

疲労ホットスポット応力場に対する Williams 応力解 の適用性について — 疲労設計の簡易適用法を目指して —

川野 始^{*}、岡 正義^{*}、吉成 仁志^{*}、平方 勝^{*}
田中 義照^{*}

Fatigue Strength Design Improvement by Applying Williams' Stress Solution and Combining FE Surface Stress to Describe a Hot-Spot Stress Field

by

Hajime KAWANO, Masayoshi OKA, Hitoshi YOSHINARI,
Masaru HIRAKATA and Yoshiteru TANAKA

Abstract

In these days, a common structural code including fatigue strength design has been proposed by international ship society, IACS, and put to practical use in structural design field. And recently designer job has surprisingly changed and advanced by remarkable development of computing abilities such as FEM stress analysis and network environments etc.

However as to fatigue calculation procedures using FEM stress output in direct calculation approach, it remains some critical problems, the author thinks, in sense of theoretical background firmness and accuracy of estimation. Therefore, in order to make fatigue check procedure more closely related to the theory of stresses and to make fatigue design more logical and reliable and more better accuracy in life prediction, the author has proposed adaptation of simplified stress field near a hot spot that brings certain fixed relation between surface stress and crack driving stress. The stress field can be theoretically derived from Williams stress field solution and the relevant constants in the stress distribution equation are determined numerically by nonlinear regression analysis on FEM surface stresses output.

Finally as an application example, some of basic fatigue test specimen and model test results were analyzed and compared with the observed data, and it has confirmed the effectiveness of the proposed procedure in fatigue life prediction.

^{*} 構造系
原稿受付 平成23年10月21日
審査日 平成23年12月15日

目 次

1. まえがき	146
2. 疲労精査法の現状と改良要素	147
2.1 直接 FEM 計算による疲労精査の現状	147
2.2 現行手法の改良要素とその対処	148
3. 構造不連続部の応力場の解析的近似表現とその FEM 出力による回帰分析	149
3.1 二次元弾性論の基礎式と Williams 応力解	149
3.2 板表面 FEM 応力分布を用いた Williams 型応力場への回帰分析	150
3.3 局部応力場回帰式に基づく疲労寿命の推定要領	151
4. 溶接継手への試行適用	151
4.1 横リブ基礎継手のシリーズ FEM 計算例	151
4.2 スチフナ端部の構造モデル(SR219 研究)での FEM 計算例	152
4.3 縦リブ基礎継手における計算例	153
4.4 ホッパーナックル構造モデル(SR245 研究)の応力計算例	154
5. 考察とまとめ	155
参考文献	156
付録 1. Excel シートのソルバー機能による FEM 出力の回帰分析(作業例)	157

1. まえがき

構造安全性要求の高まりや海洋環境保全の社会的要請に应运、基準・ルール分野で大きな変革がなされた。即ち、船体構造の経年劣化対策として、国際海事機関(IMO)では目的指向型の新船構造強度基準(Goal-Based Standard for New Ship)が構築され、船級協会連合(IACS)では国際的な共通構造規則が施行された。

要素技術の進歩・発展という点からは、設計を支えるインフラとして、計算機能力やネットワーク環境の飛躍的充実と共に、技術計算ソフトやその支援環境の発達により、構造設計の担当者は机上パソコン(端末)を介して、「荷重評価→構造応答(応力)→部材安全性判定」の評価チェーンを実践できる環境が得られるようになった。

正確に云えば、設計を支えるエンジニアリング(Computer-Aided Engineering)としての姿形が整い、内容充実化の運用段階にあると思われるが、特に評価チェーン下流においては、現象解明から真の設計ツールへの転換つまり設計現場用とする

為の、一段の改良が求められる現状にある。

即ち、有限要素法(FEM)の利用環境の飛躍的進化は目を見張るものがあり、荷重情報から船体の応力応答を抽出することは、一昔前に比べて格段に高精度でかつ信頼性のある情報予測が簡便に可能となっており、この利得を更に下流側にある部材安全性評価(疲労強度判定など)に波及させてゆくことが設計技術の深化にとって肝要である、と考えられる。強度の直接計算法(direct calculation)とも称され、FEM 応答計算を駆使した精確なシミュレーション計算を実行して、破損・破壊の限界を定量化しようとする狙いであり、CAE 分野の有力アプローチとして知られている。

特に、部材安全性評価の中でも疲労強度を主題にして論ずるならば、梁理論から FEM へと応力計算技術は飛躍的進歩を勝ちえたが、応力から疲労強度へ繋ぐ手法が古い枠組のままであり、寿命推定の質的向上に結実していない、と著者は考える。FEM 応力の特徴と疲労強度に関する従来知見の精緻で巧妙なマッチングが図られているとは言い難く、寿命推定の精度不足やバラツキ或いは理論的裏付けの希薄さに陥っている、と考える。

加えて、共通構造規則など疲労設計に係わるルール等の国際基準化・共通化の趨勢にあつて、疲労強度評価の考え方や手順の black box 化が進み、従来ノウハウが軽んぜられ基礎的な技術の進歩が停滞しかねない点(つまり現行手法の固定化に陥り易い点)も懸念される。

このような状況を踏まえて、本研究は、重点研究「船体構造の経年劣化対策の強化及びこれを踏まえた構造基準の体系化のための研究(H18-H21)」の一環として、疲労設計を主題に現象予測の精度向上と設計現場での評価作業の効率化・簡素化という目標を掲げて、下記項目について、調査研究を行なった(H18-H19 年度実施)。

i. 疲労強度影響因子(平均応力影響、高次振動影響など)評価手法の改良

ii. 疲労強度精査手法の改良

前者の影響因子評価手法の改良については、研究進捗に併せて、資料 1)~3)として既に学会投稿してきた。本報告では、後者を主題におき、応力応答の高精度把握にも拘らず疲労寿命の高精度予測への障害が残っている現状を踏まえて、疲労精査法の改良について以下に報告する。

なお本報告内容は、上記の研究実施の期間を含め、その後の調査や試適用等の追加検討の成果をも含むことを付記する。

2. 疲労精査法の現状と改良要素

船体構造は溶接で接合され、後仕上げをしない (as welded 仕様) で供用するのが通常であり、実船では溶接ビード端の鋭い応力集中が数多く存在する (止端半径ゼロと見做すと、応力集中率 ∞ となる)。一方、応力計算では船体は立体平板モデル (shell 要素) として扱われており、特殊な例を除き、溶接ビードは計算モデルに含めず材料特性 (SN 線図等) にて考慮している。本報告でも、この一般的な状況を大前提として考える。

2.1 直接 FEM 計算による疲労精査の現状

従来からの疲労強度計算法には、大別して、疲労 SN 線図による方法とき裂伝播計算による手法の2つがある (Table 2.1 参照)。

SN線図法 (公称応力法、ホットスポット応力法、がある) ☐ 基本データ: 疲労SN線図、線形損傷則 (マイナー則) を仮定して疲労被害度Dを積算し、限界値と比較判定。 ☐ 簡便に評価を下すことができる。 ☒ FEM出力との接続に厳密さを欠く (FEM出力とSN縦軸の量的関連付けに難)。 ☒ 実船損傷の程度との対応が不明確 (損傷の大きさ情報に難)。	き裂伝播計算法 ☐ 基礎式: き裂伝播速度則 $da/dn = C(\Delta K)^m \rightarrow dn = da / C(\Delta K)^m$ 上式をき裂パス (仮定) に沿って積分し、a (き裂長さ) vs. n (寿命) 線図を得る。 ☐ き裂長さ vs. 繰返し数の関係として出力され、直感的に理解し易い。 ☒ き裂パス上の応力分布推定が手間を要する。
---	---

Table 2.1 Fatigue estimation methods.

前者は、一定繰返し応力における一連の疲労試験結果を集約して得た SN 線図と、有限要素法 (FEM) と長期予測理論により計算される実船部材での遭遇応力 (範囲の頻度分布) を組合せて、線形損傷則 (マイナー則) により損傷の有無を判定する。

後者は、き裂伝播速度則 (Paris 則) を基本式として、周辺境界条件の影響を勘定しながら、数値積分によりき裂寸法と繰返し数 (就航年数) の関係を求める。き裂成長が予想されるパスに沿った応力情報が入力として必要であり、前者より手間と時間が掛かるので、事故解析など限られた場面でのみ使われる。

前者の SN 線図法は、現在の船級ルール (IACS 共通構造規則) にも用いられており、梁理論による応力をベースとする場合 (公称応力法) と、FEM 出力をベースとする場合 (ホットスポット法) がある。公称応力法では、Fig.2.1 のように、継手クラスの種類だけ (応力集中率に対応させた) 疲労 SN 線図が必要となる。

ホットスポット法 (FEM ベース) では、SN 線図は基準のものだけだが、き裂発生点 (ホットスポット) 周りにおける、板表面での FEM 応力から精査

用の応力値を取り出す手続きが理論化できておらず、大きな誤差を生む要因となっている。又、SN 線図法の一つであるので、疲労被害度による損傷発生の判定と実機損傷の量的な対応付けが曖昧、という点にも不十分さが潜んでいる。

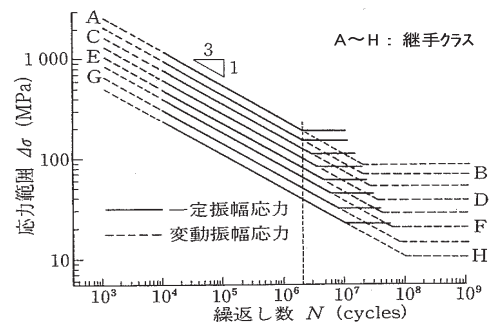


Fig.2.1 Example of fatigue SN diagram.

具体的なホットスポット応力の定義 (FEM 表面応力からの取り出し方) は、幾つか提案され実施されている。例えば、Fig.2.2 に示すものは、バラ積み船 IACS 構造規則で用いられている定義³⁾であり、ホットスポットからの距離が $0.5t$ 及び $1.5t$ (t : 板厚) 位置における板表面の局部応力値から外挿して求める方法である。

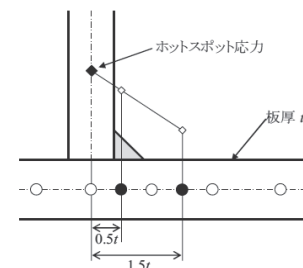


Fig.2.2 Hot spot stress definition³⁾.

また、同じ IACS 構造規則でもタンカー版ルール³⁾では、(2 点外挿でなく) $0.5t$ 位置での値を用いている。この外にも、ホットスポット応力の定義には幾つかあるが、いずれも (内) 外挿により求める応力の理論的根拠 (十分な合理性や理論的裏付け) が必ずしも明確でなく、従って評価結果の誤差が大きく成り得る。これが、一面では高精度化を阻む要因にもなっている。

即ち、構造不連続に伴う高応力値を一定手続きで取り出してはいるが、応力勾配の情報は無視され、応力集中の空間的広がり (初期の発生き裂が急速成長しうる領域の大きさ) は考慮外であり、本質的な力学メカニズムに直結した手続きではない。従って、多種多様な船体部材の応力集中をこの種の単純手法で集約するには無理があり、寿命の推

定精度に難が生じ、大きなバラツキが避けられない。ただ、(船級ルール)の性格上からはメッシュ寸法等に一定の要件を強制することで、極度に不誠実な疲労強度計算を排除できる、という利点は大きいものと推察できる。

これら問題が内在することは認識されているが、これに代わる簡便で実用的な手法がないことも事実であった。しかし、手間やコストを投じても部材強度の実力を知りたいケースに対して、FEM 計算レベルを上げても対応する評価手段がないのは問題であり、或る意味では深刻である。即ち、疲労の全寿命プロセスは、き裂進展経路上の応力分布の全体によって支配されるものであり、表面応力の(内)外挿補間にて理論的裏付けのない高応力を取り出すだけでは、恐らく、疲労現象の極く初期ステージの疲労事象(応力レベル vs. 寿命の関係の経験的事実)しか照合できないし、捉えられない。これを全過程の寿命プロセスと見做せば、恐らく、過度に安全サイドつまり実際よりも著しく短寿命の推定、に陥るものと考えられる。

2.2 現行手法の改良要素とその対処

一定品質の FEM 出力を前提にして(腕力任せの fine mesh FEM 計算は避ける)、現行手法の不具合の改善方法について考えた。その基本の考え方は、次の2点から成る。

- ホットスポット周り応力場を近似的に表現する解析解(境界値問題の理論解)を見出すこと。
- FEM 出力(離散値 $(\sigma_i, x_i), i=1, 2, \dots, k$ 但し、 x_i は距離、 k は応力値の個数)を用いて、a). から導かれる関数 $\sigma = f(x)$ への回帰分析を行い、理論解に含まれる未定定数を決める。

この考え方に従えば、ホットスポット応力場を近似的に表現する理論解が、未定定数を含めて具体的に決まる時、すべての応力成分つまりホットスポット周り板表面応力の分布(→回帰分析の対象成分)だけでなく、例えばき裂伝播パスの垂直方向応力(き裂の driving force)についても同時に定まることを意味する。

き裂伝播パス垂直方向の応力分布が求まれば、前節で触れた破壊力学手法によるき裂伝播計算法により、(き裂長さ)vs.(繰返し数)の関係線図が計算できる。勿論ながら、基礎式 $dn=da/C(\Delta K)^m$ の積分操作が必要であるが、次章で詳述するように、この操作は解析的に(closed form にて)実行可能である。

用いた理論解は、詳細の導出プロセスは次章で述べるが、半無限板を対象にした Fig.2.3 に掲げる境界条件を満たす二次元解として想定した。

この理論解に辿りつく途中段階が資料³⁾に示されているが、半無限板の表面に力が作用する二次元問

題において(楔問題)、自由表面に添って作用する剪断力 T_s とその結果として誘起される表面応力 σ_{xx} の関係が Hilbert 変換の対関数となっている点に着目したものであり、この関係を利用したものである。

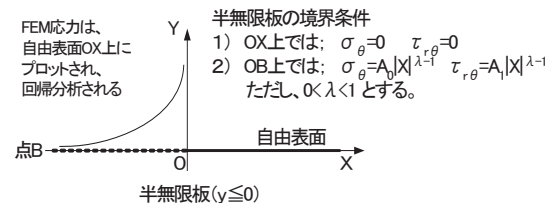


Fig.2.3 Boundary condition for a theoretical stress field simulating hot-spot neighborhood.

即ち、剪断力 T_s 及び表面応力 σ_{xx} がいずれも ν 次のべき関数 X^ν (但し、 X : ホットスポットからの距離、 ν は未定定数であり $-1 < \nu < 0$) である場合の二次元解として想定している。この解は、破壊力学分野で知られている Williams 応力解と密接な関連性があることが、次章での導出過程で示される。

上述してきた処により、上記 b). の回帰分析は、正確には非線形回帰分析であり、 $\alpha X^\nu + \beta$ なる回帰式(β : 遠方一様応力に対応)への curve fitting を意味している。

本考案による改善手法では、まず前提として、Fig.2.4 に示すように、3次元形状下のホットスポットであっても、ホットスポットを含む対称面にて切断し、この面内の二次元問題として近似する。

更に、ホットスポット(Fig.2.4 中の点 O、き裂の発生位置)に隣接して必ず接合物や突起物が存在するが、これら幾何形状が及ぼす影響を、接合面にて切り離された(平滑な)平面上にあって、(接合面を介して)作用する剪断分布力 T_s と垂直分布力 T_n に、簡略化して置き換える。

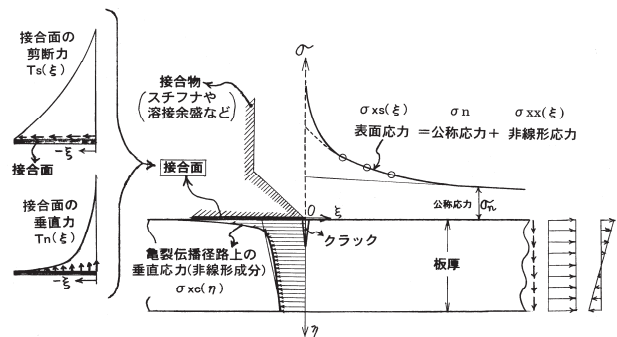


Fig.2.4 Schematic Configurations of relevant stresses to hot-spot.

即ち、ホットスポット周り表面応力の急激な応力上昇(Fig.2.4 中の $\xi \rightarrow 0$ の立上り)は、接合面に作用する分布力によって生ずると捉え、き裂伝播経路(η 軸)上の応力集中についても、同じく接合面分布力により誘起される、と仮定する。

この仮想的な接合面分布力への置き換えにより、任意形状の接合物(付加物や溶接ビードなど)の応力集中問題に対して、Fig.2.3 の境界条件を満たす理論解だけで、半ば汎用的な応力近似解となすことができる(正確には、ホットスポット近傍の応力立上り具合に応じてベキ指数 ν が定まる)、と考えた。

次章では、基本となる理論解を導き出すと共に、この応力表示をき裂伝播計算法と組合せて a vs. N 線図(き裂長ささと寿命[繰返し数]の関係)を求める手順を示し、更に4章では本手法による適用例を示す。

3. 構造不連続部の応力場の解析的近似表現とその FEM 出力による回帰分析

以下に用いる座標系は、Fig.2.3 に示すように、自由表面を x 軸に含む半無限板を想定している。

3.1 二次元弾性論の基礎式と Williams 応力解⁵⁾

二次元弾性論によれば極座標系(r, θ)における応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ は、重調和関数 Φ と調和関数 Ψ を用いて、(3.1)式で表示できる。

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (3.1a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.1b)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad (3.1c)$$

また、歪の適合条件より、(3.2)式が必要である。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \Phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \quad (3.2)$$

さて、上記の式に現われる関数 Φ 及び Ψ を(3.3)式の変数分離型として仮定し、(3.2)式に代入する。

$$\Phi = r^{\lambda+1} F(\lambda, \theta), \quad (3.3a)$$

$$\Psi = r^m G(m, \theta), \quad (3.3b)$$

その結果、(3.4a)式と(3.4b)式の2つの条件式が得られる。

$$m = \lambda - 1, \quad (3.4a)$$

$$(\lambda + 1)^2 F + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = (m + 1) \frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad (3.4b)$$

ここで更に、 $F(\lambda, \theta)$ 、 $G(\lambda, \theta)$ を未定定数 a_i 、 b_i を含む(3.5a)式(3.5b)式で仮定し、(3.4)式に代入して $\sin, \cos$ の係数が夫々等しくなる条件を用いると、(3.6)式が導かれる。

$$F(\lambda, \theta) = b_1 \sin(\lambda + 1)\theta + b_2 \cos(\lambda + 1)\theta + b_3 \sin(\lambda - 1)\theta + b_4 \cos(\lambda - 1)\theta [\equiv f(\theta)], \quad (3.5a)$$

$$G(\lambda, \theta) = a_1 \cos m\theta + a_2 \sin m\theta [\equiv g(\theta)], \quad (3.5b)$$

$$a_1 = -4b_3 / (\lambda - 1), \quad (3.6a)$$

$$a_2 = +4b_4 / (\lambda - 1), \quad (3.6b)$$

以上の結果として、最終的に $b_1 \sim b_4$ の未定定数が残るが、これらは $\theta = \theta_1, \theta_2$ 面における4つの境界条件から定めることになる。

この時、応力を書き下すと次の通りである。

$$\sigma_r = r^{\lambda-1} \left[\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + (\lambda + 1)f(\theta) \right], \quad (3.7a)$$

$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)f(\theta)], \quad (3.7b)$$

$$\tau_{r\theta} = r^{\lambda-1} \left[-\lambda \frac{df(\theta)}{d\theta} \right], \quad (3.7c)$$

以上の(3.1)式～(3.7)式、及び2つの θ 面での境界条件によって求まる応力場を、本報告では「Williams 型応力場」と呼ぶこととする。

以下では、幾つかの境界条件に対する解、つまり Williams 型応力場について説明する。

先ず、本来の Williams 応力解⁵⁾は、 $\theta = 0$ 及び $\theta = \alpha$ が自由表面である場合(扇形開口を有する無限板)を扱っている。

$$[\sigma_\theta]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow b_2 + b_4 = 0 \quad (3.8a)$$

$$[\tau_{r\theta}]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow b_1(\lambda + 1) + b_3(\lambda - 1) = 0 \quad (3.8b)$$

及び、 $[\sigma_\theta]_{\theta=\alpha} = 0$ より(3.8c)式、 $[\tau_{r\theta}]_{\theta=\alpha} = 0$ より(3.8d)式が求まる。

$$b_1 \sin(\lambda+1)\alpha + b_2 \cos(\lambda+1)\alpha + b_3 \sin(\lambda-1)\alpha + b_4 \cos(\lambda-1)\alpha = 0, \quad (3.8c)$$

$$(\lambda+1)\{b_1 \cos(\lambda+1)\alpha - b_2 \sin(\lambda+1)\alpha\} + (\lambda-1)\{b_3 \cos(\lambda-1)\alpha - b_4 \sin(\lambda-1)\alpha\} = 0, \quad (3.8d)$$

ここで、未定定数 $b_1 \sim b_4$ が有意に定まる為に、係数行列式を零とおき、次の特性方程式を与えたのが資料⁵⁾の Williams 解である。

$$\sin(\lambda\alpha) = \pm \lambda \sin \alpha, \quad (3.9)$$

(3.9)式は、無限板中の扇形開口が、開き角 α に応じた特定べき指数による応力特異性を有すること⁶⁾を示しており、破壊力学分野での重要な知見とされている。

次に、前出の Fig.2.3 に示した境界条件を考える。即ち、 $\theta=0$ が自由表面である点は同じであるが、 $\theta=\pi$ では σ_θ と $\tau_{r\theta}$ の分布形が **given** の場合である。

$\theta=0$ の自由表面条件は、前と同じく、(3.8a)式、(3.8b)式で表現される。また、 $[\sigma_\theta]_{\theta=\pi} = r^{\lambda-1}A_0$ とすると(3.10a)式、剪断応力についても $[\tau_{r\theta}]_{\theta=\pi} = r^{\lambda-1}A_1$ とすると(3.10b)式、が得られる。但し、 A_0, A_1 は定数、 λ は 0 以上で 1 未満の正值である。

$$\lambda(\lambda+1)\{b_1 \sin(\lambda+1)\pi + b_2 \cos(\lambda+1)\pi + b_3 \sin(\lambda-1)\pi + b_4 \cos(\lambda-1)\pi\} = A_0, \quad (3.10a)$$

$$-\lambda[(\lambda+1)\{b_1 \cos(\lambda+1)\pi - b_2 \sin(\lambda+1)\pi\} + (\lambda-1)\{b_3 \cos(\lambda-1)\pi - b_4 \sin(\lambda-1)\pi\}] = A_1, \quad (3.10b)$$

つまり未定定数 b_1, b_2, b_3, b_4 は、次式により与えられる。

$$b_1 = \frac{(\lambda-1)}{2\lambda(\lambda+1)\sin\lambda\pi} \cdot A_0 \quad (3.11a)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\lambda\sin\lambda\pi} \cdot A_1 \quad (3.11b)$$

$$b_3 = -\frac{1}{2\lambda\sin\lambda\pi} \cdot A_0 \quad (3.11c)$$

$$b_4 = \frac{1}{2\lambda\sin\lambda\pi} \cdot A_1 \quad (3.11d)$$

従って、(3.11)式を用いると、本境界条件におけ

る応力分布として (3.12) 式が与えられる。

$$\sigma_r = \frac{r^{\lambda-1}}{2\sin\lambda\pi} [-A_0\{(\lambda-1)\sin(\lambda+1)\theta + (3-\lambda)\sin(\lambda-1)\theta\} + A_1\{(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + (3-\lambda)\cos(\lambda-1)\theta\}], \quad (3.12a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r^{\lambda-1}}{2\sin\lambda\pi} [+A_0\{(\lambda-1)\sin(\lambda+1)\theta - (\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta\} + A_1\{(\lambda+1)\{-\cos(\lambda+1)\theta + \cos(\lambda-1)\theta\}], \quad (3.12b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-r^{\lambda-1}}{2\sin\lambda\pi} [+A_0(\lambda-1)\{\cos(\lambda+1)\theta - \cos(\lambda-1)\theta\} + A_1\{(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta - (\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta\}], \quad (3.12c)$$

以上より、自由辺 $\theta=0$ 上の接線方向応力 σ_{xs} は (3.13)式で与えられ、き裂の発生・伝播が生ずる断面を近似的に $\theta=\pi/2$ 断面とすると、き裂面垂直応力 σ_{xc} として(3.14)式が得られる。

$$\sigma_{xs}(r) = [\sigma_r]_{\theta=0} = \frac{2A_1}{\sin\lambda\pi} r^{\lambda-1}, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{xc}(r) = [\sigma_\theta]_{\theta=\pi/2} = \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\lambda\pi} \left\{ \lambda \cos \frac{\lambda\pi}{2} \cdot A_0 + (\lambda+1) \sin \frac{\lambda\pi}{2} \cdot A_1 \right\}, \quad (3.14)$$

上式より、き裂面垂直応力 σ_{xc} には、接合面 $\theta=\pi$ に作用する剪断力分布 A_1 と垂直力分布 A_0 の両方が寄与するが、自由表面応力 σ_{xs} には剪断成分のみ寄与する点が、読み取れる。

3.2 板表面FEM応力分布を用いたWilliams型応力場への回帰分析

ホットスポット周り表面応力 σ_{xs} の特異性を有する項が(3.13)式で与えられるならば、遠方応力を含めた場合の分布として(3.15)式が想定できる。但し、 X はホットスポットからの距離、 m_k ($k=1,2,3$) は未定定数であり回帰分析 (curve fitting)により決定される。

$$\sigma_{xs}(X) = m_1 + m_2 \cdot X + (-\cos^2 m_3), \quad (3.15)$$

上式右辺は X に関するべき乗項を含みいわゆる非線形関数であり、FEM 応力データ (σ_{xs} vs. X) をプロットできても、手計算による最小自乗法の適用では未定定数の抽出はできない。

そこで、市販の汎用アプリ・ソフトか Excel シートを用いて、非線形回帰分析を行う必要がある。例として、Excel シートのソルバー機能を用いた処理について、付録 A1 に示した。

ただ、非線形回帰分析の常として、安定した収

束解を得るためには、初期値の設定(非零の適当値)や回帰式の設定などに若干の試行錯誤や工夫が必要となる。(3.15)式右辺のベキ指数の設定は、この観点からの配慮(ベキ指数の大きさ制約)を加えたものである。

特に、初期値の設定は非常に重要であり、解が安定収束するか否かは偏に初期値(と制約条件)に掛かっている。別の初期値セットから異なる解を得た場合、その優劣は R^2 値(最適化の目的関数)の大小によって判断することになる。

次に、板表面応力 σ_{xs} が(3.15)式として確定したならば、前節(3.13)式(3.14)式で得られた関係を用いて、例えば接合面での剪断力成分が主体である場合、き裂面垂直応力 σ_{xc} が(3.16)式で求められる。

$$\sigma_{xc}(Y) = m_1 + m_2^* \cdot Y^{\wedge}(-\cos^2 m_3), \quad (3.16a)$$

$$m_2^* / \{(\lambda + 1) \sin \frac{\lambda\pi}{2} / \sin \lambda\pi\} = m_2 / (2 / \sin \lambda\pi), \quad (3.16b)$$

なお、一般的に接合面での剪断力成分は必ず存在するが、垂直力分布が大きく関与するケースは、剪断成分と共に作用する場合であって特定の構造負荷様式に限られる、と推察される。

3.3 局部応力場回帰式による疲労寿命の推定要領

2.1 で述べた通り、き裂パスに沿う垂直応力の分布が与えられれば、破壊力学手法(Fracture Mechanics approach)による寿命推定が可能であり、評価の精度の向上が期待できる。

即ち、疲労き裂の伝播速度則として、(3.17)式で示される Paris 則を基本式とする。

$$da / dn = C(\Delta K)^m \quad (3.17)$$

ここで da/dn は一サイクル当りき裂進展長さ、 ΔK は応力拡大係数範囲、および C , m は伝播定数(材料特性値)である。次章では、船体用鋼材を想定して $m=3.0$ $C=2.57E-10$ を用いている。但し、単位系は m :[無次元値]、 C :[(mm/cycle)/(kgf/mm^{1.5})^m] である。

応力拡大係数範囲 ΔK は、単純化するために下記に示すような半無限板の縁き裂に対応する算定式⁷⁾である(3.18)式を想定した。

従って、き裂面垂直応力(3.16a)式に対応して、 ΔK が(3.19)式で表示され、予め式中の積分が実行でき closed form で書き下すことができる。

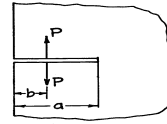


Fig.3.1 Side edge crack with a pair of split forces.

$$K = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \cdot \frac{1.30 - 0.30(b/a)^{1.25}}{\sqrt{1 - (b/a)^2}} \quad (3.18)$$

$$\Delta K = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{\sigma_{xc}(Y) \{1.30 - 0.30(Y/a)^{1.25}\}}{\sqrt{1 - (Y/a)^2}} dY \quad (3.19)$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \{m_1^{**} + m_2^{**} \cdot a^{\wedge}(-\cos^2 m_3)\},$$

$$\text{ここに } m_1^{**} = \frac{m_1 \sqrt{\pi}}{2} \{1.30 \sqrt{\pi} - 0.30 \frac{\Gamma(\frac{2.25}{2})}{\Gamma(\frac{3.25}{2})}\}$$

$$m_2^{**} = \frac{m_2^* \sqrt{\pi}}{2} \{1.30 \frac{\Gamma(\frac{1-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{2-\mu}{2})} - 0.30 \frac{\Gamma(\frac{2.25-\mu}{2})}{\Gamma(\frac{3.25-\mu}{2})}\}$$

$$\mu = \cos^2 m_3, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt : \text{ガンマ関数} \quad (3.20)$$

以上より、(3.19)式を伝播速度則(3.17)式へ代入して、通常行なうき裂伝播計算として数値積分すれば、FEM 表面応力に対応したき裂深さ vs. 繰返し数の関係(a vs. N 線図)が得られる。

又、 aN 線図ではなく疲労寿命の代表値が入用とされる場合も多いと考えられるが、 aN 線図を集約した特定の寿命値としては、例えば、き裂深さ a がフェイス板厚に達した時点の寿命 N_{1t} などが有望と考えられ(次章の適用例で N_{1t} を求める)、その値は aN 線図があれば容易に読み取れる。

なお、通常の疲労き裂伝播の計算においては、初期き裂の設定が重要であり、その値によっては推定寿命が大きく変化する場合がある。しかし、本手法では $a \rightarrow 0$ の時 $\sigma_{xc} \rightarrow \infty$ であって、微小き裂ステージでの ΔK は相対的に大きく、従って初期値 a_0 は寿命推定の結果に影響を与えない(非零の設定は必要)。

4 溶接継手への試行適用

4.1 横リブ基礎継手のシリーズ FEM 計算例

Xiao ら⁸⁾は solid FEM シリーズ計算により、横リブ基礎継手を対象に、板表面応力 σ_{xs} の立上りよりも板厚方向(き裂進展方向)に沿ったき裂面垂直方向応力 σ_{xc} の方がより急速に平坦化すること

を示すと共に、板表面から 1mm 深さ位置の σ_{xc} を代表値としてデータ整理することを提案した。Fig.4.1 は、計算結果として得られた応力分布の一部である。

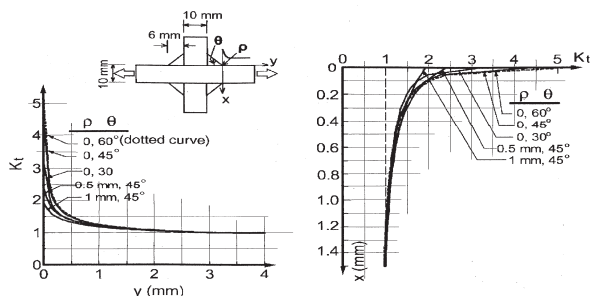


Fig.4.1 Solid FEM series calculation results
by Xiao et.al⁸⁾

この Fig.4.1 を題材にして、止端半径ゼロで余盛角 45 度の場合の結果に対して、3 章の Williams 型応力場が成立しているか調べてみた。

その結果が Fig.4.2 であり、板表面応力 σ_{xs} およびき裂面垂直応力 σ_{xc} データ点を、溶接ビード止端からの距離 X に対してプロットしたものである。また図中には、前述の考え方による回帰分析の結果を実線にて併記している。

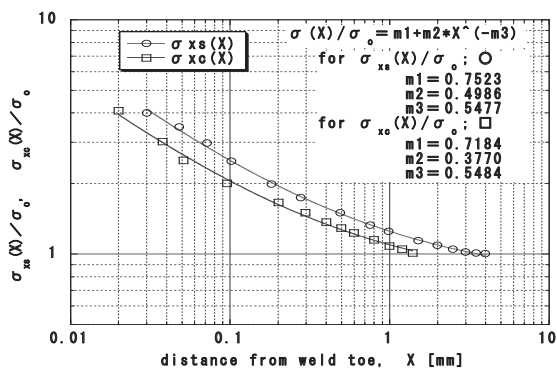


Fig.4.2 Regression curve to Yamada's calculation results.

Fig.4.2 に示すように、回帰式として得られた σ_{xs} 分布と σ_{xc} 分布の X ベキ指数は約 0.548 で一致しており、ピーク値からの減衰には明らかな緩急の違いがあるが (Fig.4.1 参照)、X ベキ指数の強さとしては両者同じ程度であることが確認できた。

また、Fig.4.1 の σ_{xc} 分布は無次元化されているが、定数倍して板厚内で積分すれば遠方応力 σ_0 と釣合う条件を(4.1)式で近似し、応力範囲と代表寿命 N_{1t} の関係を推定してみた。

$$\left(\int_0^t \sigma_{xc}(Y) dY \equiv \int_0^t \{m_1 + m_2^* \cdot Y^\wedge (\lambda - 1)\} dY = t \cdot \sigma_0 \right. \quad (4.1)$$

但し、代表寿命 N_{1t} とは、き裂深さがフェイス板厚に達する寿命として求めている。

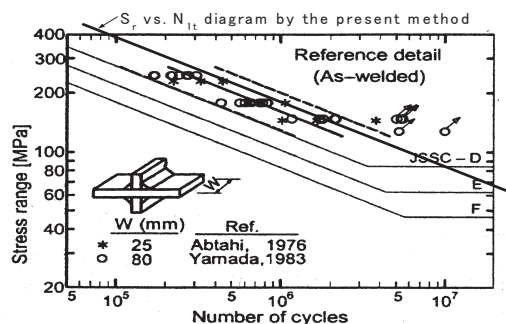


Fig.4.3 Comparison between Yamada's data and present method.

その結果が、原論文から転記した Fig.4.3 中に右下りの太い実線(S_r - N_{It} diagram by present method)として描かれている。同図より、本手法にて得られた S_r vs. N_{It} 関係は、原論文における SN 線図レベルに概ね相当しており、妥当な推定結果を与えていると判断できる。

4.2 スチフナ端部の構造モデル(SR219 研究⁹⁾)での FEM 計算例

構造モデル試験体を用いて疲労試験⁹⁾を実施し、且つ FEM 計算されたデータ¹⁰⁾に対して、ホットスポット周りの応力分布を Williams 型応力場にて近似し疲労寿命を推定してみた。

構造モデルの形状寸法を Fig.4.4 に示す。疲労試験ではスチフナ端部にき裂が観察されたが、そのスチフナ端部周りの FEM 局所応力分布を板要素モデルにより計算した結果が、Fig.4.5 中に示されている。また、同図には、Williams 型応力場への回帰分析の結果も併記している。

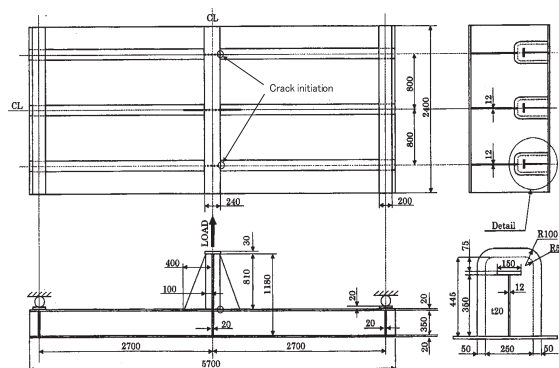


Fig.4.4 Experimental model for fatigue testing.

この回帰分析の結果から、前章の手順に従って、き裂面垂直方向応力 $\sigma_{xc}(Y)$ を求めたところ(4.2)式の値が得られた。

$$\begin{aligned}\sigma_{xc}(Y) &= m_1^* + m_2^* \cdot Y^{\lambda} (-0.4084) \\ m_1^* &= m_1 = 2A_1 / \sin(\lambda\pi) = 60.031 \text{ MPa} \\ m_2^* &= (\lambda + 1)A_1 \sin(\lambda\pi/2) / \sin(\lambda\pi) = 124.08 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (4.2)$$

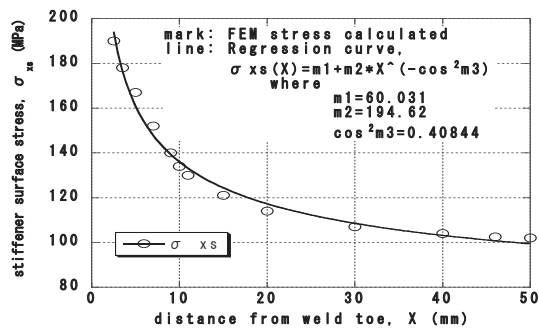


Fig.4.5 FEM stresses data and regression curve.

この $\sigma_{xc}(Y)$ を用いて、疲労き裂の伝播寿命を計算した結果が Fig.4.6 である。同図には、モデル試験で観察された2ヶ所からの疲労き裂(深さ)成長の様子が白抜き印で併記されている。

実験データと推定した a vs. N 線図との対応は、計算寿命がやや大き目ながら、概ね良好な一致を示している。

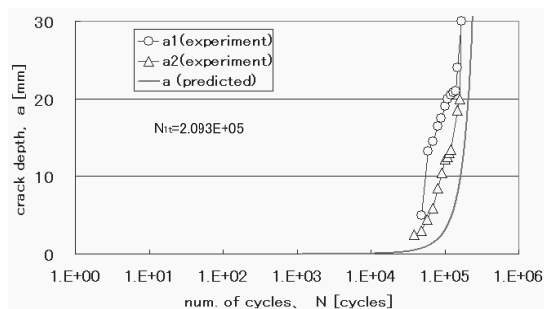


Fig.4.6 Crack depth vs. number of cycles diagram for model test.

4.3 縦リブ基礎継手における計算例¹¹⁾

縦リブ基礎継手を題材にして、提案手法の手順を示すと共に、適用上の制約とその対処方向についても触れる。

対象とした疲労試験片の形状寸法は、Fig.4.7に示す通りである。縦リブが主板上下に対称に隅肉溶接された本タイプの試験片は、実船想定の実験試験として時々用いられている。

本試験片の FEM モデルは、対称性を利用して

1/4 体モデルとし、リブ半厚 6mm に対して辺長 2mm 程度のやや粗いソリッド要素(Nastran の CHEXA, CPENTA, CTETRA)を配した。要素分割状況を Fig.4.8 に示している。また、主板の引張り負荷により生じる、ホットスポット周りの板表面応力 σ_{xs} の計算出力については、Fig.4.9 中に○印で示した。

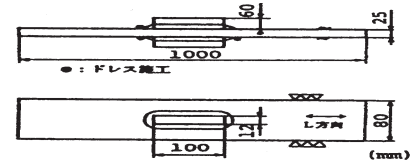


Fig.4.7 Basic welded specimen with longitudinal rib.

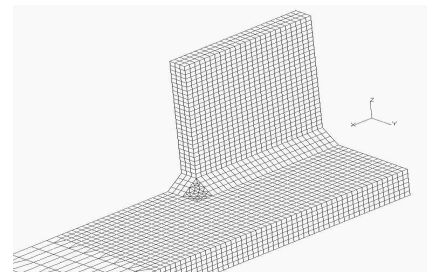


Fig.4.8 Mesh division for basic specimen with longitudinal rib (1/4 symmetric model).

疲労試験は荷重制御として幾つかの荷重レベルで実施されたが、そのうち繰返し公称応力(主板の引張り応力)98MPa の試験片について、疲労試験により得られたき裂成長の結果と提案手法による予測の比較を試みる。

Fig.4.9 中には、FEM 計算結果としての $\sigma_{xs}(X)$ 出力を示すと共に、(3.15)式で与えられる Williams 型応力場への回帰分析の結果を実線および数式(regCve-1)として示している。

この実線(regCve-1)を仮定して、3章で述べた手順によって予測した a vs. N 線図が Fig.4.10 中の実線(regCve-1)で示されている。

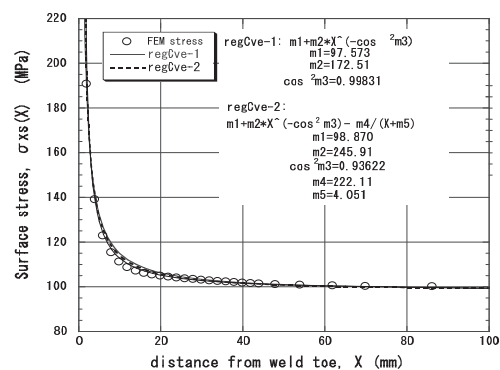


Fig.4.9 FEM surface stress distribution and its regression curve.

Fig.4.10 中の○印は、疲労試験におけるき裂(深さ)成長データであり、疲労試験中に表面のき裂長さと繰返し数の関係を記録しておき、破断後の破面貝殻模様の情報を用いてき裂深さと繰返し数の関係に変換して求められている。

しかし、Fig.4.9 及び Fig.4.10 中の実線で示した提案手法による推定結果(regCve-1)は、求解精度に問題があった。

つまり、(3.15)式を回帰式と仮定して得た定数を、実質的に同じ回帰式 $m_1+m_2 \cdot X^{(-m_3)}$ の初期値として再度計算すると、例えば、ベキ指数が別値に(-0.9983 が-1.250 へ)移り収束解に達していなかった事が判明した。

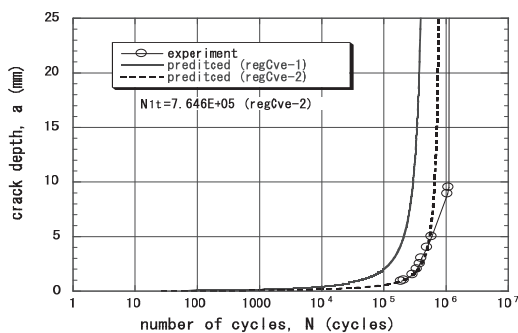


Fig.4.10 Test result of basic welded specimen with longitudinal rib.

この原因は、Fig.4.9 中に記したベキ指数 -0.9983 から推測できるように、3.1 節におけるベキ指数の制約 ($0 < \lambda < 1$ より、応力ベキ指数($\lambda - 1$)は-1 より大きく 0 より小。これ以外では、変位が発散して物理的意味を失う)の限度に近いこと、つまり本構造のホットスポット周り FEM 応力が Williams 型応力場だけの単独では十分正確に表現できない点にあった。

この本質的な理由については、次節で考察を加えるとして、本 FEM 応力点列 ($\sigma_{xs}^{(i)}$, X_i), $i=1,2,\dots$ の特性を、より単純な着力モデルの回帰式を重ね合わせて用いることで改良を図った。つまり、基本境界値問題である Fig.2.3 において、X 軸上の或る一点に集中力(ξ 方向)が作用する場合の回帰式を加算した(4.3)式を仮定して回帰分析を試みた。その結果が、Fig.4.9 中に記した回帰式 regCve-2 で示されており、 $\xi(=m_5)=-4.051\text{mm}$ 位置に着力する集中力(大きさ $m_4=222.11$ で左向き[ホットスポットに圧縮応力が作用])を、追加した回帰式が最適なものと分析した訳である。

$$\sigma_{xs}(X) = m_1 + m_2 \cdot X^{(-\cos^2 m_3)} - m_4 / (X + m_5), \quad (4.3)$$

また、得られた回帰式を用いて 3 章で述べた要領に従って、疲労き裂伝播寿命を求めた結果が Fig.4.10 中の点線である。

この処置つまり(4.3)式の右辺第 3 項の追加により、疲労試験にて観察されたき裂成長の経過 (Fig.4.10 中の○印)は、概ね推定カーブ(点線)により精度良く予測できることが示された。

4.4 ホッパーナックル構造モデル (SR245 研究¹²⁾) の応力計算例

二重殻タンカー構造の内でも最重要の構造部位としてホッパーナックル部が挙げられる。この部位の大型構造モデルを用いた疲労試験が実施されており、対応する FEM 応力計算も行われている¹²⁾。この計算および実験の結果を用いて、提案手法の有効性チェックを試みる。

溶接型ナックル交差部について、ホットスポット近傍の FEM 表面応力 σ_x の計算結果(モデル荷重 $P_{\max}=452\text{kN}$ 時)が Fig.4.11 中の黒丸印で示され、回帰分析の結果が実線カーブで示されている(分析の途中結果を付録 A1 に掲げた)。

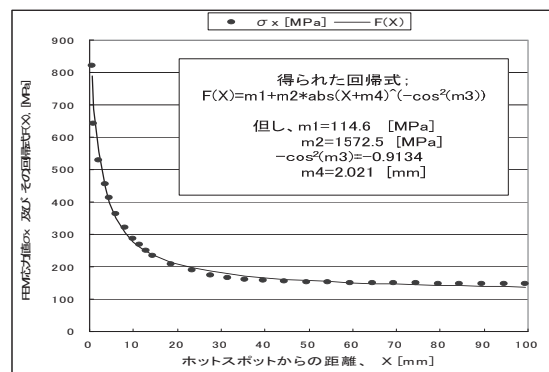


Fig.4.11 FEM stresses data and regression curve.

なお、回帰式として(3.16a)式に忠実に($m_4=0$ を前提に)分析処理したところ、ベキ指数 ν が $-1 < \nu < 0$ なる条件を満足する解が見出せなかった。そこで、実構造で有り得る溶接脚長のバラツキや FEM の出力精度に配慮した近似として、Fig.4.11 中に記載した基点シフト($m_4 > 0$)有りの回帰式を想定した。得られた回帰式の結果から、前章の手順に従って、き裂面垂直方向応力 $\sigma_{xc}(Y)$ を求めたところ(4.4)式の値が得られた。

$$\begin{aligned} \sigma_{xc}(Y) &= m_1^* + m_2^* \cdot Y^{(-0.9134)} \\ m_1^* &= m_1 = 2A_1 / \sin(\lambda\pi) = 114.6 \text{ MPa} \\ m_2^* &= (\lambda + 1)A_1 \sin(\lambda\pi/2) / \sin(\lambda\pi) = 115.9 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.4)$$

この $\sigma_{xc}(Y)$ を用いて、内底板の板厚深さ方向の疲労き裂寸法について、前章に従った伝播寿命を計算した結果を Fig.4.12 に示した。同図には、モデル試験で観察された疲労き裂(深さ)成長の様子が黒丸印で併記されている。

実験データと推定した a vs. N 線図との対応は、推定計算がき裂深さ a の単純な一次元的取扱いながら(実際の表面き裂は概ね半楕円形であり成長に伴いアスペクト比が変化)、寿命レベルで極めて良好な一致を示している。この例でも、本手法の有効性が確かめられた。

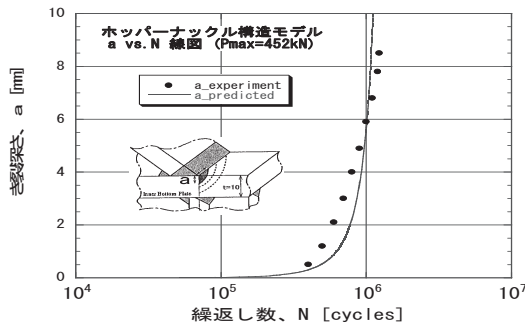


Fig.4.12 Crack depth vs. number of cycles diagram for hopper knuckle model test.

5. 考察とまとめ

疲労ホットスポットの周辺応力を Williams 型応力場で表現することを試み、その有用性を疲労寿命の実験値と計算予測の比較で示した。

但し、4 章で示した計算例では、破壊力学手法による寿命推定はラフなものであり、き裂初期ステージの表面(半楕円)き裂としての追跡、溶接止端からの微小き裂進展方向の(角度)変化追跡、等等精密化しうる点があるが、第一義的な寿命比較に主眼をおき細部効果の取扱いは割愛している。

この大前提のもと、重要と考えられる因子について以下に考察する。

(1) 2次元応力場で近似表現しきれない場合：

4.3 節での縦リブ基礎継手への適用例がこの場合であり、(4.3)式の右辺第3項を追加せざるを得なかった。この本質的な原因は、対象ホットスポットの種類と FEM モデル化の組合せにあるものと推察する。つまり、本手法ではホットスポットを含む対称面にて仮想的に切断した2次元問題を考えるが、縦リブ継手では Fig.5.1 に模式的に示すように、2次元問題と看做しうる領域の厚みが center line 付近だけであり極めて狭い。

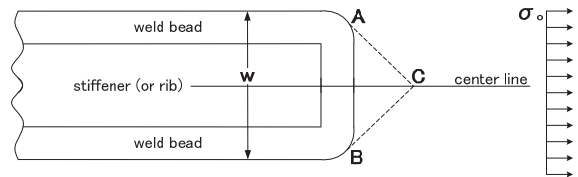


Fig.5.1 Schematic view of hot-spot circumference in plate specimen with longitudinal rib.

つまり、線分 AB 上にホットスポットは存在するが、概念的には、溶接トウに接続する $\triangle ABC$ 領域内は本来の2次元応力場に近いと考えられるが、それより外(右)側の領域では急激な応力の流出・平準化による乱れが生じている。Fig.5.1 中の寸法 w が大きい場合に比べて、外(右)側の領域では、応力分布の裾野が早めに低くなり、短い距離で応力平坦部に達する、という状況にある。

従って、Fig.5.1 中の寸法 w が十分大きくて、表面応力 σ_{xs} の変化領域が $\triangle ABC$ に完全に含まれる場合には(4.1 横リブ基礎継手はこの範疇に相当)、 $-1 < (\text{応力の X ベキ指数}) < 0$ を逸脱することは生じない。が、縦リブ継手端のようなケースで、かつ $\triangle ABC$ 内の局部応力を数点含むような solid element 配置をした FEM 出力の場合には、応力ベキ指数の逸脱が起こり得る、と推察する。

(4.3)式の右辺第3項で表現される、逆向き集中力による効果とは、Fig.5.1 の center line 断面からの急激な応力の流出・平準化を近似的に捉えている可能性が考えられる。従って、この効果を勘定に入れることにより、板表面上の応力分布への fitting が(従って多分、板厚内のき裂パス上における応力分布の fitting も)改善したものと、逆に考えられた。

(2) フェイス板による制限条件：

主板の片面にスチフナ端(ホットスポット)があって反対側はウェブが通る構造は、船体構造に極めて普通に存在し、Radaj ら¹³⁾が Fig.5.2 にて指摘するように、フェイスが恰も半無限板であるかのように疲労き裂先端パターンは成長する。裏面にウェブが存在する場合、組合せ梁としての断面内応力分布は、フェイス材厚さでの急な変化を考えるより、半無限板と捉えた方が実際的であることを示している。

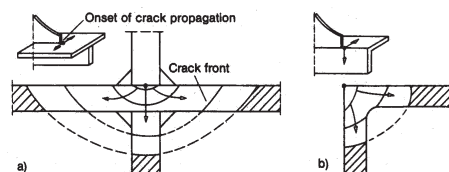


Fig.5.2 Crack propagation observed in hull girders of ships.¹³⁾

但し、4.3 の縦リブ基礎継手試験片では、裏側にウェブ材がなく、主板の表裏面の対称位置に付加物(縦リブ)の端部を有するので、半無限板を前提とした Williams 型応力場で近似するには若干誤差が発生する。しかし、ホットスポットからの距離 X が板厚に相当する位の位置で誤差が最大になり、逆に距離 X : 小なる応力点での誤差は相対的に小さいので、影響はあるものの二次的な程度に留まる。

(3)今後の研究展開について：

多様な(構造部材の)ホットスポットを対象に、局部応力ベキ指数の大小を、応力集中率 K_t では表現しきれない応力勾配指標と捉えて、継手強度分類や構造重要度の分類に関連付ける、などが考えられる。

以上述べてきた通り、構造的応力集中部のホットスポット周り応力場に関して、Williams 応力解をベースにした局部応力分布を解析的に想定することができ、溶接継手への適用例により十分的確な寿命推定となることを示した。
この手法により、FEM 計算結果を用いた疲労強度精査において、基本的な理論付けが可能となり、寿命推定の精度向上を図ることができる。

参考文献

- 1) 川野始：作用応力が重畳する場合の疲労評価基準に関する考察、日本船舶海洋工学会講演会論文集、第 3 号、H18 年 11 月
- 2) 川野始：高次振動が重畳した船体部材の疲労評価基準に関する一考察、日本船舶海洋工学会講演会論文集、第 4 号、H19 年 5 月
- 3) 川野始：船体ホットスポット疲労評価における亀裂面応力分布の簡易推定、日本船舶海洋工学会講演会論文集、第 5E 号、H19 年 11 月
- 4) ClassNK ホームページ共通構造規則(CSR), <http://www.classnk.or.jp/hp/ja/activities/rules/index.html>
- 5) M. L. Williams: Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension, J. Appl. Mech., Vol.24, (1957) p.109-p.114
- 6) 石田誠著：き裂の弾性解析と応力拡大係数、破壊力学と材料強度講座 2、培風館
- 7) Hiroshi Tada et al.: The Stress Analysis of Cracks Handbook – second edition –, Paris Productions Inc., 1985
- 8) Zhi-Gang Xiao, Kentaro Yamada: A method of determining geometric stress for fatigue strength evaluation of steel welded joints, Int. J. of Fatigue 26 (2004) p1277-p1293
- 9) 日本造船研究協会第 219 研究部会、き裂伝播解析手法の実用化に関する研究、総合報告書 1996
- 10) Y. Iwahashi, Y. Sumi et al.: Finite element comparative study of ship structural detail, Marine structures 11 (1998) 127-139.
- 11) Kawano H., Inoue K.: A local approach for the fatigue strength evaluation of ship structures, *Fatigue Design*. ESIS 16, 1993, pp.95-108. 及び、川野始ほか;疲労強度精査における reference 応力に関する一考察、西部造船会会報 第 83 号、平成 3 年 11 月
- 12) 日本造船研究協会第 245 研究部会、二重殻タンカーの船体構造寿命に関する研究、平成 13 年度報告書、平成 14 年 3 月
- 13) D. Radaj and C.M. Sonsino: fatigue assessment of welded joints by local approaches, Abington publishing, 1998

付録 A1. Excel シートのソルバー機能による FEM 出力の回帰分析 (作業例)

例として、本文 4.4 節に示した事例に対して Excel シートのソルバー機能を用いて非線形回帰分析を行った作業例を Fig.A1.1 に示す。但し、ソルバー機能は標準インストールされていないので、資料 A1)などを参考にして予め(作業前に)インストールしておく必要がある。

手順としては、Fig.A1.1 のデータ記入(但し、未定定数 $m_1 \sim m_4$ には適当に初期値を入力)した後、メニューの「ツール/ソルバー/」と選択すると、「ソルバー:パラメータ設定」の小窓が現れる。この小窓に、下記の通り右側を入力し、実行ボタンをクリックすることで、本例の最適化(非線形回帰分析)が実行される。

- ・目的セル; → \$D\$39
- ・目標値; → ○最大値 (を選択する)
- ・変化させるセル; → \$B\$2:\$B\$5
- ・制約条件; → --- (あれば必要に応じて)

参考文献

A1) ホームページ

http://wwweng.uwyo.edu/classes/meref/Curve_fitting.pdf、Curve Fitting: Linear and Nonlinear Least Squares (Physics 1210 Notes, Appendix D)

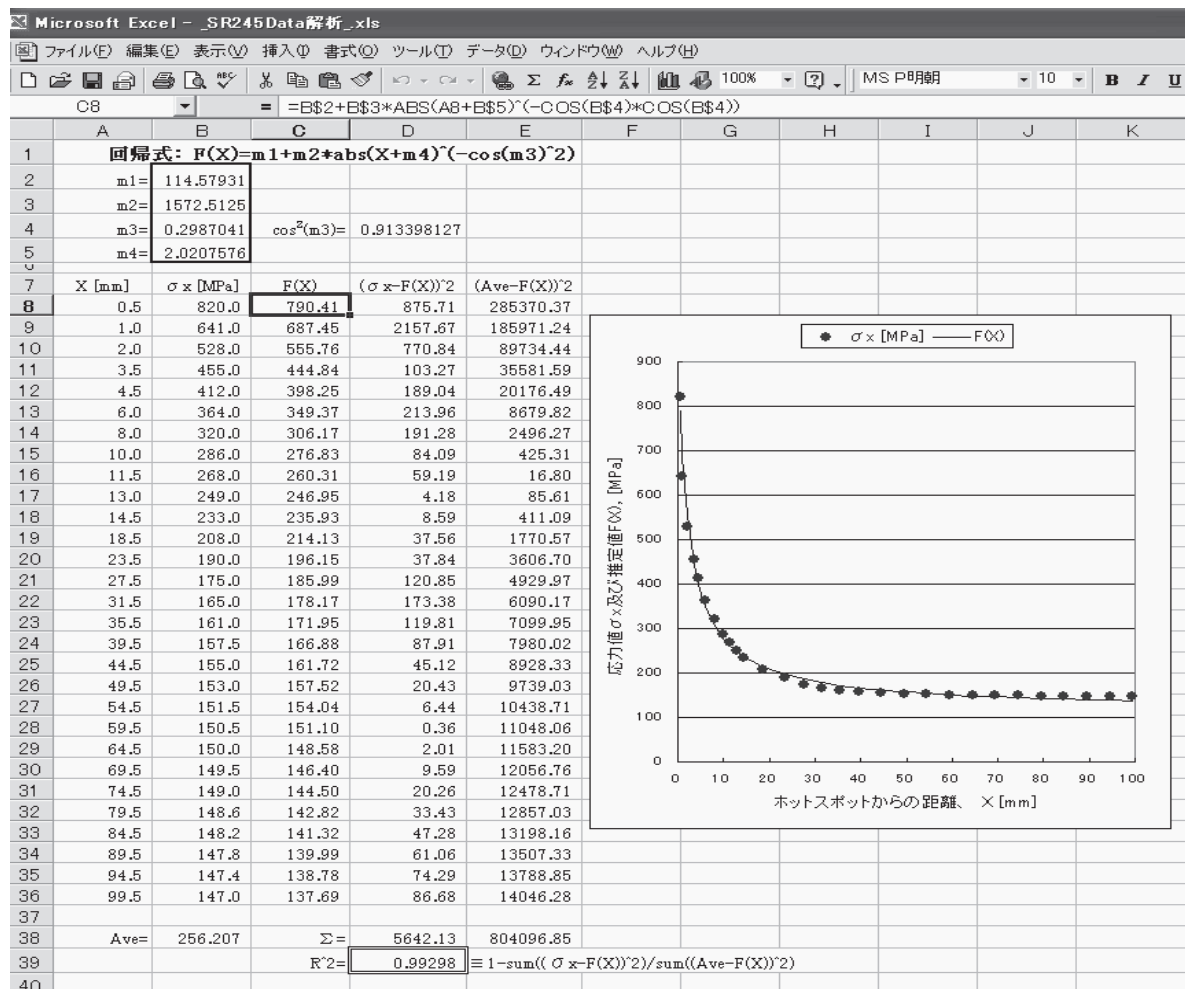


Fig.A1.1 Excel シートのソルバー機能を用いた非線形回帰分析の例