決定を行ったときの、期 t 以降、最終期 T までの各期の寄与関数の合計を $V_t(S_t)$ と表す。 $V_t(S_t)$ は期 t の価値関数とよぶ。価値関数 $V_t(S_t)$ には時間の経過による割引率 γ をかけている文献が多いが、本稿では表記の簡略化のために省いた。

最適性方程式(1)を解くことにより、各期 t の最適な決定 x_t を得る。 S_{t+1} は、状態 S_t と決定 x_t で決まると考えると、 $S_{t+1}(S_t, x_t)$ と書いてもよい。最適な決定 x_t および価値関数 $V_t(S_t)$ は、次の最適性方程式を満たすものとして与えられる。

$$\begin{aligned}
V_t(S_t) &= \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t))) \\
&= C_t(S_t, x_t^*(S_t)) + V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t^*(S_t)))
\end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2.3 近似動的計画法導入

さて、各期の最適な決定を求めるには、(1)のかわりに最適性方程式(2)をとけばよいのであるが、最適性方程式を解くこと自体も困難であることが多い。その理由の一つが、いわゆる「次元ののろい」とよばれる困難さである。これは、状態 S_t のとりうる値の数が多すぎて、その状態を評価することが現実的にできない、という困難さである。

近似動的計画法の目的の一つは、次元ののろいを克服することである。そのための基

本戦略が、前進型動的計画アルゴリズムの導入である。最適性方程式を厳密に解くには S_t のとりうる値各々について価値関数を評価する必要がある。しかし、状態の数が膨大である場合にはこれは不可能である。そこで、全ての状態について価値関数を評価することをあきらめ、それらを近似的に評価することで、近似的な最適決定を求める。そのために、前進型動的計画アルゴリズムを用いて、システムの挙動をシミュレートしながら段階的に最適な決定に近づけていくのである。このために、二つの問題を考える必要がある。一つは、シミュレーションによって得られた情報を用いて（近似的に）最適な決定を求める問題、もう一つはシステムをシミュレートする問題である。この[システムのシミュレーション]と[(現在の情報のもとで) 最適な決定を求める]という手順を繰り返すことにより近似の精度を上げ、できるだけよい近似解を求めるのが近似動的計画法である。

前進型アルゴリズムでは、後退型アルゴリズムと異なり、期 t の意思決定を行う時点で期 $t+1$ の価値関数 $V_{t+1}(S_{t+1})$ はわかっていない。そこで、 $V_{t+1}(S_{t+1})$ の近似関数を用いる。価値関数 $V_t(S_t)$ の近似を $\bar{V}_t(S_t)$ と表し、近似価値関数とよぶ。 $\bar{V}_t(S_t)$ はどのように定めてもかまわないが、扱いやすさと近似精度のバランスをとる必要がある。

3.2.4 開発モデル

多期間の船舶スケジューリング問題は動的計画法として定式化できる。これを近似動的計画法を用いて解く方法を述べる¹⁶⁾。船舶スケジューリング問題における1期の問題は、集合分割問題として定式化できる。この集合分割問題定式化は、動的計画法の記法を用いると、以下のように書かれる。

$$\min_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t)).$$

この問題は配送計画問題の一種であり、NP 困難ではあるが、ルート生成と集合分割問題による効率的な近似解法が存在する。

この船舶スケジューリングを3期にわたって解く問題を扱っているのが文献¹⁶⁾である。動的計画法の枠組みでいうと、 $T=0,1,2$ にわたり

$$\min_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + V_{t+1}(S_{t+1}))$$

を最適化する各期の決定 x_t を求める問題となる。

$C_t(S_t, x_t)$ は、 i 番目の実行可能スケジュールを採用するときに1を、それ以外るとき0をとる変数 y_i と、そのスケジュールのコスト c_i を用いて $\sum_{i=1}^N c_i y_i$ と定義される。ただし、 N は実行可能なスケジュールの総数とする。

$V_t(S_t)$ の正確な値はわからないので、その近似関数を $\bar{V}_t(S_t)$ によって置き換える。すなわち、各期において以下の最適化問題を解く

$$\min_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \bar{V}_{t+1}(S_{t+1}))$$

近似価値関数を $\bar{V}_t(S_t)$ はどのように設定しても

よいが、最適化問題が効率的に解けるように定めなければならない。目的に価値関数を加える前の最適化問題は配送計画問題である。この問題はNP 困難な問題であるが、幸い効率的に解を得るアルゴリズムを開発している。しかし、近似価値関数を $\bar{V}_t(S_t)$ を不適切に定義すると、それを目的関数に加えることによって配送計画問題の数理的構造を壊してしまうことになる。そうすると、開発したアルゴリズムが動作せず、最適化問題が解けなくなってしまう。そのようなことが起こらないように、システムの状態をよく表現し、かつ配送計画問題の構造を壊さないような定義をする必要がある。

意思決定後状態の導入

船舶スケジューリングにおける近似動的計画法では、次期 $t+1$ 以降の情報（オーダーの発生状況）がわからない状態で期 t での意思決定を行わなければならない。したがって、期0における意思決定によって x_0 を決めるにあたって、期1以降にどのようなオーダーが発生するかがわからない。この状況の中で $V_1(S_1)$ を定めるためには、過去のオーダーの発生状況を用いて統計的な情報を取り出すことによって定める。

オーダーの発生はシステムの不確定要素である。期 t における不確定要素を W_t と表す事にする。期 $t=0$ における状態 S_0 、意思決定 x_0 、不確定要素の実現値を $\hat{W}_1$ 、期 $t=1$ の状態 S_1 の実現する順番は、図-5の通りである。



図-5 状態の推移と不確定要素

そこで、このランダムな要素 $\widehat{W}_1$ をサンプルによって定める。これはいわゆるモンテカルロシミュレーションといわれるものである。期 $t=1$ において取りうる全ての状態の評価をするのではなく、このサンプリングによって実現された状態のみを評価するのである。

不確定要素をサンプリングによって実現することで、次期の状態 S_1 を求めることができる。ここでは、期 0 の状態 S_0 、決定 x_0 、不確定要素の実現値 $\widehat{W}_1$ がわかれば、確定的に状態 S_1 が求められる、と仮定している。 S_0, x_0, W_1 から次期の状態 S_1 を導く関数を

$$S_1 = S^M(S_0, x_0, W_1).$$

と書き、これを推移関数とよぶ。

期 t の状態 S_t で決定 x_t を行ったあと不確定要素が実現し、状態 S_{t+1} に推移するということは、最適化問題における価値関数そのものを目的関数に用いるのではなく、その期待値を用いなければならないことを示している。

$$\min_{x_t \in X_t} \left(C_t(S_t, x_t) + E\{V_{t+1}(S_{t+1})\} \right).$$

いま、期 t に状態 S_t にあったとき、意思決定 x_t を行った状態を S_t^x と表し、意思決定後状態とよぶことにする。これを導入すると、解くべき最適化問題は、以下のように書かれる。

$$\min_{x_t \in X_t} \left(C_t(S_t, x_t) + E\{V_{t+1}(S_{t+1}) | S_t^x\} \right)$$

と書かれる。関数 $V_t^x(S_t^x)$ を新しく導入すると、期 t で解くべき最適化問題は、

$$V_t(S_t) = \min_{x_t \in X_t} \left(C_t(S_t, x_t) + V_t^x(S_t^x) \right)$$

となる。ここで、 $V_t(S_t)$ と $V_t^x(S_t^x)$ との関係は以下の通りである。

$$V_{t-1}^x(S_{t-1}^x) = E\{V_t(S_t) | S_{t-1}^x\},$$

$$V_t(S_t) = \min_{x_t \in X_t} \left(C_t(S_t, x_t) + V_t^x(S_t^x) \right),$$

$$V_t^x(S_t^x) = E\{V_{t+1}(S_{t+1}) | S_t^x\}.$$

このように、意思決定後状態 S_t^x を導入することによって、最適化問題の目的関数の中に含まれている期待値の評価を、最適化問題の外部に取り出すことができる。

近似価値関数の定義

ここで、近似価値関数を用いた集合分割問題定式化を詳述する。 $R_{v,t}$ で、船舶 v が期 t に実行可能なスケジュールの集合を表すとする。 $C_{rv,t}$ で、船舶 v が期 t にスケジュール r を実行するコストを表すとする。 $F_{k,t}$ で、オーダー k を期 t にスポット用船で処理するコストを表すとする。定数 $a_{kr,t}$ は、オーダー k がスケジュール r で期 t に処理されるとき 1 を、それ以外るとき 0 をとる。定数 $\delta_{va,t}$ は、期 t のスケジュールを実行した後に、船舶 v が地域 a に存在するとき 1 を、それ以外るとき 0 をとる。 $x_{rv,t}$ は、期 t に船舶 v がスケジュール r を実行するときに 1 を、それ以外るとき 0 をとる $0-1$ 変数とする。 $y_{k,t}$ は、期 t にオーダー k がスポット用船で処理されるとき 1 を、それ以外るとき 0 をとる $0-1$ 変数とする。船舶のサービス地域を、いくつかの地域に分割する。ここでは、日本全域を、西日本、中日本、東日本と分割することとする。この地域の集合を $A = \{\text{西日本, 中日本, 東日本}\}$ と表す。期 t に、地域 $a \in A$ とに存在する船舶の数で、このシステムの状態を記述するとする。この数を $D_{a,t}$ と表す。これらの表記を用いて、下記のとおり数理最適化問題(SP-APX)を定義する。

(SP-APX)

$$\begin{aligned}
& \min. \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} C_{rv,t} x_{rv,t} + \sum_{k \in K} F_{k,t} y_{k,t} + V_t^x(S_t^x) \\
& \text{subject to} \\
& \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} a_{kr,t} x_{rv,t} + y_{k,t} = 1, \forall k \in K \\
& \sum_{r \in R_{v,t}} x_{rv,t} = 1, \forall v \in V \\
& \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} x_{rv,t} \delta_{va,t} = D_{a,t}, \forall a \in A
\end{aligned}$$

関数 $V_t^x(S_t^x)$ の陽な形を得ることはできない。したがって、 $V_t^x(S_t^x)$ のかわりにそれを近似する関数 $\bar{V}_t^x(S_t^x)$ を用いることにする。この関数は、任意の形式で定義してよいが、システムの価値をできるだけよく反映するとともに、上記の最適化問題を効率的に解くことができなければならない。

期 t において、状態 S_t から決定 x_t を定めたとする。決定したスケジュールを実行した結果として、各船舶の存在する地域が確定する。この、各地域に存在する船舶の数が意思決定後状態として定める。期 t で状態 $D_{a,t}$ にある状態からスケジュール x_t を実行した後の、地域 a に存在する船舶の数を、 $D_{a,t}^x$ と表す。期 t に地域 a に船舶が一隻存在する「価値」を $v_{a,t}$ と表す。 $v_{a,t}$ の値は事前にはわからないので、システムをシミュレートすることにより求める。これらを用いて、近似価値関数 $\bar{V}_t^x(S_t^x)$ を次のとおりに定義する。

$$\bar{V}_t^x(S_t^x) = \sum_{a \in A} v_{a,t} D_{a,t}^x.$$

この関数は、以下の理由により、変数 $x_{rv,t}$ の線形関数として表すことができる。まず、期 t に船舶 v がスケジュール r を実行したあとに地域 a に存在するときに 1 を、それ以外るとき 0 をとる定数として、 $\sigma_{rva,t}$ を導入する。これを用いると、 $D_{a,t}^x$ は次のように表される

$$D_{a,t}^x = D_{a,t} + \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} x_{rv,t} \sigma_{rva,t}, \forall a, \forall t.$$

これを $\bar{V}_t^x(S_t^x)$ に代入したものを、さらに最適化問題における $V_t^x(S_t^x)$ として代入すると、目的関数は次のように変形することができる

$$\begin{aligned}
& \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} (C_{rv,t} + \sigma_{rva,t} v_{a,t}) x_{rv,t} + \sum_{k \in K} F_{k,t} y_{k,t} \\
& + \sum_{a \in A} v_{a,t} D_{a,t}
\end{aligned}$$

近似価値関数の更新

近似価値関数 $\bar{V}_t^x(S_t^x)$ で用いる係数 $v_{a,t}$ の正確な値を知ることは不可能である。そこで、係数 $v_{a,t}$ の値はシミュレーションによって評価する必要がある。この評価値を $\bar{v}_{a,t}$ と表すことにする。つまり、実際の最適化問題の定義においては、その目的関数では $v_{a,t}$ の代わりにその評価値 $\bar{v}_{a,t}$ を用いるのである。

一般に、近似動的計画法は、「システムのシミュレーション」と「最適な決定をもとめる」ことを反復的に行う。多期間の船舶スケジューリングでは、「システムのシミュレーション」において評価値 $\bar{v}_{a,t}$ を評価し、集合分割問題を解くことが「最適な決定をもとめる」に相当する。

近似価値関数 $\bar{V}_t^x(S_t^x)$ は、係数の評価値 $\bar{v}_{a,t}$ を与えることによって完全に決まるので、シミュレーションによってこの係数を定めることがすなわち近似価値関数を定めることになる。 n 回目の反復における期 t の最適化

問題を解く際に用いる評価値を、 $\bar{v}_{a,t}^{n-1}$ と表す。

ここで、添字 $n-1$ を用いるのは、1 回目から $n-1$ 回目までのシミュレーションによって得られたことを表している。この値は、最適化問題(SP-APX)の LP 緩和における、最後の制

約式 $\sum_{v \in V} \sum_{r \in R_{v,t}} x_{rv,t} \delta_{va,t} = D_{a,t}$ に対する双対

変数の値を用いて更新する。この双対変数の値を $\hat{v}_{a,t}^n$ と表す。このとき、 $n+1$ 回目のシミュレーションにおいて期 $t+1$ に用いる近似

価値関数の評価値 $\bar{v}_{a,t+1}^n$ を、次の更新式によ

って更新する

$$\bar{v}_{a,t-1}^{-n} = (1 - \alpha_{n-1}) \bar{v}_{a,t-1}^{-n-1} + \alpha_{n-1} \hat{v}_{a,t}^n, \quad 0 < \alpha_{n-1} < 1$$

シミュレーションを行う前の係数の値 $\bar{v}_{a,t}^{-0}$ がわからない場合は、0 としておけばよい。

ステップサイズの決定方法

近似価値関数の更新時に用いるステップサイズ α_n の決め方は、よい近似を得るためには重要である。これをうまく設計しないと、得られる決定が実際に最適な決定からかけ離れてしまう。ステップサイズの決め方には様々な方法が提案されている。

3.2.5 数値計算結果

このアプローチの有効性を確認するために実施した数値計算の結果を述べる。ここに述べる結果は、文献 16 によっている。

まず、1 期の計画問題を 10 日間の日本国内の船舶スケジューリングとする。この 10 日間の計画を 3 期続けて解く問題を、多期間の船舶スケジューリング問題とみなす。

問題例は、乱数を用いて以下の手順で生成する。まず、30 日分のオーダーを 1 つ用意する。このオーダーのセットの中から、用意した 30 日分のオーダーと同程度の数のオーダーを、重複を許して擬似乱数を用いて拾いだす。この手順により、30 日分のオーダーのセットを 2,000 個用意する。これで、3 期間の多期間の船舶スケジューリング問題の問題例を、2,000 個用意したことになる。この 2,000 個のオーダーセットを繰り返し解くことによって、近似価値関数における係数の評価値 $\bar{v}_{a,t}$ を 2,000 回更新する。この更新の繰り返しによる評価値の変化を図示したのが、以下の図-6 である。

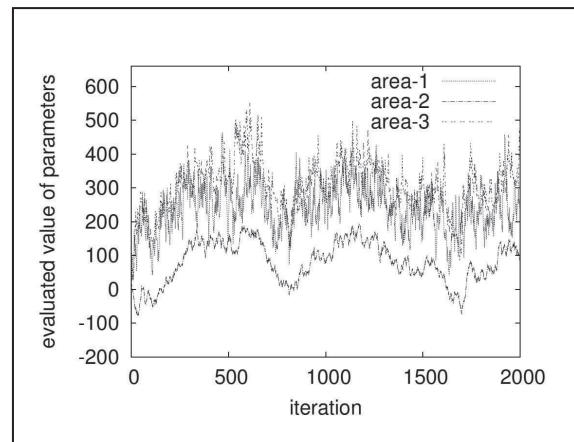


図-6 反復回数と評価値の関係

評価値が収束するのであれば、その収束値を用いて近似価値関数を定めればよい。今回のデータでは収束は観測されないので、2,000 回分の算術平均を、係数の最終的な評価値とする。

さて、こうして得た係数の評価値を用いて近似価値関数を定義し、近視眼的な計画手法との結果を比較する。シミュレーションのための 2,000 個のオーダーセットを生成したのと同じ手順により、10 個のオーダーセットを生成する。この 10 個の問題例のそれぞれに対して、2 つの計画方法を比較する。まず、30 日間のオーダーセットを、最初の 10 日間、次の 10 日間、最後の 10 日間の 3 期間のオーダーに分割する。第一の計画方法は、これら 3 つの単期間の問題を、近似動的計画法を用いない船舶スケジューリング問題として解く方法である。これは、対象としている 10 日間のデータのみを用いて解く、という意味で、「近視眼的」と言える。こうして得た最適化問題の最適値を 3 期間分足して、30 日分の計画問題の最適値とする。第二の計画方法は、近似動的計画法を用いて定義した最適化問題 (SP-APX) による多期間のスケジューリング問題として解く方法である。こうして得た、第一の計画方法による最適値と、第二の計画方法による最適値とを比較したのが以下の図である。この図において、「myopic」と記したのは、第一の計画手法、すなわち「近視眼的」な計画手法による計画の最適値である。また、「ADP」と記したのは、第二の計画手法、すなわち近似動的計画法による計画の最適値である。

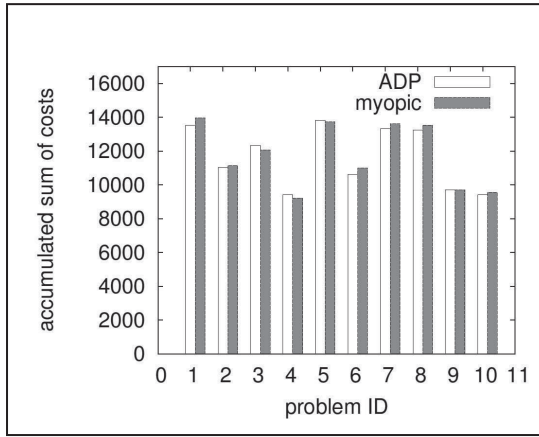


図-7 近似動的計画法による最適値と
近視眼的方法による最適値の比較

この結果によると、10題中、6題の問題において、近視眼的な計画手法よりも近似動的計画法による計画手法の方がよい最適値を与えた。

この数値計算においては、集合分割タイプの整数計画問題を繰り返し解く必要があるため、計算時間を評価することも重要である。整数計画問題を解くために用いたソルバは、GLPK Version 4.38である。また、2,000回のシミュレーションを行うためにかかったトータルの計算時間は、4666秒であった。用いた計算機は、Intel Core 2 Duo 2GHz, 2GB RAMのパーソナルコンピュータである。また、用いたプログラミング言語はC++言語である。

3.3 船舶スケジューリングと在庫管理の同時最適化モデル

3.3.1 数理モデル

以下で、在庫管理と船舶スケジューリングを同時に最適化する数理モデルを与える。対象とする需要点に、船舶によって供給点から貨物を輸送する状況を想定する。船舶は、供給点に寄港して貨物を積み、いくつかの需要点においてそれらの貨物を荷揚げするとする。

数理モデルを定義するために、以下の通り、パラメータを導入する。この定式化で用いるパラメータは、 C_{vr} , s_i^0 , Q_{ivr} , C , R_v である。これらの値は入力データとして与えられると想定する。 C_{vr} は、船舶 v がスケジュール r を実行するときにかかるコストを表す。 s_i^0 は、需要点 i における初期在庫量を表す。 Q_{ivr} は、船舶 v がスケジュール r を実行するとき、需要点 i で荷揚げする貨物の量を表す。 C は

需要点の集合を表す。 R_v は、船舶 v が実行可能なスケジュールの集合を表す。また、この定式化で用いる変数は、 x_{vr} と s_i である。 x_{vr} は0-1変数であり、 s_i は実数変数とする。これらを用いて、在庫管理と船舶スケジューリングを同時に最適化する数理モデル(ShipSche-INV)は、下記のように定式化できる。

(ShipSche-INV)

$$\max. -\sum_{v \in V} \sum_{r \in R_v} C_{vr} x_{vr} \quad (3.3)$$

subject to

$$s_i = s_i^0 + \sum_{v \in V} \sum_{r \in R_v} Q_{ivr} x_{vr} \quad (3.4)$$

$$\sum_{r \in R_v} x_{vr} = 1, \forall v \in V \quad (3.5)$$

$$x_{vr} \in \{0, 1\}, v \in V, r \in R_v \quad (3.6)$$

$$\underline{s}_i \leq s_i \leq \bar{s}_i \quad (3.7)$$

この定式化においては、 R_v を既知の集合と仮定し、列挙できるものと仮定している。しかし、2.1章の「船舶スケジューリング」で述べたとおり、実務規模の問題でこの集合を陽に列挙することは事実上不可能である。そこで、列生成の手順によって、実行可能スケジュールの集合 R_v の部分集合を動的に生成する手法を用いる。

2.1章で述べた、在庫管理を考慮しない船舶スケジューリング問題と、この章で定義した数理モデルとの違いは、運ぶべきオーダーの集合があらかじめ与えられるか否かである。具体的には、2.1章のモデルでは、オーダーの集合が入力データとして与えられるのに対し、この章で定義したモデルは、オーダーの集合が入力データとしては与えられず、問題を解く仮定で定めるのである。

この同時最適化モデルを解くには、2.1章の数理モデルを解くのと同様の方法を用いる。すなわち、この最適化問題の線形計画緩和を最適に解き、それに0-1条件を再度付加して解くことによって、近似的な最適解を得るのである。その際、実行可能スケジュール

の集合 R_v を陽的に全て列挙するのではなく、その部分集合を列生成の手法に基づいて動的に生成するのである。

列生成における限定主問題 (Restricted Master Problem) は、最適化問題(3.3)-(3.7)の線形計画緩和で、集合 R_v をその部分集合 $\tilde{R}_v$ で置き換えたものである。この限定主問題を、(RMP)と表すことにする。(RMP)における(3.4)の制約式に対する双対変数を、 α_i とする。(3.5)の制約式に対する双対変数を、 θ_v とする。これらの変数は実数変数であり、正負の符号の制限はない。制約式(3.4)に α_i をかけて i に関する和をとったものと、制約式(3.5)に θ_v をかけて v に関する和をとったものとの和を目的関数(3.3)に足した問題は、(RMP)の緩和問題となっている。この緩和問題を、(RMP-L)と表す。この(RMP-L)における変数 x_{vr} の係数は、以下のとおりである。

$$-C_{vr} + \sum_{i \in N} Q_{ivr} \alpha_i - \theta_v \quad v \in V, r \in R_v.$$

この係数が正になる変数が見つければ、その変数を(RMP)に新たに加える。そして再度(RMP-L)を解く。これを、係数が正となる変数が見つからなくなるまで繰り返す。係数が正となる変数を見つけるには、全ての変数の係数を陽にチェックするのではなく、「部分問題」とよぶ最適化問題を定義して解くことによって、最も大きな係数をもつ変数を見つけることで陰にチェックする。部分問題は以下のように定義する。

まず、部分問題を定義するために、船舶ごとにネットワークを定義する。このネットワークのノード集合は、需要点 $i \in C$ ごとに定義したノードの集合と、仮想的な始点 s と終点 t からなる集合とする。簡単のため、需要点 $i \in C$ に対応するノードも i と表記することにする。仮想的な始点 s は、計画期間における船舶の初期地点に対応させる。需要点 $i \in C$ に訪問した直後に、需要点 $j \in C$ を訪問する場合、枝 (i, j) を定義する。また、仮想的な始点 s からそれ以外の全てのノード

に対して、及び、各ノードから仮想的な終点 t に対して枝を定義する。始点 s からノード i への枝のコストは、船舶の初期位置から需要点 $i \in C$ への移動コストから、双対変数の値 θ_v を足した値として定義する。また、ノード $i \in C$ からノード $j \in C$ への枝のコストは、需要点 i から需要点 j への移動コストから、需要点 j で荷揚げする製品の量 Q_{jvr} に双対変数の値 α_j にかけたものを引いた値として定義する。また、任意のノードから終点 t へ枝のコストは 0 とする。こうしてネットワークを定義すると、始点 s から終点 t への任意のパス r のコストにマイナスをかけたものが、変数 r の係数となる。したがって、このネットワーク上の最短路問題を解き、その得られた最適値にマイナスをかけたものが負であれば、その対応する最適解を(RMP)に加えればよい。そうして変数を加えたら、(RMP-L)を再度解き、双対変数の値 α_j が更新される。この双対変数の値を用いて、ネットワークの枝のコストを更新する。この手続きを、最短路問題の最適値にマイナスをかけたものが負にならなくなるまで繰り返す。この手続きが終了した後、最適化問題(RMP)の整数条件を元に戻した問題を混合整数計画問題として解く。こうして得られた解が、在庫と船舶スケジュールを同時に最適化する計画を与えるのである。

3.3.2 近似動的最適化の導入

前節の定式化(ShipSche-INV)では、各需要点 $i \in C$ での在庫量 s_i は、その下限 $\underline{S}_i$ と上限 $\overline{S}_i$ の間の値をとることを制約としていた。

この定式化において、在庫量 s_i の値を目的関数の中に取り込むと、在庫量のより細かい計画を行うことができる。そのためには、在庫量 s_i が、次期以降の在庫管理・スケジューリングに及ぼす影響を目的関数に取り込む必要がある。しかし、この影響を陽の形で正確に表すことはできない。そこで、近似動的計画法を適用する。具体的には、在庫量

$s_i, i \in C$ に係数をかけて、需要点全体で足し

合わせた線形関数 $\bar{V}_i^x(S_i^x) = \sum_{i \in C} v_{i,t} s_{i,t}$ を目的

関数に足した問題を、最適化問題として解く。こうすると、在庫量を適正な値に設定するような各需要点への輸送量を実現する船舶スケジュールが得られるようになる。ここで、係数 $v_{i,t}$ の正確な値は知ることができないので、3.2.4節、および3.2.5節で述べたものと同様の手順によって、シミュレーションによって得る評価値を用いることとする。

まとめ

本稿では、在庫管理と船舶スケジューリングの同時最適化モデルの研究について、その背景となる既存研究の分類と手法、および、本研究で新たに開発した、海上輸送に対する在庫管理と船舶スケジューリングの同時最適化モデルについて述べた。在庫管理と船舶スケジューリングにおいては、船舶スケジューリング単独での最適化モデルに比べて、より長期にわたる計画を作成する必要がある。長期にわたるスケジューリングにおいては、解くべき問題のサイズが大きくなる、という点と、気象・海象の影響に起因する船舶航行の不確実性がスケジュールの実行に影響を及ぼす点に対応する必要がある。このための有力な手法が近似動的計画法であるが、国内の海上輸送の分野における適用例はこれまでなかった。本研究では、まず、船舶スケジューリング単独の最適化問題に、近似動的計画法を適用した数理モデルを構築し、それを数値計算によって評価した。さらに、そこでの開発成果を基盤とし、在庫管理と船舶スケジューリングを同時に最適化するモデルを開発し、その近似動的計画法を用いた拡張を提案した。

今後の課題として、最終的に導出した在庫管理・船舶スケジューリングの同時最適化モデルに対して数値計算による性能評価を実施することが挙げられる。また、本研究では近似価値関数を線形関数で近似することを提案しているが、これを、区分的線形な凹関数によって近似する方法も検討する意義があると考えられる。したがって、この区分的線形な凹関数による近似方法を検討することも今後の課題として挙げられる。

参考文献

- 1) 小林和博：配船アルゴリズム，海上技術安全研究所報告，第7巻第4号（2007），pp.73-76
- 2) Christiansen, M., Fagerholt, K., Ronen, D.: Ship routing and scheduling: Status and perspectives, Transportation Science, Vol.38 (2004), pp.1-18
- 3) Ronen, D.: Cargo ships and routing and scheduling: Survey of models and problems, European Journal of Operational Research, Vol.12 (1983), pp.119-126
- 4) 久保幹雄，田村明久，松井知己編集：応用数理計画ハンドブック，朝倉書店，第1版(2002)
- 5) 久保幹雄：サプライ・チェーン最適化ハンドブック，朝倉書店，第1版（2007）
- 6) 久保幹雄：ロジスティクスの数理，朝倉書店，第1版（2007）
- 7) Campbell, A., Clarke, L., Kleywegt, A., Savelsbergh, M.: The inventory routing problem, Technical report, The Logistics Institute (Atlanta), TLI Reports LEC-97-07(1997)
- 8) Cordeau, J.-F., Laporte, G., Savelsbergh, M.W.P., Vigo, D.: Vehicle Routing, Barnhart, C. and Laporte, G. (eds.), Handbook in OR & MS Vol.14(2007), Elsevier
- 9) Campbell, A. M., Savelsbergh, M. W. P.: Efficient insertion heuristics for vehicle routing and scheduling problems, Transportation Science, Vol.38(2004), pp.269-378
- 10) Jaillet, P., Bard, J. F., Huang, L., Dror, M.: Delivery cost approximations for inventory routing problems in a rolling horizon framework, Transportation Science, Vol. 3(2002), pp.292-300
- 11) Dror, M., Ball, M.O.: Inventory/routing: Reduction from an annual to a short period problem, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 34(1987), pp. 891-905
- 12) Fisher, M. L., Greenfield, A., Jaikumar, R., Kedia, P., Real-time scheduling of a bulk delivery fleet: Practical application of Lagrangean relaxation, Technical report(1982), The Wharton School, University of Pennsylvania
- 13) Ball, W., Dalberto, L., Fisher, M. L.,

- Greenfield, A., Jaikumar, R., Kedia, P., Mack, R., Prutzman, P. : Improving the distribution of industrial gases with an on-line computerized routing and scheduling optimizer, *Interfaces*, Vol.13(1983), pp. 4-23
- 14) Campbell, A. M., Savelsbergh, M. W. P. : Delivery volume optimization, *Transportation Science*, Vol.38(2004), pp.210-223
- 15) Powell, W. B. : Approximate Dynamic Programming : Solving the Curses of Dimensionality, Wiley-interscience, 1st edition(2007)
- 16) Kobayashi, K. : A Linear Approximation of the Value Function of an Approximate Dynamic Programming Approach for the Ship Scheduling Problem, *LION4-Lecture Notes in Computer Science (LNCS 6073)* (2010), pp.184-187
- 17) Adelman, D. : Price-directed replenishment of subsets : Methodology and its application to inventory routing, *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol.5(2003), pp.348-371
- 18) Adelman, D. : A price-directed approach to stochastic inventory/routing, *Operations Research*, Vol.52(2004), pp.499-514
- 19) Dror, M., Ball, M. O., Golden, B. L. : A computational comparison of algorithms for the inventory routing problem, *Annals of Operations Research*, Vol.4(1985), pp.3-23
- 20) Dror, M., Ball, M. O. : Inventory/routing: Reduction from an annual to a short period problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol.34(1987), pp.891-905
- 21) Anily, S., Federgruen, A. : One warehouse multiple retailer systems with vehicle routing costs, *Management science*, Vol.36(1990), pp.92-114
- 22) Anily, S., Federgruen, A. : Two-echelon distribution systems with vehicle routing costs and central inventories, *Operations Research*, Vol. 41(1993), pp.37-47
- 23) Gallego, G., Simchi-Levi, D. : On the effectiveness of direct shipping strategy for the one-warehouse multi-retailer r-systems. *Management Science*, Vol.36(1990), pp.240-243
- 24) Bramel, J., Simchi-Levi, D. : A location based heuristic for general routing problems, *Operations Research*, Vol.43(1995), pp.649-660
- 25) Chan, L. M., Federgruen, A., Simchi-Levi, D. : Probabilistic analyses and practical algorithms for inventory-routing models, *Operations Research*, Vol.46(1998), pp.96-106
- 26) Gaur, V., Fisher, M. L. : A periodic inventory routing problem at a supermarket chain, *Operations Research*, Vol.52(2004), pp.813-822
- 27) Federgruen, A., Zipkin, P. : Combined vehicle routing and inventory allocation problems, *Operations Research*, Vol.3(1984), pp.1019-1037
- 28) Webb, I., Larson, R.C. : Period and Phase of Customer Replenishment : A New Approach to the Strategic Inventory/Routing Problem, *European Journal of Operations Research*, Vol.85(1995), pp.132-148
- 29) Larson, R. : Transporting sludge to the 106 mile site: An inventory/routing model for fleet sizing and logistics system design, *Transportation Science*, Vol.22(1988), pp. 186-198
- 30) Bertsekas, D. P., Tsitsiklis, J. : *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific(1996)
- 31) Minkoff, A. : A Markov decision model and decomposition heuristic for dynamic vehicle dispatching, *Operations Research*, Vol.41(1993), pp.77-90
- 32) Kleywegt, A. J., Nori, V., Savelsbergh, M. W. L., The stochastic inventory routing problem with direct deliveries, *Transportation Science*, Vol.36(2002), pp.94-118
- 33) Kleywegt, A. J., Nori, V., Savelsbergh, M. W. L. : Dynamic Programming approximations for a stochastic inventory routing problem, *Transportation Science*, Vol.38(2004), pp.42-70
- 34) 宮本裕一郎, 久保幹雄 : 自動販売機に対する在庫配送計画の事例, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.44(2001), pp. 378-389
- 35) 軽海秀晃, 久保幹雄, 小林和博, 山口氏嗣, 鄭金花 : 鉄鋼業界における船舶スケジューリング, *スケジューリング・シンポジウム 2008* (2008)
- 36) 日本数学会編集 : 岩波数学辞典, 岩波書店, 第4版(2007)