ビデオ画像を用いた 3 次元位置推定方法の開発

金湖富士夫*、池本義範*

Development of 3-Dimensional Position Estimation Method from Video Image

By

Fujio KANEKO, Yoshinori IKEMOTO

Abstract

National Maritime Research Institute(at that time, Ship Research Institute) carried out cooperative research on the examination study of a launching Free Fall Life Boat(abbreviated expression 'FFLB' is used in this paper) into waves with the U.S. Clemson University in 1998 fiscal year. A used water tank was 50m long,8m wide and 4.5m deep with the wave generator, which is belonged to the Ship Dynamics Division, and free fall tests were carried out in the wave of the height 0.3m by using the wave generator with changing position relations with the wave at the entry into the water. National Maritime Research Institute took charge of movement measurement by video cameras. Pictures of the pattern in the free fall were took from 2 direction by using two video cameras, and the pictures were recorded. It is so difficult to determine the position, posture and magnification of video cameras precisely, that the method for estimation of those values were developed in this research.

In this paper the method was explained in detail, and the effectiveness of the method are pointed out by an example and the estimation of 3-dimensional positions of FFLB from 2-dimensional video image.

＊　装備部
原稿受付
審 査 済

目　次

(記号表)

数式の理解の容易さのために、下記に、本報告で使用する記号の主なものの意味を記す。

x_i：基準座標系における点 i の x 座標
y_i：基準座標系における点 i の y 座標
z_i：基準座標系における点 i の z 座標
${}_jX_i^*$：カメラ j のカメラ固定座標系における点 i の x 座標
${}_jY_i^*$：カメラ j のカメラ固定座標系における点 i の y 座標
${}_jZ_i^*$：カメラ j のカメラ固定座標系における点 i の z 座標
${}_jX_i$：カメラ j のカメラ座標系における点 i の x 座標
${}_jZ_i$：カメラ j のカメラ座標系における点 i の z 座標
${}_jO_x^*$：基準座標系におけるカメラ j のレンズ中心の x 座標
${}_jO_y^*$：基準座標系におけるカメラ j のレンズ中心の y 座標
${}_jO_z^*$：基準座標系におけるカメラ j のレンズ中心の z 座標
ϕ_j：X 軸回りのカメラ j の回転角
α_j：Y 軸回りのカメラ j の回転角
θ_j：Z 軸回りのカメラ j の回転角
f_j：カメラ j の焦点距離
C_j：カメラ j のカメラ座標系における倍率
B_j：$C_j \times f_j$
Mx：X 軸まわりの回転マトリクス
My：Y 軸まわりの回転マトリクス
Mz：Z 軸まわりの回転マトリクス

１．はじめに

1998 年度に海上技術安全研究所（当時、船舶技術研究所）は、米国クレムソン大学と自由降下式救命艇（以下、FFLB：Free Fall Life Boat と呼ぶ）模型の波浪中降下試験に関する共同研究を実施した。使用した水槽は運動性能部の動揺試験水槽である。海上技術安全研究所はビデオによる FFLB の運動計測を担当した。ビデオ画像による運動計測の問題点は、計測場が平面でなく、障害物も多くあって、ビデオカメラの位置、姿勢、倍率（以下、カメラパラメータと呼ぶ）が正確に決定することが困難であることである。現在広く用いられているビデオ画像から 3 次元の位置を推定する方法は、カメラパラメータを明に求め、その後それらを用いて座標変換するのではなく、カメラパラメータの関数となる座標変換式（線形となる）の係数を求め、その係数を用いて連立一次方程式の解を求める方式である。その方法は 6 個以上の座標値が判明している点を必要とするが [1),2),3)]、ここで開発した方法は、カメラパラメータを推定する際にカメラの座標値が判明している点は 6 個未満でも良く、また、座標値が不明な点も使用することが可能で適用範囲が広い。また、カメラパラメータが明に推定されるならば、カメラを固定している物体の位置、姿勢を知ることができ、さらに応用範囲が広くなる。本報告では、ビデオ画像内の複数の点からカメラパラメータを逆算し、その後、考慮対象の点の 3 次元座標を推定する方法を開発し、その有効性を、例題と FFLB 模型の運動計測に適用することにより確認したので報告する。

２．カメラ画像の座標値から 3 次元座標値への変換方法

２．１　定式化

２．１．１　カメラパラメータの推定

基準座標系の原点にカメラ j のレンズ中心を置き、光軸方向を y 軸にとる。また、この位置で座標軸をカメラに固定する(この 3 次元の座標系をカメラ固定座標系と呼ぶ)。次に、このカメラを新たな原点 ${}_jO^*$に移動させ、Z 軸周りに θ_j、X 軸回りに ϕ_j、Y 軸周りに α_j だけこの順に回転させ、カメラ固定座標系を回転させると、新たなカメラ固定座標系による点 i の座標は以下のように求められる（Fig.1）。なお、このようにしてカメラを任意の位置、姿勢にすることができる（付録 A 参照）ため、この方法は一般的である。

$$\begin{pmatrix} {}_jX_i \\ {}_jY_i \\ {}_jZ_i \end{pmatrix} = M_Y(\alpha_j) M_X(\phi_j) M_Z(\theta_j) \bullet \begin{pmatrix} x_i - {}_jO_x^* \\ y_i - {}_jO_y^* \\ z_i - {}_jO_z^* \end{pmatrix} \quad \cdots(1)$$

ここで、$M_X(\phi_i)$、$M_Y(\alpha_i)$、$M_Z(\theta_i)$は、それぞれ、X 軸、Y 軸、Z 軸まわりの回転マトリクスであり、以下のように表せる。

$$M_X(\phi_i)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi_i & \sin\phi_i\\ 0 & -\sin\phi_i & \cos\phi_i\end{pmatrix}、$$

$$M_Y(\alpha_i)=\begin{pmatrix}\cos\alpha_i & 0 & -\sin\alpha_i\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha_i & 0 & \cos\alpha_i\end{pmatrix}、$$

$$M_Z(\theta_j)=\begin{pmatrix}\cos\theta_j & \sin\theta_j & 0\\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

したがって、

$$M_Y(\alpha_j)M_X(\phi_j)M_Z(\theta_j)=\begin{pmatrix}\cos\alpha_j\cos\theta_j-\sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j & \cos\alpha_j\sin\theta_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j & -\sin\alpha_j\cos\phi_j\\ -\cos\phi_j\sin\theta_j & \cos\phi_j\cos\theta_j & \sin\phi_j\\ \sin\alpha_j\cos\theta_j+\cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j & \sin\alpha_j\sin\theta_j-\cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j & \cos\alpha_j\cos\phi_j\end{pmatrix} \quad \cdots(2)$$

である。

次に、カメラ画像の二次元の座標系(カメラ座標系と呼ぶ)として、原点を焦点位置（簡単のため実焦点と反対の位置とする）に、X 軸方向を透視変換前のカメラ固定座標系の X 軸、それと垂直に Z 軸方向を透視変換前のカメラ固定座標系の Z 軸にそれぞれ平行に設定する。

$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおき、カメラ座標系で、カメラ画像に映った点の座標をカメラ画像の中心から各軸方向に C_j 倍の倍率で拡大するとした場合の点 i のカメラ j のカメラ座標系における座標(${}_jX_i$, ${}_jZ_i$)は、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix}{}_jX_i\\ {}_jZ_i\end{pmatrix}=C_j\frac{f_j}{{}_jY^*_i}H\bullet M_Y(\alpha_j)M_X(\phi_j)M_Z(\theta_j)\begin{pmatrix}x_i-{}_jO^*_x\\ y_i-{}_jO^*_y\\ z_i-{}_jO^*_z\end{pmatrix}$$

$${}_jY^*_i=-(x_i-{}_jO^*_x)\cos\phi_j\sin\theta_j+(y_i-{}_jO^*_y)\cos\phi_j\cos\theta_j+(z_i-{}_jO^*_z)\sin\phi_j \quad \cdots(3)$$

なお、カメラ固有の歪みや中心のズレが考えられる[2)]が、最近のビデオカメラではそれらが光学的に補正されている、あるいは、歪みが無視できる範囲の画像のみ考慮すると仮定する。したがってカメラ固有のパラメータ(一般に内部パラメータと呼ばれている。これに対し、カメラのレンズ中心位置の基準座標系における座標値および回転角は外部パラメータと呼ばれている)は焦点距離 f_j のみと考える。

ここで、$B_j=C_j\times f_j$ と置き(1)式を展開すると、

$${}_jX_i=\frac{B_j\{(x_i-{}_jO^*_x)(\cos\alpha_j\cos\theta_j-\sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)+(y_i-{}_jO^*_y)(\cos\alpha_j\sin\theta_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)-(z_i-{}_jO^*_z)\sin\alpha_i\cos\phi_j\}}{-(x_i-O^*_x)\cos\phi\sin\theta+(y_i-O^*_y)\cos\phi\cos\theta+(z_i-O^*_z)\sin\phi}$$

$${}_jZ_i=\frac{B_j\{(x_i-{}_jO^*_x)(\sin\alpha_j\cos\theta_j+\cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)+(y_i-{}_jO^*_y)(\sin\alpha_j\sin\theta_j-\cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)+(z_i-{}_jO^*_z)\cos\alpha_j\cos\phi_j\}}{-(x_i-{}_jO^*_x)\cos\phi\sin\theta+(y_i-{}_jO^*_y)\cos\phi\cos\theta+(z_i-{}_jO^*_z)\sin\phi} \quad \cdots(4)$$

既知の値は、カメラ座標系における座標値(${}_jX_i$,${}_jZ_i$)である。ここで考慮しているカメラパラメータ 7 個(${}_jO^*_x$、${}_jO^*_y$、${}_jO^*_z$、θ_j、ϕ_j、α_j、Bj)はカメラ毎に計測して求めることができるが、誤差が混入するため、何らかの方法で校正する必要がある。

なお、カメラ画像をビデオに取り込み、ビデオ信号を画像ボードで解析する場合、解像度を 512×512 とすると、通常、左上隅が(0,0)で、右下隅が(511,511)となる。そこで、(4)式に合わせるために、カメラ j の点 i のビデオ画像の画像ボードによる出力値（画像ボード出力値と呼ぶ）を(${}_jXGB_i$,${}_jZGB_i$)とすると、カメラ画像の座標値(${}_jX_i$,${}_jZ_i$)は以下のようになる。

$$\begin{aligned}{}_jX_i&={}_jXGB_i-255.5\\ {}_jZ_i&=255.5-{}_jZGB_i\end{aligned} \quad \cdots(5)$$

２．１．２　カメラ座標値から基準座標値への変換

カメラパラメータが校正された後に、カメラ画像内の点の基準座標系における 3 次元座標値を求めることになる。そのために、式(1)を逆算する。

Fig.2 に複数台のビデオカメラによる物体の撮影のイメージを示す。

ビデオカメラが複数台ある場合、それらの 1 つにおけるカメラ座標値から基準座標値へは以下のように変換される。

$$\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\\ z_i\end{pmatrix}=M_Z(-\theta_j)M_X(-\phi_j)M_Y(-\alpha_j)\bullet\begin{pmatrix}\dfrac{{}_jY^*_i}{B_j}{}_jX_i\\ {}_jY^*_i\\ \dfrac{{}_jY^*_i}{B_j}{}_jZ_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}{}_jO^*_x\\ {}_jO^*_y\\ {}_jO^*_z\end{pmatrix} \quad \cdots(6)$$

式(6)において、添字 j はカメラ j を表す。

したがって、k 台のカメラで撮影したとすると、1 つの点につき、未知数は、x_i、y_i、z_i、${}_jY^*_i$ (j=1,k)　の(k+3)個であり、方程式は 3k 本あるので、それらから(k+3)個を取り出して x_i、y_i、z_i を求めれば良い。

２．２　カメラパラメータの計算における方程式、および未知数の数

２．１より、基準座標系において 1 つの座標値が判明している点につき、1 つのビデオカメラ毎に、そのビデオ画像より 2 つの式が得られることが分かる。また、基準座標系における座標値が判明していない点からは 2 つの式が得られるが、未知数がさらに 3 つ（その点の座標値）が増加する。したがって、以下の関係が成立する。

・座標値が既知の点・・・n 個
・座標値が未知の点・・・m 個
・位置、姿勢、倍率が未知のカメラ・・・k 台

とすると、

(1)得られる方程式の数：2(n+m)k
(2)未知数の数：3m+7k

したがって、カメラパラメータ(カメラの位置、姿勢および、座標値)が未知の点の座標を求めるためには、n、m、k は以下の式を満足しなければならない。

$$2(n+m)k \geq 3m+7k$$

$$(2n+2m-7)k \geq 3m$$

$m \geq 0$、 $k > 0$ より、

$$2n+2m-7 \geq 0$$

$$k \geq \frac{3m}{2n+2m-7}$$

となる。

(1) $m = 0$　 の場合

$$2n \geq 7$$

$$n \geq 4$$

したがって、この場合は、1 平面内にない 4 個以上の座標が既知の点が画像内にあれば、カメラが何台でもその位置、視線方向、倍率を求めることができる。

(2) $n = 0$　 の場合

$$k \geq \frac{3m}{2m-7}$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{2}{3} - \frac{7}{3m}$$

この式を満たす k で最小な値は 2 であり、その場合の m の最小値は 14 である。この場合、方程式の数は、56 個となる。

２．３　解法

２．３．１　カメラパラメータ

得られた方程式は非線形の方程式であるため求解は困難である。また、ビデオ画像の座標値は量子化されており量子化誤差を伴うため、読取誤差がなくても誤差が混入する。

以上の理由により、ここでは、式(3)の右辺を 0 とする式に変形し、各式の値の 2 乗の総和をとり、それを最小とする変数の値を求める問題に変換し、最適化手法を用いて解くことにする。

最適化手法として Davidon-Fletcher-Powell 法を用いる。

まず、解の範囲を絞り込むため、それぞれの未知数毎に特定の刻みで評価関数を計算し、最小値をもたらす値の組合せを得る。この場合、1 変数当りの刻みの数が少なくても多数の変数になると変数毎の刻みの数の積で評価する式の数が増加するため、ここでは、粗く解の初期値を設定し、それらを用いて、最初に、角度を変化させて設定した刻み幅での角度の最適値を求め、次に、位置および倍率の最適値、最後に位置が未定の点の座標、という順序で、それぞれ評価関数を計算して、それらの組の設定した刻みでの最適値を求めることにする。また、後の手順では、前の手順で求めた変数の値を入れて計算する。これらの後に、得られた値を初期値として Davidon-Fletcher-Powell を適用して評価関数の最小値をもたらす値を求める。

$$ {}_j f_{2i-1} = \frac{B\{(x_i - {}_jO_x^*)(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j) + (y_i - {}_jO_y^*)(\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j) - (z_i - {}_jO_z^*)\sin\alpha_j\cos\phi_j\}}{-(x_i - {}_jO_x^*)\cos\phi_j\sin\theta_j + (y_i - {}_jO_y^*)\cos\phi_j\cos\theta_j + (z_i - {}_jO_z^*)\sin\phi_j} - {}_jX_i $$

$$ {}_j f_{2i} = \frac{B\{(x_i - {}_jO_x^*)(\sin\alpha_j\cos\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi\sin\theta_j) + (y_i - {}_jO_y^*)(\sin\alpha_j\sin\theta_j - \cos\alpha_j\sin\phi\cos\theta_j) + (z_i - {}_jO_z^*)\cos\alpha_j\cos\phi\}}{-(x_i - {}_jO_x^*)\cos\phi_j\sin\theta_j + (y_i - {}_jO_y^*)\cos\phi_j\cos\theta_j + (z_i - {}_jO_z^*)\sin\phi_j} - {}_jZ_i $$

…(7)

とおき、以下の評価関数を評価する。

$$S = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{2n} {}_j f_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{2m} {}_j f_i^{\,2}\right) \qquad \cdots(8)$$

解は、S を最小化する、${}_jO_x^*$、${}_jO_y^*$、${}_jO_z^*$、θj、φj、αj、Bj、xi、yi、zi(j：1～k、i：1～m、n：位置の座標が既知の点の数、m：位置の座標が未知の点の数、k：ビデオカメラの台数)である。Davidon-Fletcher-Powell について、また、その方法で使用する評価関数 S の勾配（∇:gradient）は、付録 B を参照されたい。

２．３．２　カメラ座標値から基準座標値への変換

カメラパラメータが判明すれば、(6)式を使用して点 i の 3 次元座標 x_i、y_i、z_i を求めることができる。その場合、カメラが 2 台をそれぞれ、カメラ 1、カメラ 2 とすると、(6)式で未知数は、${}_1Y_i^*$、${}_2Y_i^*$ の 2 つであり、方程式は 3 本であるため、それらの方程式から 2 つを取り出して求めれば良い。しかし、カメラの諸元が正確に求まったとしても、ビデオ解析結果の ${}_jX_i$、${}_jZ_i$ は量子化誤差を含んで

いるため、(6)の異なる組の方程式から求めた基準座標値は一致しない。すなわち、x と y の式から求めてから z を求める場合、x、y は一致するが、カメラ 1 から得た値と、カメラ 2 から得た値とは一致しない。このような量子化誤差を補償するために、 ${}_{j}X_{i}$、 ${}_{j}Z_{i}$ も未知数として扱うことにする。

このようにすると、未知数の数は 2k 個増加して(3k+3)個となり、不定になってしまうが、以下の評価関数を作り、その最小値をもたらす値を Davidon-Fletcher-Powell 法で求めることにする。Davidon-Fletcher-Powell 法では解が極小値にいたると勾配が 0 となって解は動かなくなるため、初期値の選び方で最終解が決定される。その解の妥当性は検討する必要があるが、初期値としてビデオ画像の値を用いているため、ビデオ画像値からそれほど遠く離れることはないと思われる。

ここでは簡単のためカメラを 2 台（カメラ A、カメラ B）とする。

$$M_Z(-\theta)M_X(-\phi)M_Y(-\alpha)=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\phi\sin\alpha & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\sin\phi\cos\alpha \\ \sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\phi\sin\alpha & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\alpha-\cos\theta\sin\phi\cos\alpha \\ -\cos\phi\sin\alpha & \sin\phi & \cos\phi\cos\alpha \end{pmatrix}$$

…(9)

であり、

$$\begin{pmatrix} a_A & b_A & c_A \\ d_A & e_A & f_A \\ g_A & h_A & i_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta_A\cos\alpha_A-\sin\theta_A\sin\phi_A\sin\alpha_A & -\sin\theta_A\cos\phi_A & \cos\theta_A\sin\alpha_A+\sin\theta_A\sin\phi_A\cos\alpha_A \\ \sin\theta_A\cos\alpha_A+\cos\theta_A\sin\phi_A\sin\alpha_A & \cos\theta_A\cos\phi_A & \sin\theta_A\sin\alpha_A-\cos\theta_A\sin\phi_A c\cos\alpha_A \\ -\cos\phi_A\sin\alpha_A & \sin\phi_A & \cos\phi_A\cos\alpha_A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_B & b_B & c_B \\ d_B & e_B & f_B \\ g_B & h_B & i_B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta_B\cos\alpha_B-\sin\theta_B\sin\phi_B\sin\alpha_B & -\sin\theta_B\cos\phi_B & \cos\theta_B\sin\alpha_B+\sin\theta_B\sin\phi_B\cos\alpha_B \\ \sin\theta_B\cos\alpha_B+\cos\theta_B\sin\phi_B\sin\alpha_B & \cos\theta_B\cos\phi_B & \sin\theta_B\sin\alpha_B-\cos\theta_B\sin\phi_B c\cos\alpha_B \\ -\cos\phi_B\sin\alpha_B & \sin\phi_B & \cos\phi_B\cos\alpha_B \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} a_A & b_A & c_A \\ d_A & e_A & f_A \\ g_A & h_A & i_A \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}X_i \\ {}_{A}Y_i^* \\ \frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}Z_i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} {}_{A}O_x^* \\ {}_{A}O_y^* \\ {}_{A}O_z^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_B & b_B & c_B \\ d_B & e_B & f_B \\ g_B & h_B & i_B \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} \frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}X_i \\ {}_{B}Y_i^* \\ \frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}Z_i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} {}_{B}O_x^* \\ {}_{B}O_y^* \\ {}_{B}O_z^* \end{pmatrix}$$

…(10)

また、

$$f_1=a_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}X_i+b_A\,{}_{A}Y_i^*+c_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}Z_i+{}_{A}O_x^*-\left(a_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}X_i+b_B\,{}_{B}Y_i^*+c_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}Z_i+{}_{B}O_x^*\right)$$
$$f_2=d_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}X_i+e_A\,{}_{A}Y_i^*+f_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}Z+{}_{A}O_y^*-\left(d_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}X_i+e_B\,{}_{B}Y_i^*+f_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}Z_i+{}_{B}O_y^*\right)$$
$$f_3=g_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}X_i+h_A\,{}_{A}Y_i^*+i_A\frac{{}_{A}Y_i^*}{B_A}\,{}_{A}Z+{}_{A}O_z^*-\left(g_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}X_i+h_B\,{}_{B}Y_i^*+i_B\frac{{}_{B}Y_i^*}{B_B}\,{}_{B}Z_i+{}_{B}O_z^*\right)$$

…(11)

とおくと、最小化する評価関数を以下に示す。

$$J=\sum_{i=1}^{3}f_i^2 \qquad \cdots(12)$$

したがって、上式を最小化する ${}_{A}Y_i^*$、${}_{B}Y_i^*$、${}_{A}X_i$、${}_{A}Z_i$、${}_{B}X_i$、 ${}_{B}Z_i$ を求め、その後、 x_i、 y_i、 z_i を式(6)より求める。

２．４　例題

ここでは、点の座標値およびカメラパラメータを予め設定し、式(4)および(5)により画像ボード出力模擬値に変換して、その値を用い、カメラパラメータおよび未知と仮定した点の座標値を求める。なお、座標値が既知の点は 3 点、未知の点は 2 点とし、基準座標系の長さの単位は m と仮定する。

２．２節において、n=3、k=2 の場合の最小の m は 2 であり、この場合の方程式の数は 20、未知数の数も 20 である。

座標値が判明している 3 点は以下の通りである。

・　点１　(0.0,0.0,1.09)
・　点 2　(0.75,0.0,1.09)
・　点 3　(1.5,0.06,1.09)

座標値が判明していないと仮定する 2 点は以下の通りである(Table 1)。

・　点４　(2.06250, 5.75781, 0.96875)
・　点 5　(2.58333, 5.82292, 0.70833)

カメラ A および B のカメラパラメータは Table 1 のとおりである。

２．４．１　カメラパラメータの推定

（１）　画像ボード出力模擬値が有効数字 6 桁の場合

この場合の画像ボード出力模擬値を Table2 に、カメラパラメータ等の推定結果および推定誤差を Table1 に示す。なお、推定誤差として、（１）、（２）とも、カメラ中心座標および未知座標点では、推定値から設定値を引いた値とし(単位：m)、カメラの姿勢は、推定値から設定値を引いた値とする(単位：度)。さらに、倍率の場合は推定値から設定値を引いた値を設定値で除した値とする。

（２）　画像ボード出力模擬値が画素単位の場合（ビデオ画像の読み取りを模擬）

この場合の画像ボード出力模擬値を Table2 に、カメラパラメータ等の推定結果および推定誤差を Table1 に示す。

Table 1 より、（１）、（２）とも推定精度はほぼ同じ程度であり、カメラの中心座標および座標未知点の座標では誤差が 1mm から 8ｃm、カメラの姿勢では誤差が 0.05 度から 0.3 度、倍率では 0.02%～0.8%である。しかし、評価関数(S)の値は、有効数字の桁数が多い（１）の方が二桁程度良いことがわかる。以上より、この方法でカメラパラメータおよび座標未知点の座標はかなり精度良く推定可能であると言って良いように思われる。

２．４．２　点列の３次元座標の推定

Table 1 の値を使用して 3 本の直線状の点列を発生させ、それらの画像ボード出力座標値を計算し、計算された画像ボード出力座標値から、画素単位のデータを模擬した２．４．１（２）のカメラパラメータの推定値を使用して点列の 3 次元座標値を推定した。

Fig.3 および Table 2 には、２．３．２で説明した最適化を施さない場合の A カメラからの推定値を、Fig.4 および Table 3 には、最適化を施した場合の推定値を示す。それらの Table より、元の点との距離がどの点列とも最適化を施した場合はそうでない場合より 1 桁短いことが分かる。単位が m と仮定すると、最適化を施した場合の推定精度は 5mm 程度となる。

この例題は 3 章におけるビデオ画像の読取を想定しているが、対象範囲（降下時の自由降下式救命艇が運動する平面のビデオに映る大きさ）は約 5m が 512 画素に分割されることになるため、1 画素当り 1cm の解像度である。したがって、画素単位で読み取った場合、最適化を施すことにより、画素の半分の精度で推定可能ということになる。

３．自由降下式救命艇模型実験結果への適用

３．１　実験概要

運動性能部の動揺試験水槽の走行台車に降下台を設置し、造波板にて波長 2.25m、波高 0.3m、周期 3.798 秒の波を発生させ、波の進行方向と FFLB 模型の進水方向とのなす角度を 4 種類(0°、45°、135°、180°)、降下角度が 3 種類(20°、30°、40°)、着水時点の波の部分が山および谷の 2 種類、使用した模型が 2 種類の実験を実施した。なお、ここでの解析には Table 4 に示す 8 種類の実験結果を使用した。また、模型が実艇の縮尺模型であって、実験結果の公表は困難であるため、着水までの軌跡のみ使用することにする。

Fig.5 に実験レイアウトを、Fig,6 に実験時に設定したマーカー（座標値が既知の点）を示す。また、Fig.7 に追跡した模型上の点を示す。

Fig.8 に A カメラ、B カメラで撮影した画像の例を示す。

３．２　模型艇の３次元位置の推定

Fig.9 から Fig.16 にかけて、ここで開発された手法により、まず、時刻 0 の時のカメラパラメータを求め、次に、その値を用いて毎フレームの軌跡の値を求める。実験が異なる場合、降下台における滑走、自由落下、進水、浮上等の重要な救命艇の挙動がカメラに収まるようにカメラパラメータの変更を行う場合があるため、実験毎にカメラパラメータを計算した。

求めた実験時の追跡点１の軌跡を示す。各図で(a)、(b)は A カメラ、B カメラによる画像解析結果である。

なお、ここでは、２．４．２の例題の点 1 から点がを座標値が判明している点であり、FFLB の軌跡から取った 2 つの点を座標値が判明していない点として扱った。基準座標系の原点は例題の点 1 である(Fig.6 のマーカー1)。

３．３　考察

Fig.9 から Fig.16 の各 3 面図を波との出会い角毎にまとめて Fig.17、Fig.18 に示す。また、点 1 の直線部分(降下台滑走部分)の軌跡の推定値から、それら直線部分の近似直線を以下のように求める。

まず、座標系を基準座標系から x 軸方向に Ox、Y 軸方向に Oy だけ平行移動して移動後の座標系の座標軸を x'、y'、z'とする、次に移動後の座標系を、Ｚ'軸を中心としてθ回転し、回転後の座標系のｙ"軸を中心としてα回転して得られた座標軸の X 軸が直線部分と最も良く重なるようにする(Fig.19)。この場合、最終的な座標系における軌跡の各点の座標を(X_i,Y_i,Z_i)とすると、以下の評価関数を最小にする(Ox,Oy, θ，α)を求めることに帰着される。

$$J=\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i^2+Z_i^2\right) \qquad \cdots(13)$$

ただし、N は、軌跡の点の数である。また、求解は、Davidon-Fletcher-Powell 法を用いた。

結果を Table5 に示す。

それらの図では、実験 No.34 が他と少し離れているが、他の実験の軌跡はほとんど一致している。

Fig.17、Fig.18、Table5 より、この方法で求めた 3 次元の軌跡は、直線部分をほぼ再現していることがわかり、本方法の有効性を示すものと言えよう。

しかし、軌跡の凹凸がかなり生じている。これは、読取誤差を補償するアルゴリズムを適用しているが、２．３．２で述べたように、このアルゴリズムでは不定の方程式を解くため、2 つのカメラによる推定値の差を最小にするという基準では、量子化誤差を含む読取誤差を完全に補償することはできないことを示している。この問題の解消には、運動体のダイナミクスを入れてカルマンフィルターを使用する等の方法が必要と思われる。

４．他の方法との比較[1)、2)]

基準座標系における位置の座標値が判明している点のみを用いる場合、以下のように、式(3)を変形することにより、カメラの位置、座標、倍率を求めることなしに、カメラ座標値から 3 次元座標値への変換式を作成することができる。なお、ここではカメラは１台のみとし、添字ｊは省略する。

$$M_Y(\alpha)M_X(\phi)M_Z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\phi\sin\theta & \cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\sin\phi\cos\theta & -\sin\alpha\cos\phi\\ -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\\ \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\phi\sin\theta & \sin\alpha\sin\theta-\cos\alpha\sin\phi\cos\theta & \cos\alpha\cos\phi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

とおくと、

$$X_i=\frac{B\{(x_i-O_x^*)a+(y_i-O_y^*)b+(z_i-O_z^*)c\}}{(x_i-O_x^*)d+(y_i-O_y^*)e+(z_i-O_z^*)f}$$

$$X_i=\frac{Bax_i+Bby_i+Bcz_i-BaO_x^*-BbO_y^*-BcO_z^*}{dx_i+ey_i+fz_i-dO_x^*-eO_y^*-fO_z^*}$$

$$X_i=\frac{Bax_i+Bby_i+Bcz_i+j}{dx_i+ey_i+fz_i+k}$$

$$X_idx_i+X_iey_i+X_ifz_i+X_ik=Bax_i+Bby_i+Bcz_i+j$$

$$Z_i=\frac{B\{(x_i-O_x^*)g+(y_i-O_y^*)h+(z_i-O_z^*)i\}}{(x_i-O_x^*)d+(y_i-O_y^*)e+(z_i-O_z^*)f}$$

$$Z_idx_i+Z_iey_i+Z_ifz_i+Z_ik=Bgx_i+Bhy_i+Biz_i+l$$

したがって、

$$\frac{Ba}{k}x_i+\frac{Bb}{k}y_i+\frac{Bc}{k}z_i-\frac{d}{k}X_ix_i-\frac{e}{k}X_iy_i-\frac{f}{k}X_iz_i+\frac{j}{k}=X_i$$

$$\frac{Bg}{k}x_i+\frac{Bh}{k}y_i+\frac{Bi}{k}z_i-\frac{d}{k}Z_ix_i-\frac{e}{k}Z_iy_i-\frac{f}{k}Z_iz_i+\frac{l}{k}=Z_i$$

$$\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -X_1y_1 & -X_1z_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -Z_1x_1 & -Z_1y_1 & -Z_1z_1\\ & & & & & & \Lambda & & & & \\ x_n & y_n & z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_ix_i & -X_iy_i & -X_iz_i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & z_n & 1 & -X_ix_i & -X_iy_i & -X_iz_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{Ba}{k}\\ \frac{Bb}{k}\\ \frac{Bc}{k}\\ \frac{j}{k}\\ \frac{Bg}{k}\\ \frac{Bh}{k}\\ \frac{Bi}{k}\\ \frac{l}{k}\\ \frac{d}{k}\\ \frac{e}{k}\\ \frac{f}{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1\\ Z_1\\ \mathrm{M}\\ X_n\\ X_n\end{pmatrix}\qquad\cdots(14)$$

この式は、未知数が 11 の連立 1 次方程式であり、左辺の係数行列を D、変数ベクトルを X、右辺の定数ベクトルを C とすれば、位置の判明している点が 6 個以上あれば最小 2 乗法で次のように求められる。

$$X=\left(D^tD\right)^{-1}D^tC$$

また、

$$X_i=\frac{\frac{Ba}{k}x_i+\frac{Bb}{k}y_i+\frac{Bc}{k}z_i+\frac{j}{k}}{\frac{d}{k}x_i+\frac{e}{k}y_i+\frac{f}{k}z_i+1}$$

$$Z_i=\frac{\frac{Bg}{k}x_i+\frac{Bh}{k}y_i+\frac{Bi}{k}z_i+\frac{l}{k}}{\frac{d}{k}x_i+\frac{e}{k}y_i+\frac{f}{k}z_i+1}\qquad\cdots(15)$$

であるため、式(14)の解が求まれば、それらを用いて、2 台以上のカメラで撮影した画面上の点の座標値から、3 次元座標を(15)を逆算して求めることができる。あるいは、2 つのカメラを使用するかわりに、1 つのカメラで、物体にスリットからの光を投影し、その光の帯物体上にある光の線上の点を取り、それらの点が平面を成すことからもう 1 つの式を作って求めることを行う。

この方法がこれまで多く用いられており [1), 2)]、カメラパラメータを求めずにカメラ画像内の点の座標から、基準座標系での座標値が計算できる。基準座標系での位置の座標値が判明している点だけを用いるのであれば、式(14)の $\dfrac{Ba}{k}$ 等は、それぞれ 1 つの変数にすれば良い。それらをカメラパラメータと呼ぶことが一般的である。

しかし、基準座標系での位置の座標値が判明している点はわずかで、座標値が判明していない点を使用する必要がある場合は、上記の方程式は非線形となり最小 2 乗法は使用できない。また、カメラの位置、姿勢、倍率という情報を得ることはできない。

したがって、ここで開発した手法は、現在主に用いられている方法をさらに一般化し、得ることのできる情報を十分に発掘できる方法と言える。また、カメラの位置、姿勢がわかれば、カメラを固定している物体（例えば、船舶、航空機、ロボットアーム等）の位置、姿勢を知ることができるため、有効である。

5．おわりに

ビデオ画像内の複数の点からカメラ位置、姿勢、倍率を逆算し、その後、考慮対象の点の 3 次元座標を推定する方法を開発し、その有効性を、例題と自由降下式救命艇模型の運動計測に適用することにより確認した。しかし、量子化誤差を含む読取誤差を完全に補償することは不可能であり、さらに精度良く推定するためには、カルマンフィルター等の運動体のダイナミクスを考慮した方法等の適用が必要と思われる。

また、本方法は、沈没船を潜水艇でビデオ撮影した画像

から、その形を推定する等にも利用可能である。なぜなら、潜水艇の位置が不明でも、複数の位置、方向から沈船を撮影し、各時点でのカメラ位置、姿勢等を逆算して求めることが可能であるからである。同様に、浮かんでいる物体の形の推定にも使用できる。本方法は、カメラパラメータを決定するまで時間がかかるため、リアルタイムの計測には不向きである。カメラパラメータを 1 回決定すればよい場合は、計測点のビデオ画像から 3 次元位置への変換はそれほど時間は要しないため、リアルタイム計測にも応用可能と思われる。

付録 A：任意の位置、姿勢へのカメラの移動について

任意のカメラの位置、姿勢にも、ある位置に置かれているカメラの平行移動→Z 軸回りの回転→X 軸回りの回転→Y 軸回りの回転を行うことにより、カメラを移動させることができる。以下にその理由を述べる。

Fig. 20 のように、ある位置にあるカメラをカメラのレンズ中心位置を、任意に定めた所定の位置、姿勢（所定の位置、姿勢におけるカメラの座標軸を X、Y、Z とする）にあるカメラのレンズ中心位置（O*）に平行移動して重ねた場合のもとのカメラの座標軸を x、y、z とし、Z 軸と Y 軸により定まる平面と x-y 平面との交線まで、z 軸まわりにカメラを回転させ、この角度をθとし、この回転によりできた座標軸を x'、y'、z'(=z)とする。次に、x'軸回りに y'軸が Y 軸と重なるまでカメラを回転させ、この角度をφとし、この回転によりできた座標軸を x"(=x')、y"=(Y)、z" とする。この回転で、x"- z"平面は、X-Z 平面と重なることになる。最後に、y"軸(=Y 軸)回りに、x"軸、z"軸が X 軸、Z 軸と重なるまでカメラを回転させる。以上で、元の位置、姿勢のカメラを任意に定めた所定の位置、姿勢のカメラに重ねることができる。

付録 B：Davidon-Fletcher-Powell 法について [4)]

非線形最適化法の一種で、共役傾斜法と呼ばれ、最急傾斜法を含め種々の傾斜法が存在するが、その中でも収束が速い方法とされている。

最小化すべき関数を F とすると、以下の手続きで解を求める。

(i) $di = -H_{i-1} \bullet \nabla F\left(x^{(i)} + \lambda d_i\right)$ を求める。

(ii)次式を最小にするλi を求める。

$$q_i(\lambda) = F\left(x^{(i)} + \lambda d_i\right)$$

(iii) $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \lambda_i d_i$ とし、

$$y_i = \nabla F\left(x^{(i+1)}\right) - \nabla F\left(x^{(i)}\right)$$

とする。

(iv) $H_i = H_{i-1} + \lambda_i \dfrac{d_i d_i{}^t}{g_i{}^t H_{i-1} g_i} - \dfrac{H_{i-1} y_i y_i{}^t H_{i-1}}{y_i{}^t H_{i-1} y_i}$

を求める。

i=1 の場合、 $H_0 = I$ とし、(i)～(iv)を x が収束するまで繰り返す。

以下に、本方法で用いた評価関数 S の勾配を求める。

（1） 点のカメラ画像の座標値から 3 次元座標値への変換の場合

$$S = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{2n} {}_j f_i{}^2 + \sum_{i=1}^{2m} {}_j f_i{}^2\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{2n} {}_j f_i{}^2 + \sum_{i=1}^{2m} {}_j f_i{}^2\right)}{\partial x}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{2n} 2\,{}_j f_i \frac{\partial\,{}_j f_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^{2m} 2\,{}_j f_i \frac{\partial\,{}_j f_i}{\partial x}\right)$$

である。

ここで、

$$g_x = B_j\left\{\left(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)\left(x_i - {}_jO_x^*\right) + \left(\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)\left(y_i - {}_jO_y^*\right) - \sin\alpha_j\cos\phi_j\left(z_i - {}_jO_z^*\right) - {}_jX_i\right\}$$

$$g_z = B_j\left\{\left(\sin\alpha_j\cos\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)\left(x_i - {}_jO_x^*\right) + \left(\sin\alpha_j\sin\theta_j - \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)\left(y_i - {}_jO_y^*\right) + \cos\alpha_j\cos\phi_j\left(z_i - {}_jO_z^*\right) - {}_jZ_i\right\}$$

とおくと、

$$f = \frac{g}{{}_jY_i^*}$$

よって、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}\,{}_jY_i^* - g\dfrac{\partial\,{}_jY_i^*}{\partial x}}{\left({}_jY_i^*\right)^2}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\,{}_jO_x^*} = -B_j\left(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)、$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\,{}_jO_y^*} = -B_j\left(\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)、$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\,{}_jO_z^*} = B_j\sin\alpha_j\cos\phi_j、$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\theta_j} = B_j\left\{\left(-\cos\alpha_j\sin\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)\left(x_i - {}_jO_x^*\right) + \left(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)\left(y_i - {}_jO_y^*\right)\right\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial \phi_j} = B_j \left\{ -\sin\alpha_j \cos\phi_j \sin\theta_j \left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \sin\alpha_j \cos\phi_j \cos\theta_j \left(y_i - {}_jO_y^* \right) + \sin\alpha_j \sin\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) \right\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial \alpha_j} = B_j \left\{ \left(-\sin\alpha_j \cos\theta_j - \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \left(-\sin\alpha_j \sin\theta_j + \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(y_i - {}_jO_y^* \right) - \cos\alpha_j \cos\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) \right\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial B_j} = \left(\cos\alpha_j \cos\theta_j - \sin\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \left(\cos\alpha_j \sin\theta_j + \sin\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(y_i - {}_jO_y^* \right) - \sin\alpha_j \cos\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) - {}_jX_i$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial {}_jO_x^*} = -B_j \left(\sin\alpha_j \cos\theta_j + \cos\alpha_j \sin\phi_j \sin\theta_j \right) 、$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial {}_jO_y^*} = -B_j \left(\sin\alpha_j \sin\theta_j - \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right) 、$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial {}_jO_z^*} = -B_j \cos\alpha_j \cos\phi_j 、$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial \theta_j} = B_j \left\{ \left(-\sin\alpha_j \sin\theta_j + \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \left(\sin\alpha_j \cos\theta_j + \cos\alpha_j \sin\phi_j \sin\theta_j \right)\left(y_i - {}_jO_y^* \right) \right\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial \phi_j} = B_j \left\{ \cos\alpha_j \cos\phi_j \sin\theta_j \left(x_i - {}_jO_x^* \right) - \sin\alpha_j \cos\phi_j \cos\theta_j \left(y_i - {}_jO_y^* \right) + \sin\alpha_j \sin\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) \right\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial \alpha_j} = B_j \left\{ \left(\cos\alpha_j \cos\theta_j - \sin\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \left(\cos\alpha_j \sin\theta_j + \sin\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(y_i - {}_jO_y^* \right) - \sin\alpha_j \cos\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) \right\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial B_j} = \left(\sin\alpha_j \cos\theta_j + \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(x_i - {}_jO_x^* \right) + \left(\sin\alpha_j \sin\theta_j - \cos\alpha_j \sin\phi_j \cos\theta_j \right)\left(y_i - {}_jO_y^* \right) + \cos\alpha_j \cos\phi_j \left(z_i - {}_jO_z^* \right) - {}_jZ_i$$

$$\frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial {}_jO_x^*} = \cos\phi_j \sin\theta_j 、 \frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial {}_jO_y^*} = -\cos\phi_j \cos\theta_j 、$$

$$\frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial {}_jO_z^*} = -\sin\phi_j$$

$$\frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial \theta} = {}_jO_x^* \cos\phi \cos\theta + {}_jO_y^* \cos\phi \sin\theta 、$$

$$\frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial \phi_j} = -{}_jO_x^* \sin\phi_j \sin\theta_j + {}_jO_y^* \sin\phi_j \cos\theta_j - {}_jO_z^* \cos\phi_j 、$$

$$\frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial \alpha_j} = 0 、 \frac{\partial {}_jY_i^*}{\partial B_j} = 0$$

（２）　点のカメラ座標値から基準座標値への変換

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} 2 f_i \frac{\partial f_i}{\partial x}$$

より、

$$\frac{\partial f_1}{\partial {}_AY_i^*} = \frac{a_A}{B_A}\left({}_AX_i - {}_AO_x^* \right) + b_A + \frac{c_A}{B_A}\left({}_AZ_i - {}_AO_z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial {}_BY_i^*} = \frac{a_B}{B_B}\left({}_BX_i - {}_BO_x^* \right) + b_B + \frac{c_B}{B_B}\left({}_BZ_i - {}_BO_z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial {}_AX_i} = \frac{a_A}{B_A}{}_AY_i^* ,\ \frac{\partial f_1}{\partial {}_BX_i} = -\frac{a_B}{B_B}{}_BY_i^* ,\ \frac{\partial f_1}{\partial {}_AZ_i} = \frac{c_A}{B_A}{}_AY_i^* ,\ \frac{\partial f_1}{\partial {}_BZ_i} = -\frac{c_B}{B_B}{}_BY_i^*$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial {}_AY_i^*} = \frac{d_A}{B_A}\left({}_AX_i - {}_AO_x^* \right) + e_A + \frac{f_A}{B_A}\left({}_AZ_i - {}_AO_Z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial {}_BY_i^*} = \frac{d_B}{B_B}\left({}_BX_i - {}_BO_x^* \right) + e_B + \frac{f_B}{B_B}\left({}_BZ_i - {}_BO_Z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial {}_AX_i} = \frac{d_A}{B_A}{}_AY_i^* ,\ \frac{\partial f_2}{\partial {}_BX_i} = -\frac{d_B}{B_B}{}_BY_i^* ,\ \frac{\partial f_2}{\partial {}_AZ_i} = \frac{f_A}{B_A}{}_AY_i^* ,\ \frac{\partial f_2}{\partial {}_BZ_i} = -\frac{f_B}{B_B}{}_BY_i^*$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial {}_AY_i^*} = \frac{g_A}{B_A}\left({}_AX_i - {}_AO_x^* \right) + h_A + \frac{i_A}{B_A}\left({}_AZ_i - {}_AO_z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial {}_BY_i^*} = \frac{g_B}{B_B}\left({}_BX_i - {}_BO_x^* \right) + h_B + \frac{i_B}{B_B}\left({}_BZ_i - {}_BO_z^* \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial {}_AX_i} = \frac{g_A}{B_A}{}_AY_{p1}^* ,\ \frac{\partial f_3}{\partial {}_BX_i} = -\frac{g_B}{B_B}{}_BY_i^* ,\ \frac{\partial f_3}{\partial {}_AZ_i} = \frac{i_A}{B_A}{}_AY_i^* ,\ \frac{\partial f_3}{\partial {}_BZ_i} = -\frac{i_B}{B_B}{}_BY_i^*$$

その後、同じ式を使って、ｘ、ｙ、ｚを求める。

（参考文献）

１）井口征士、佐藤宏介著：三次元画像計測、昭晃堂、1990
２）徐剛、辻三郎著：3 次元ビジョン、共立出版、1998
３）古結他：画像処理を利用した三次元運動計測システムの開発、三菱重工技報、Vol.35,No.3、1998
４）J.ｺﾜﾘｯｸ他著：非線形最適化問題、培風館、1970

図表リスト（ビデオ画像を用いた3次元位置推定方法の開発）

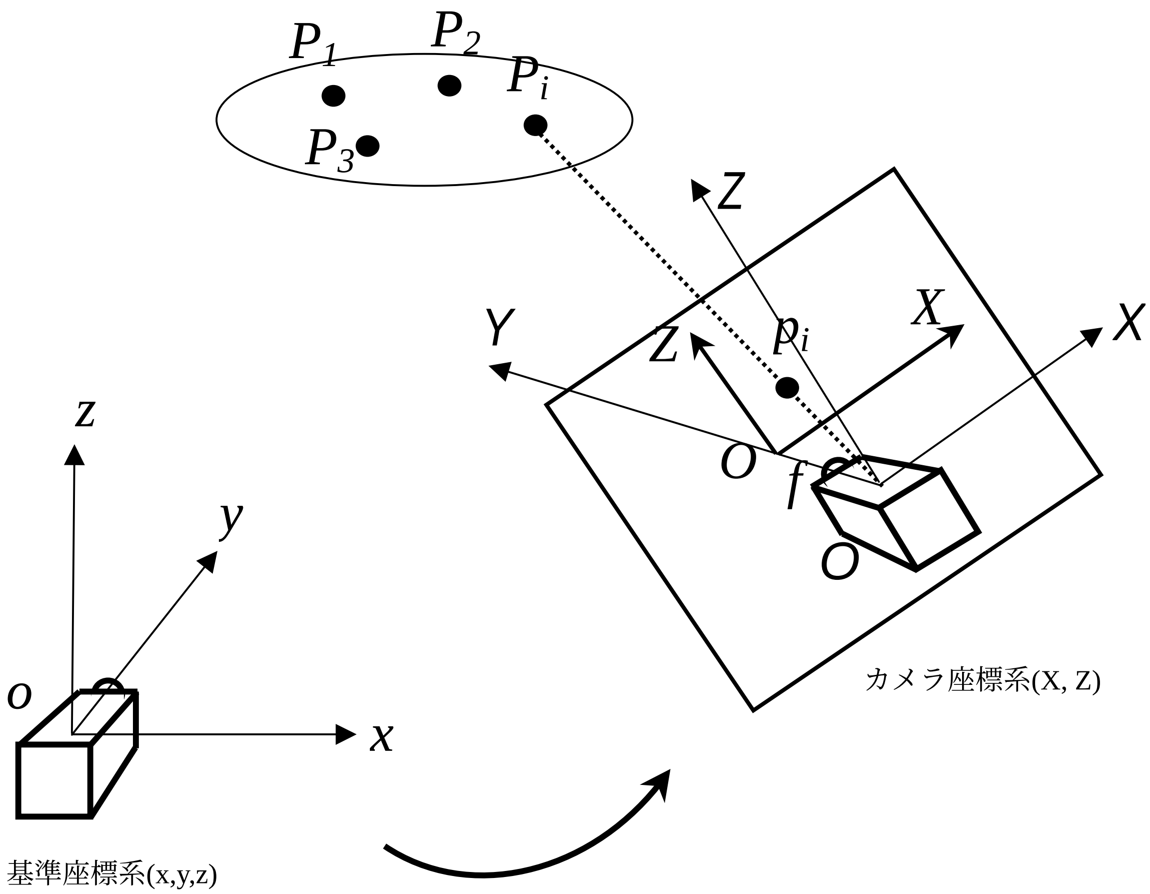


Fig.1 基準座標系とカメラ座標系

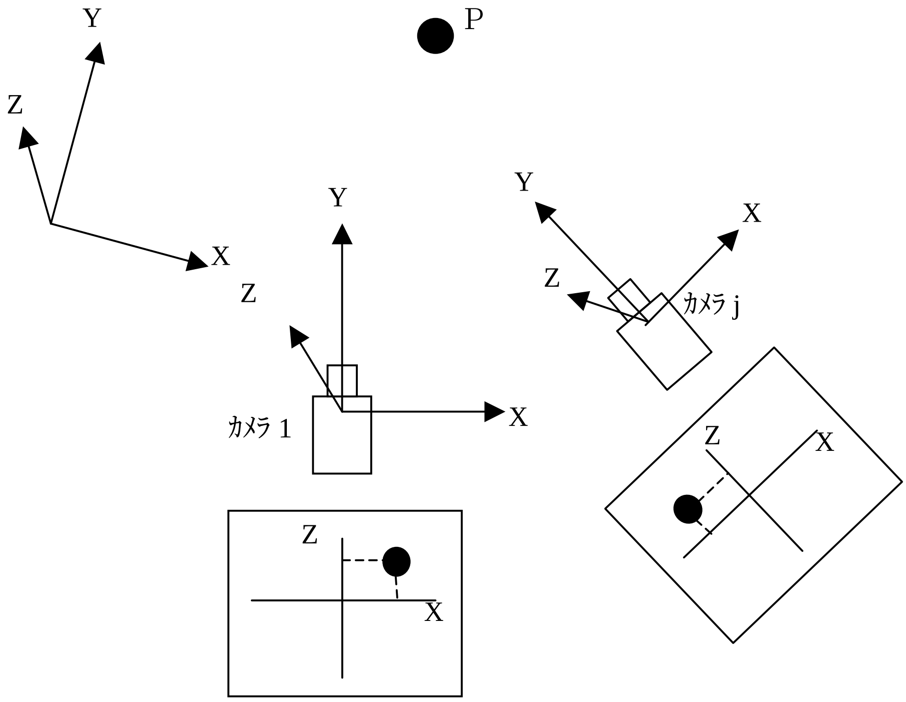
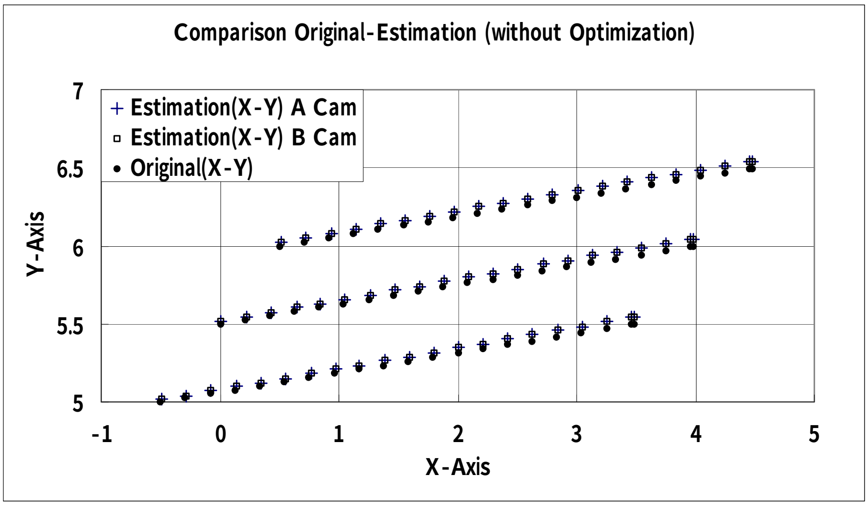
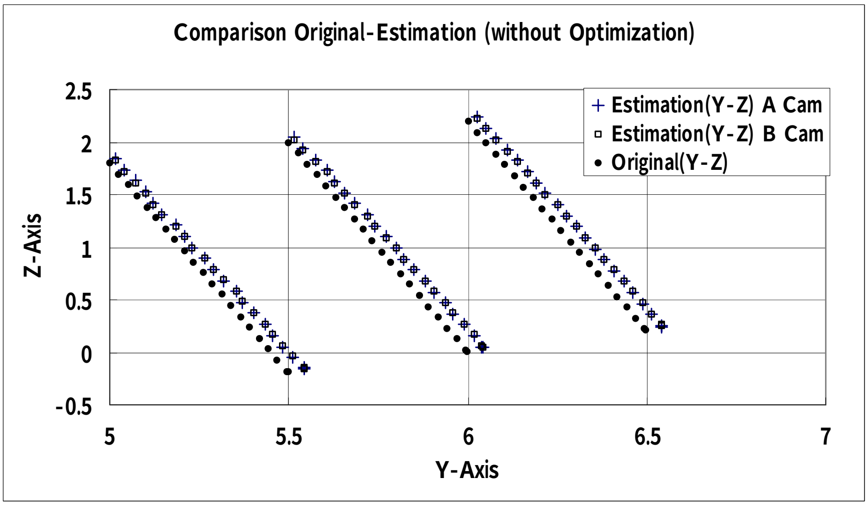


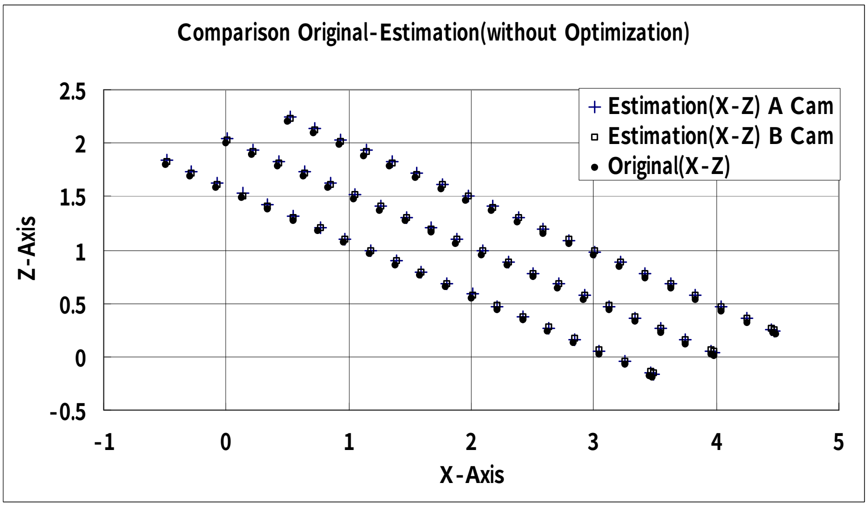
Fig.2　複数台のカメラによる計測



(a) X-Y 平面への投影

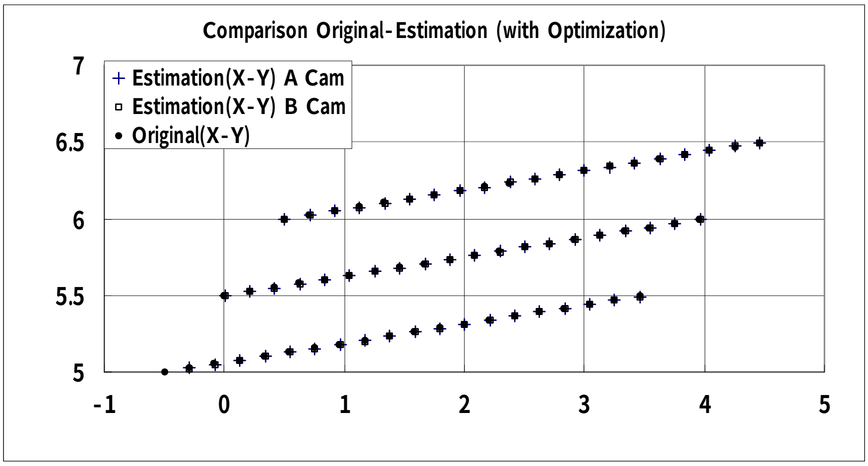


(b) Y-Z 平面への投影

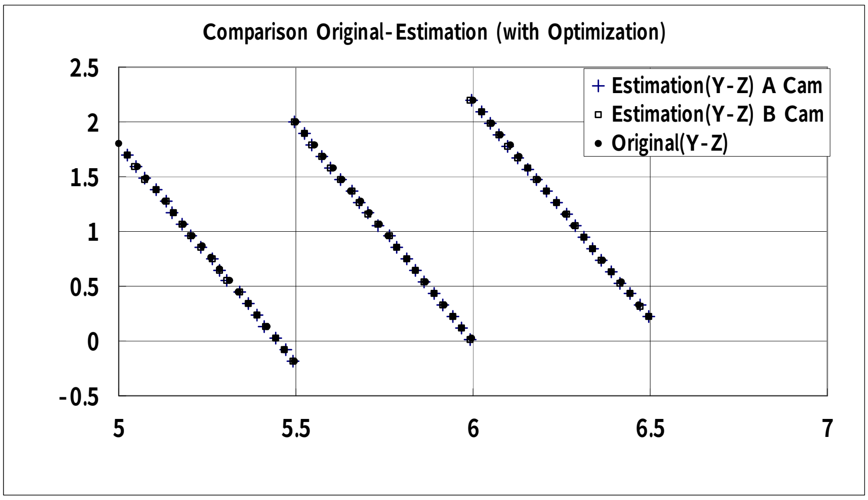


(c) X-Z 平面への投影

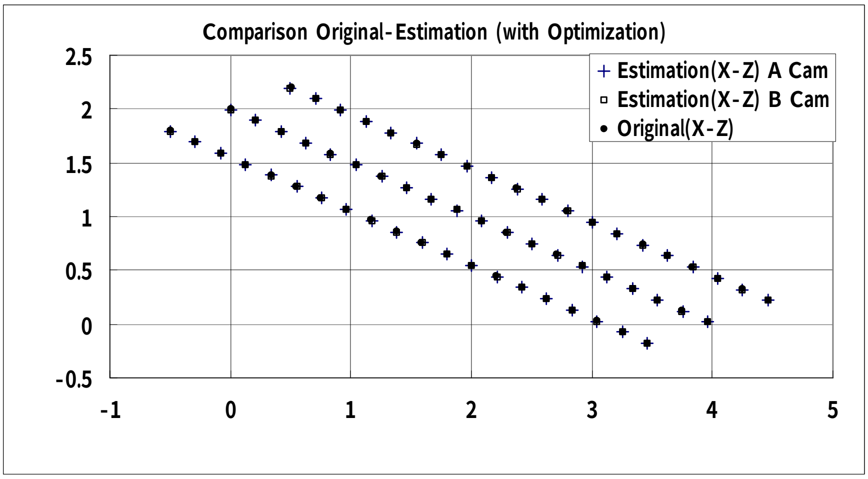
Fig.3　3 次元位置推定結果（例題、量子化誤差補償なし）



(a) X-Y 平面への投影



(b) Y-Z 平面への投影



(c) X-Z 平面への投影

Fig.4　3 次元の位置推定結果（例題、量子化誤差補償あり）

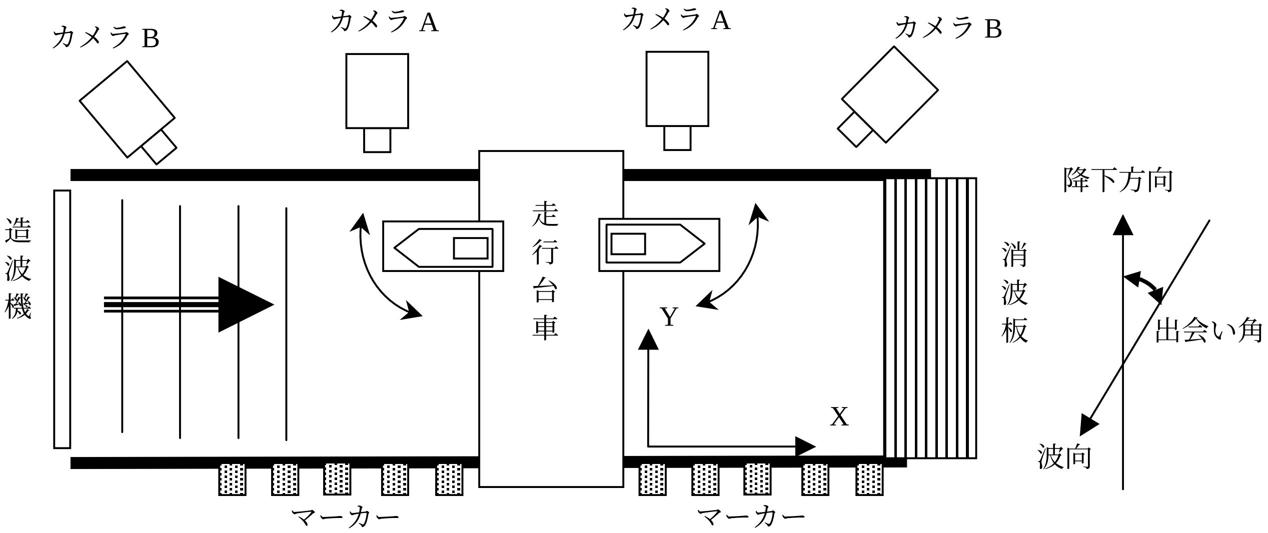


Fig. 5　実験レイアウト

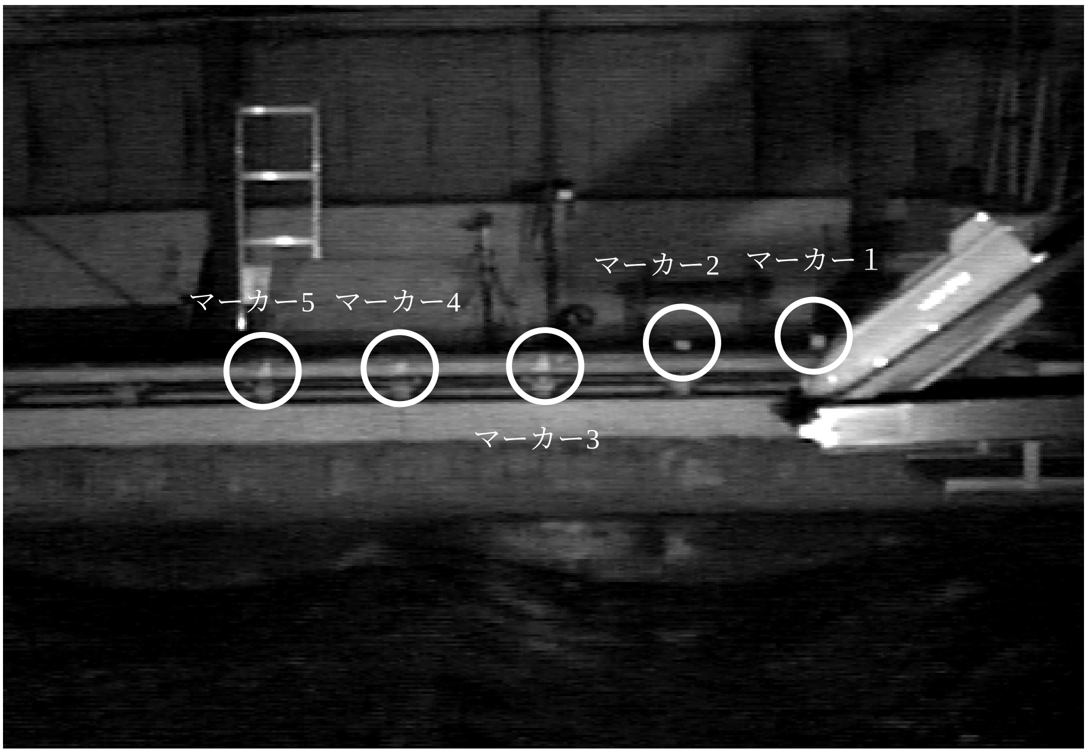


Fig. 6　降下台およびマーカー(座標既知点)

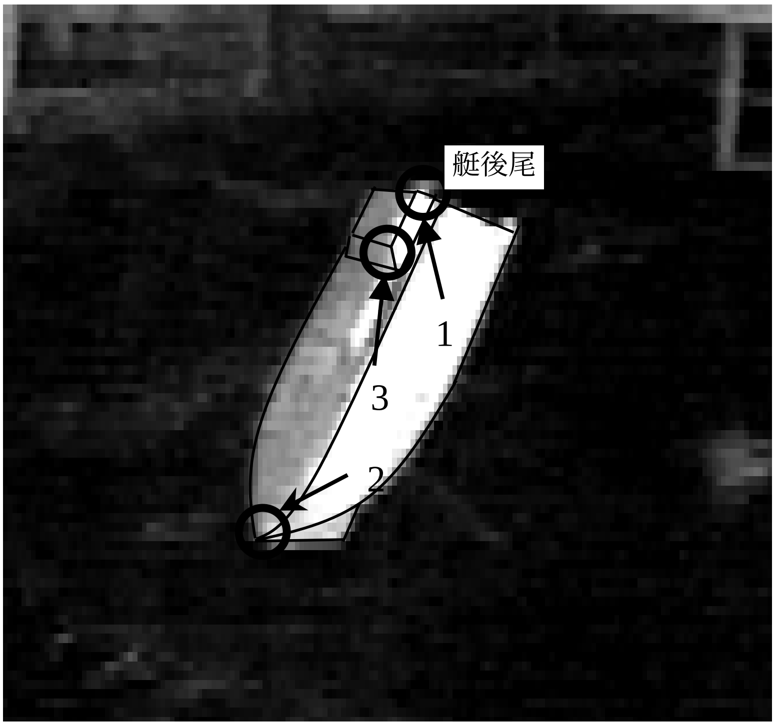
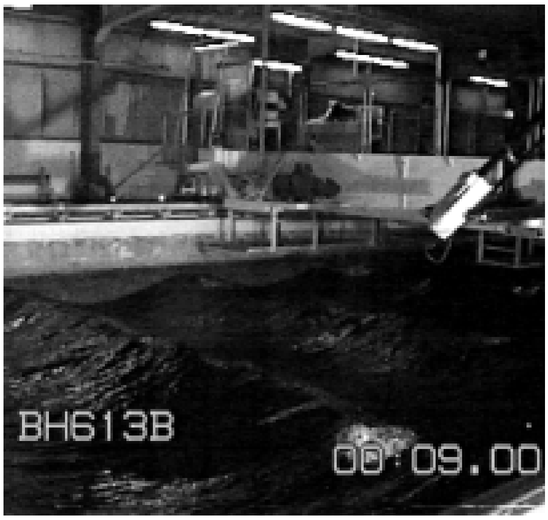


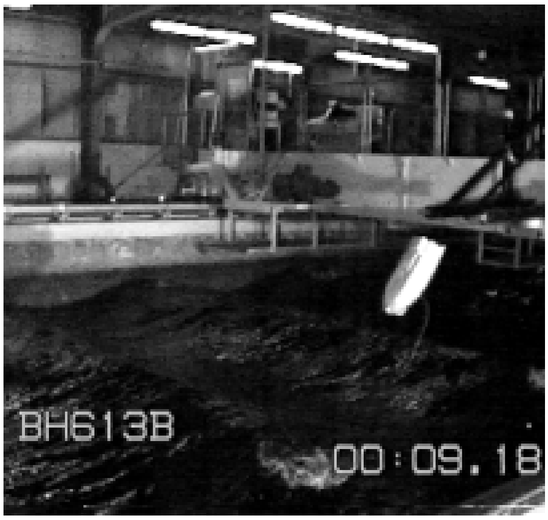
Fig.7　追跡点

(a1) 降下台滑走中（A カメラ）



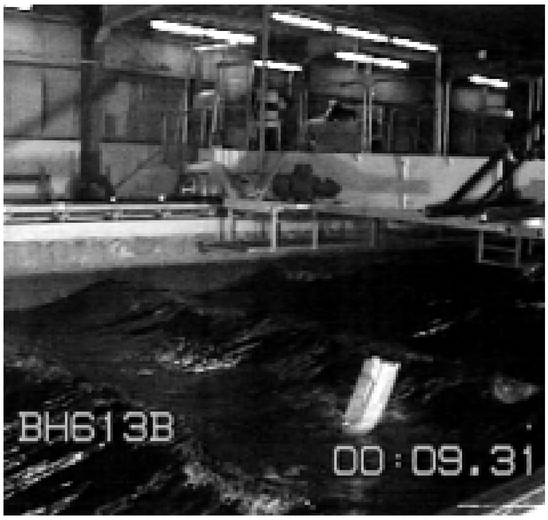
(b1) 降下台滑走中（B カメラ）

(a2) 自由落下中（A カメラ）



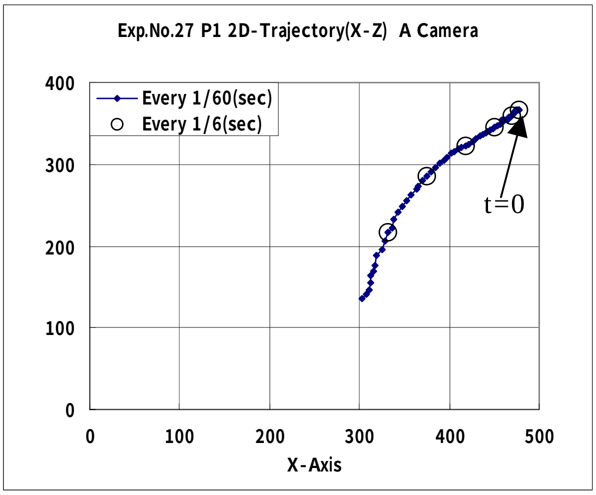
(b2) 自由落下中（B カメラ）

(a3) 着水時点（A カメラ）

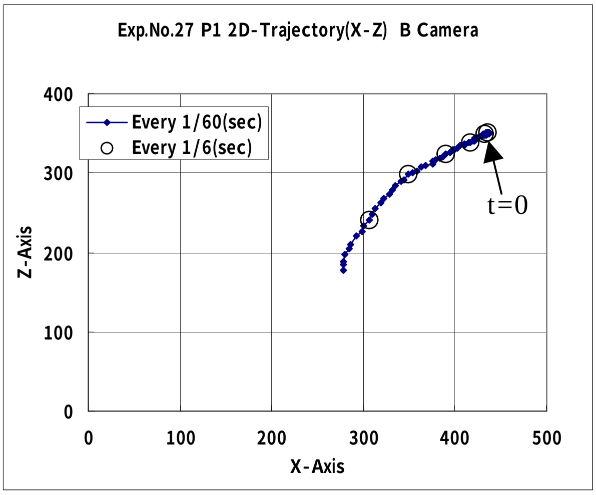


(b3) 着水時点（B カメラ）

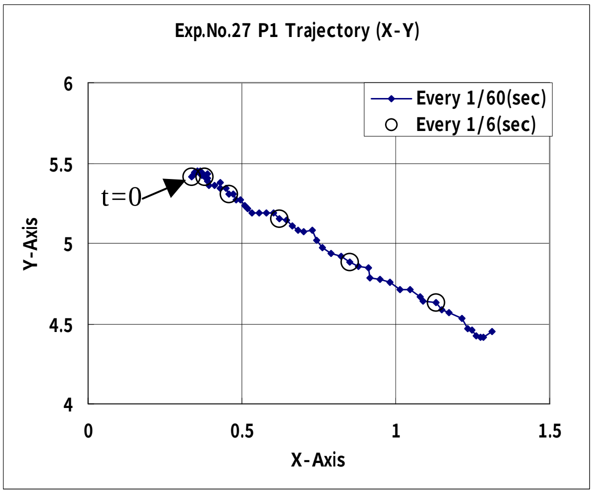
Fig.8 FFLB 降下実験ビデオ計測例（Exp.No.33, 出会い角：0deg, 降下角：30deg, 着水地点：波底）



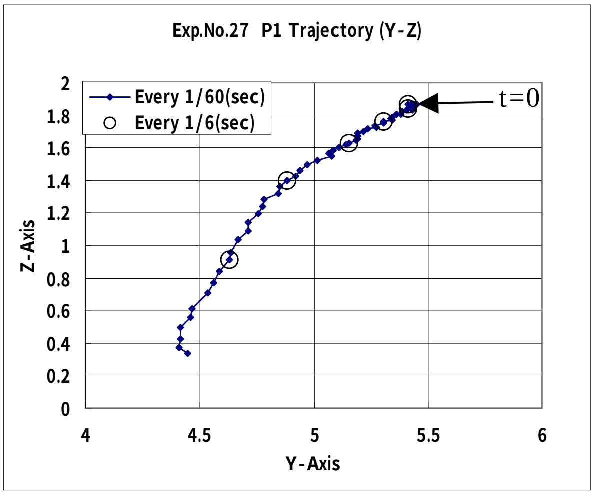
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



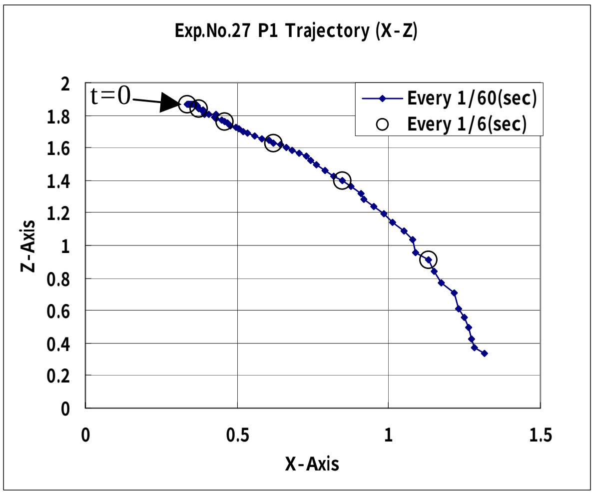
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

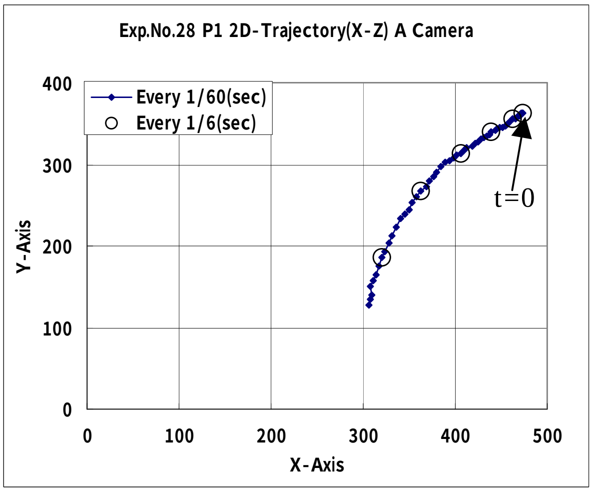


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

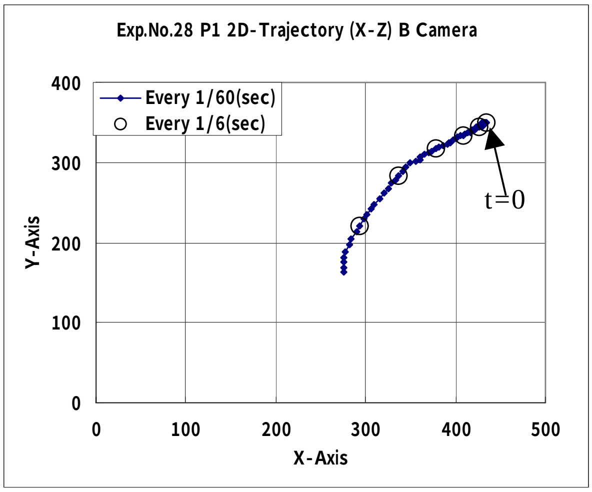


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

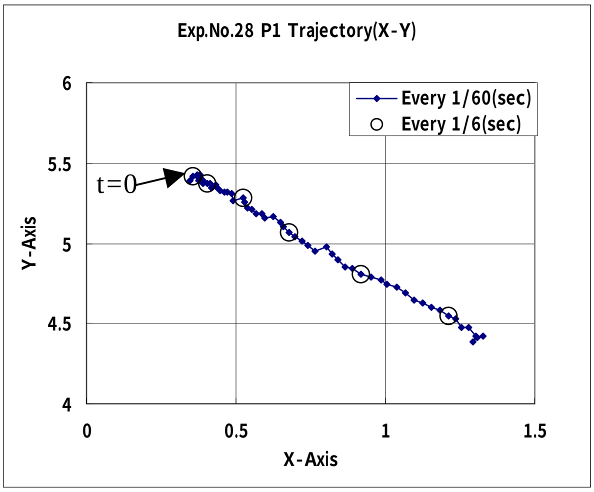
Fig.9 実験 No.27(出会い角：45deg, 降下角：30deg, 着水地点：波頂)ビデオ解析および位置推定結果



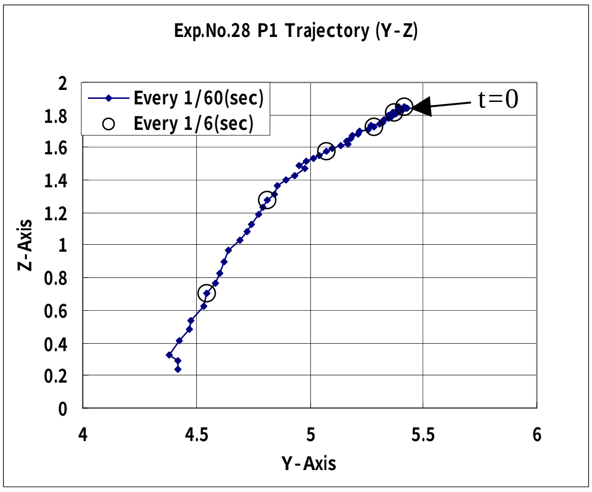
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



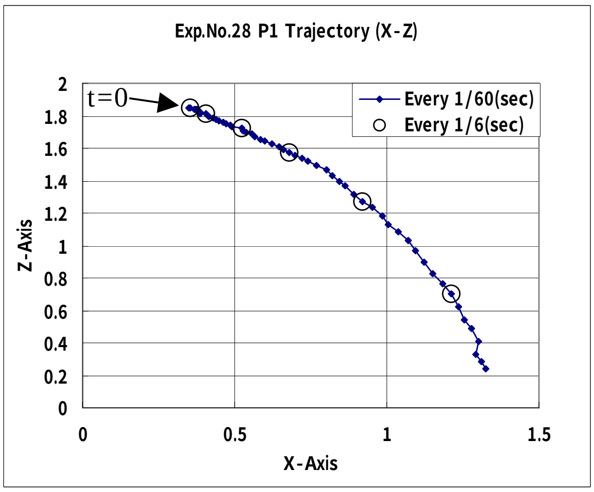
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

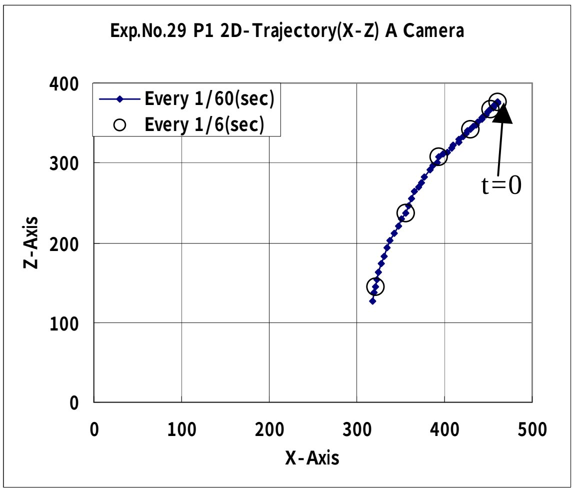


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

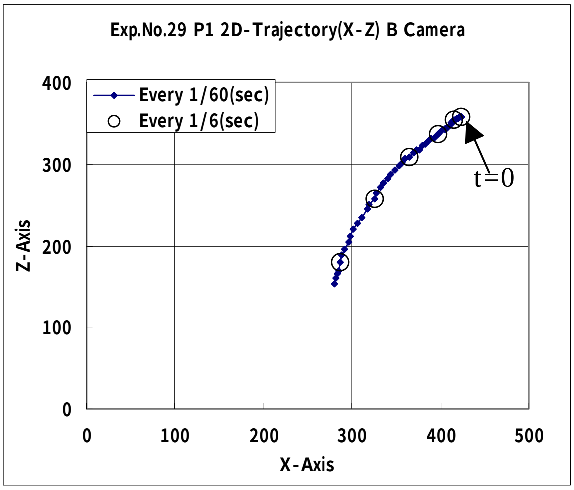


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

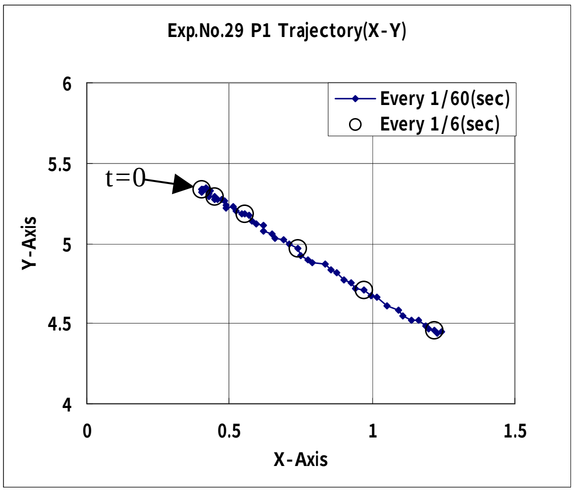
Fig.10 実験 No.28(出会い角：45deg，降下角：30deg，着水地点：波底)ビデオ解析および位置推定結果



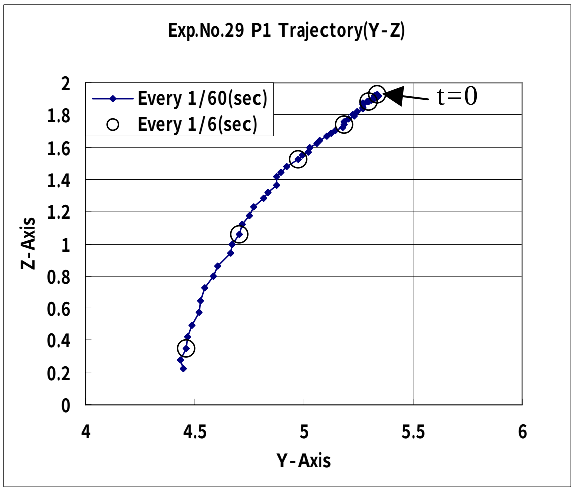
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



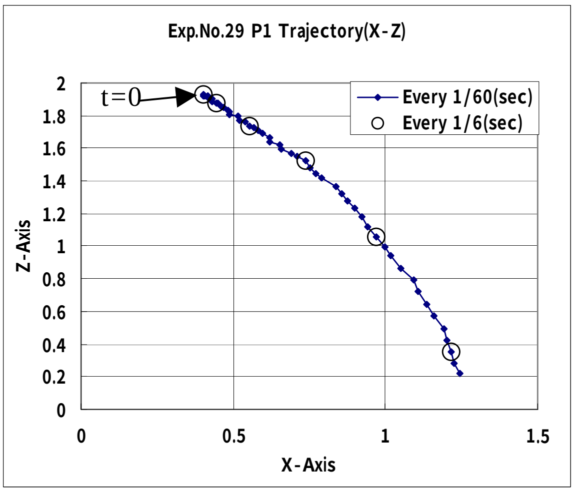
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

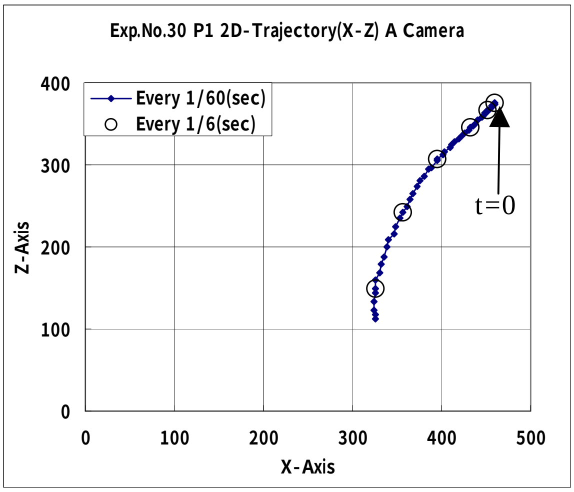


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

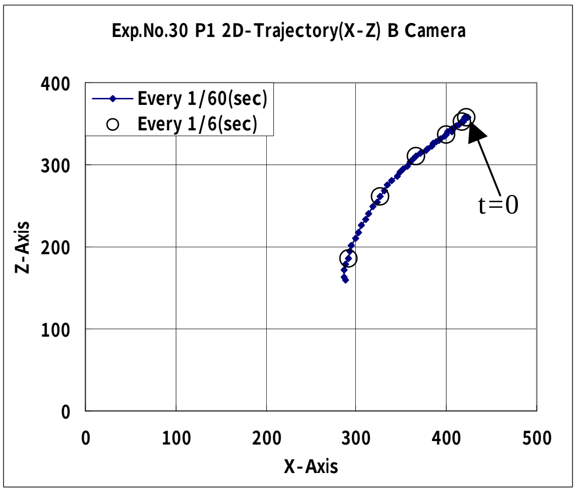


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

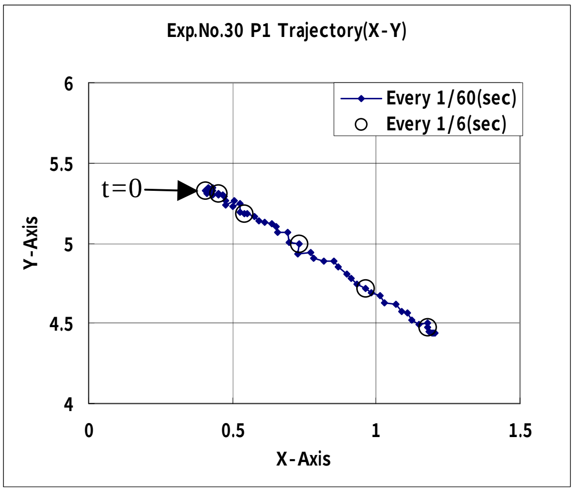
Fig.11 実験 No.29(出会い角：45deg, 降下角：40deg, 着水地点：波頂)ビデオ解析および位置推定結果



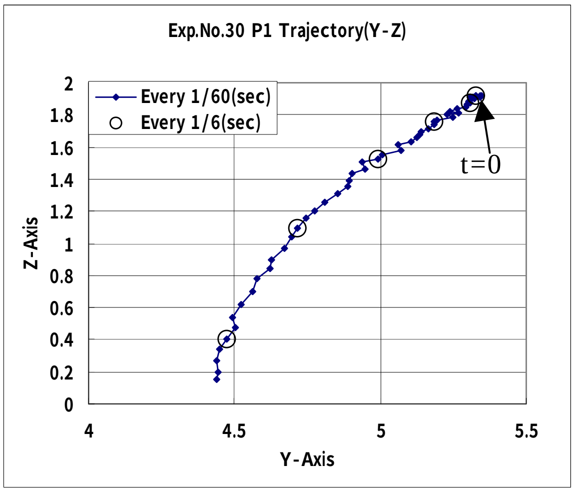
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



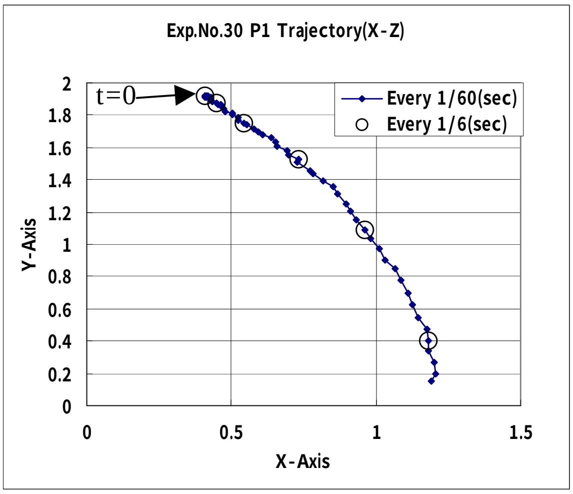
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

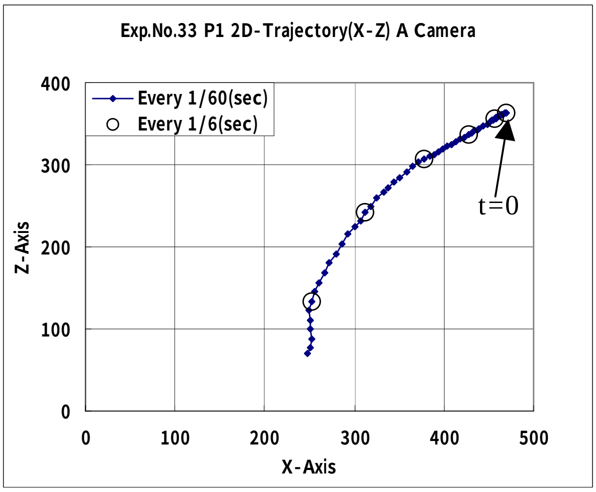


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

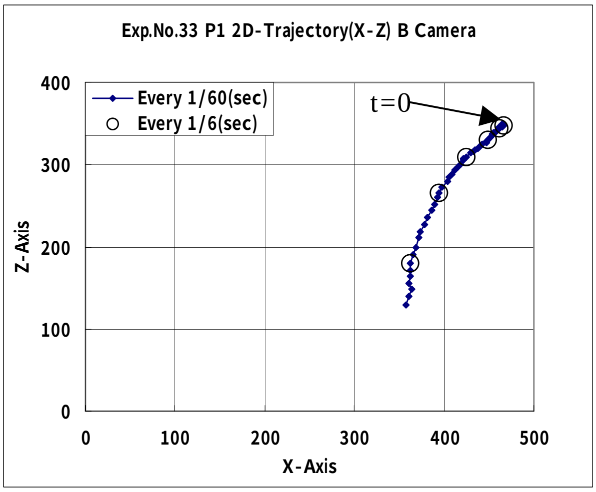


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

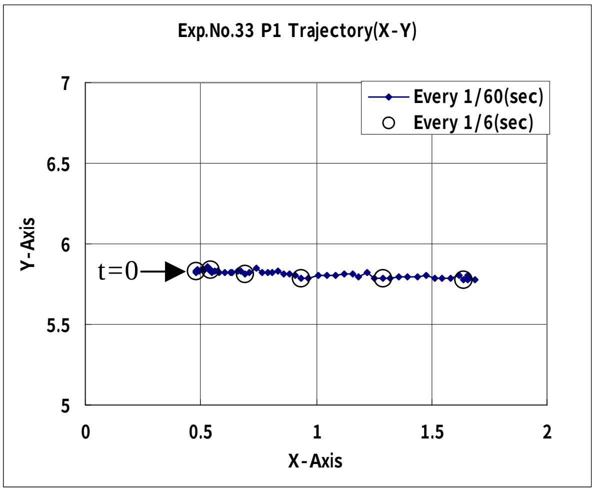
Fig.12 実験 No.30(出会い角：45deg，降下角：40deg，着水地点：波底)ビデオ解析および位置推定結果



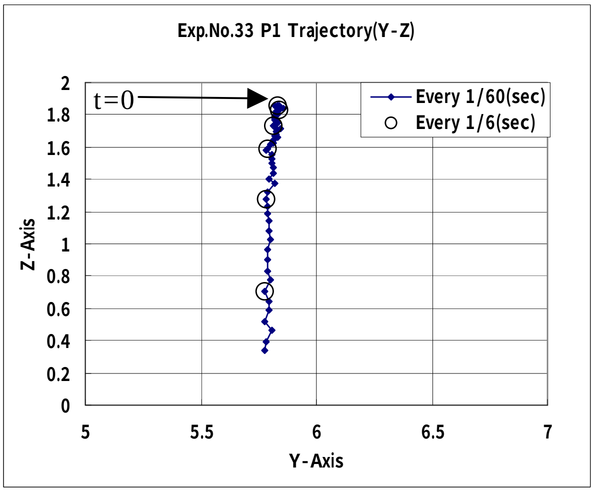
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



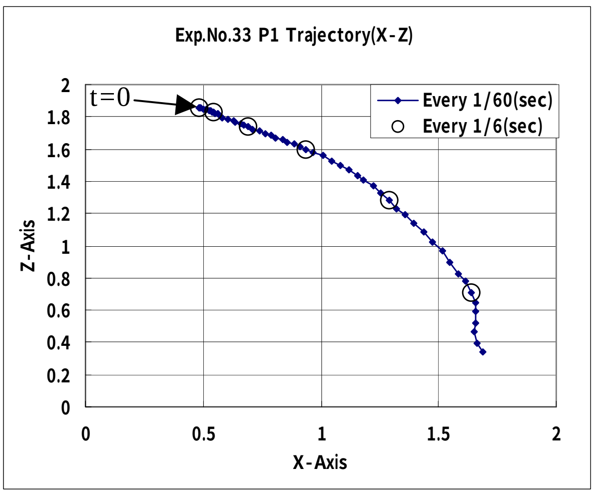
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

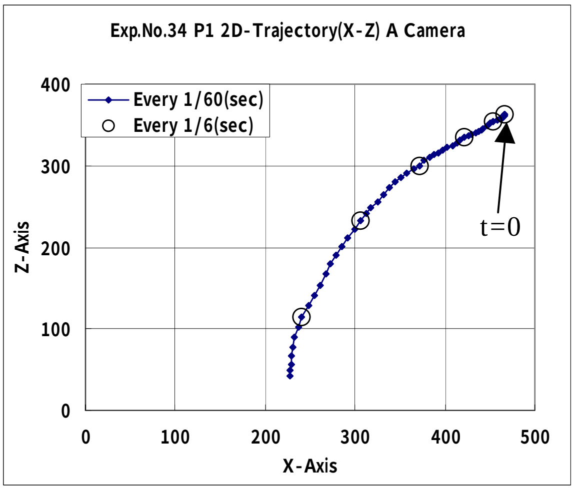


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

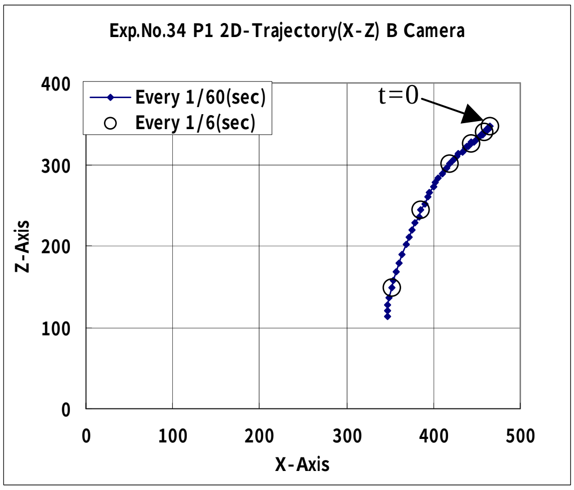


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

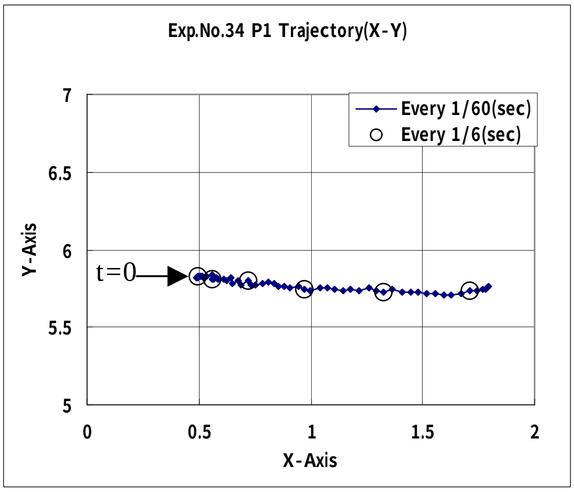
Fig.13 実験 No.33(出会い角：0deg, 降下角：30deg, 着水地点：波頂)ビデオ解析および位置推定結果



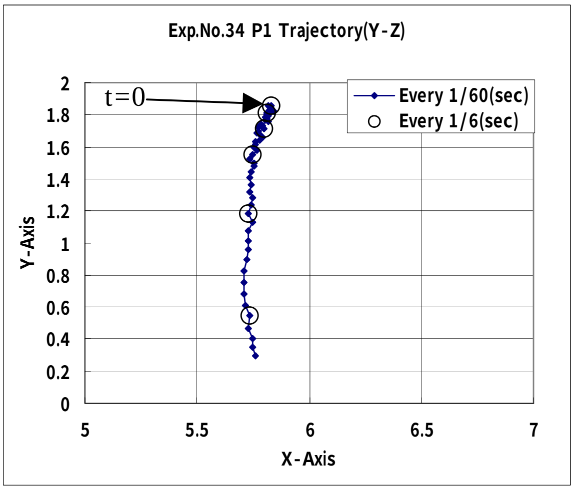
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



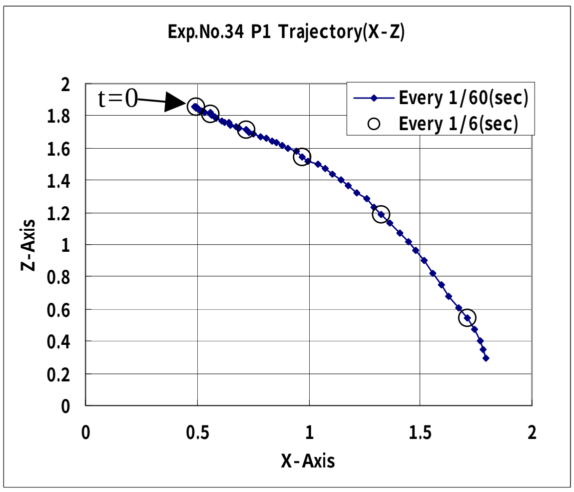
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

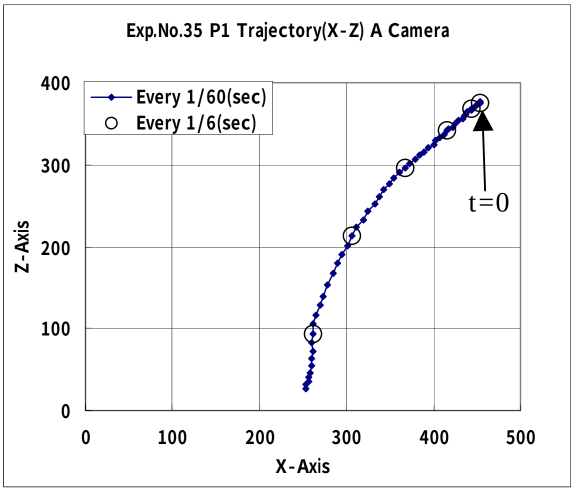


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

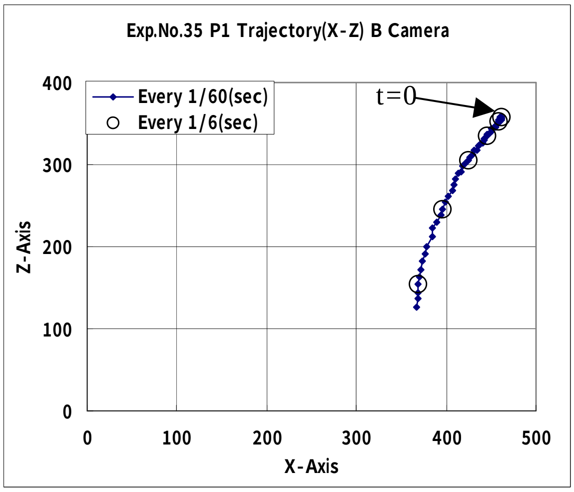


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

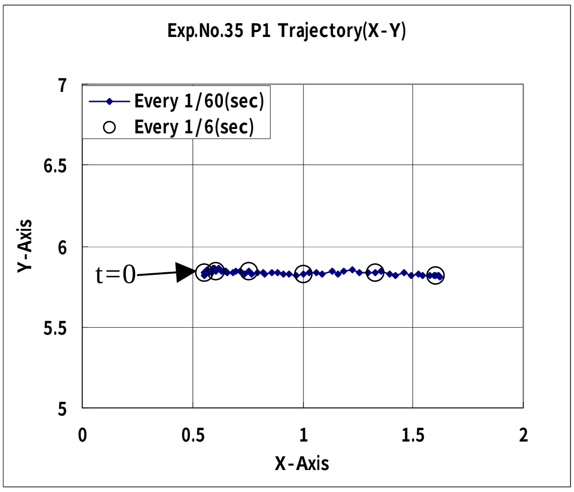
Fig.14 実験 No.34(出会い角：0deg，降下角：30deg，着水地点：波底)ビデオ解析および位置推定結果



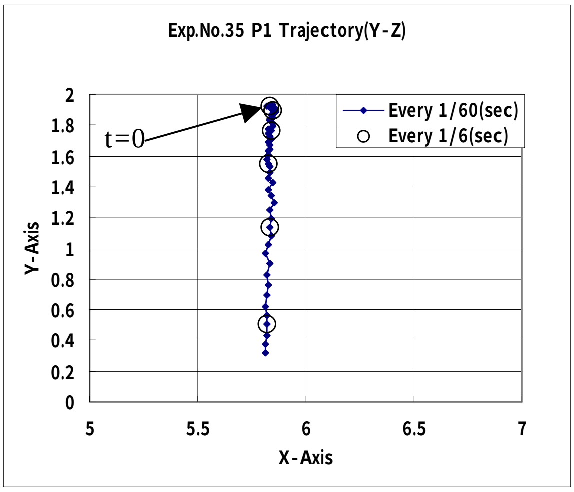
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



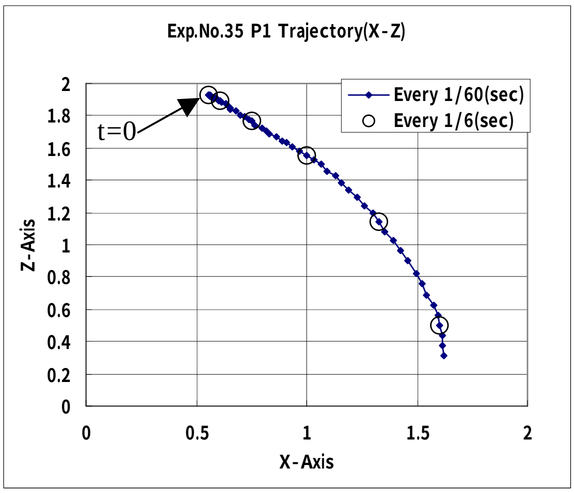
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

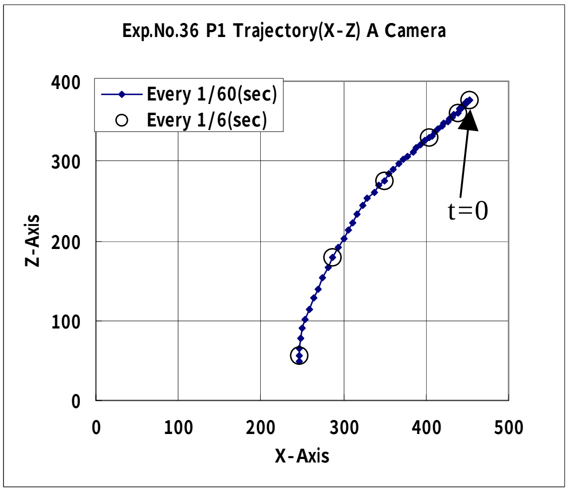


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

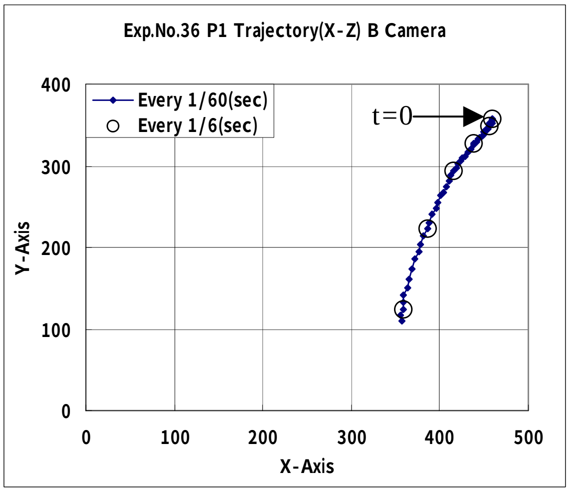


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

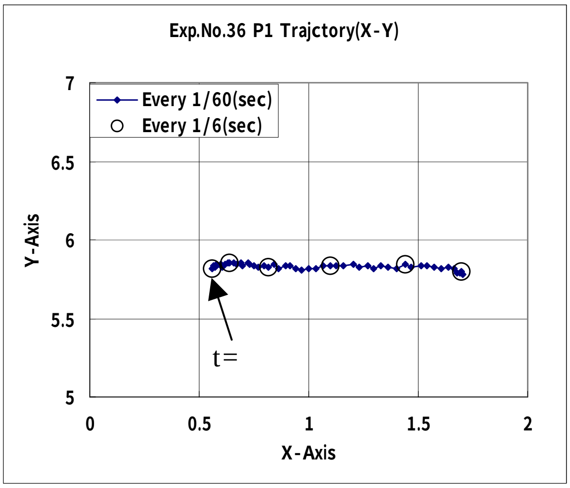
Fig.15 実験 No.35(出会い角：0deg，降下角：40deg，着水地点：波頂)ビデオ解析および位置推定結果



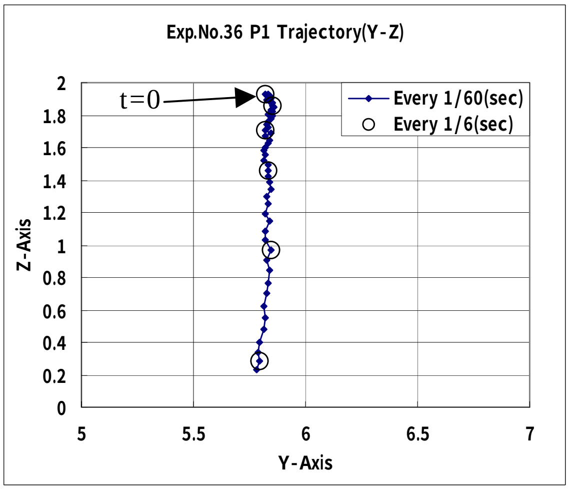
(a) ビデオ解析結果(A カメラ)



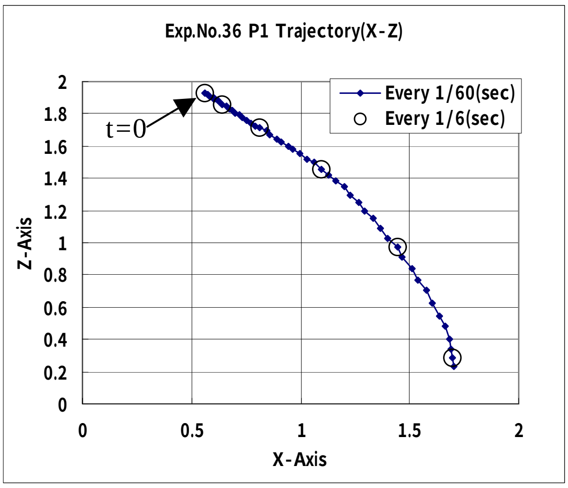
(b) ビデオ解析結果(B カメラ)



(c) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Y 平面への投影)

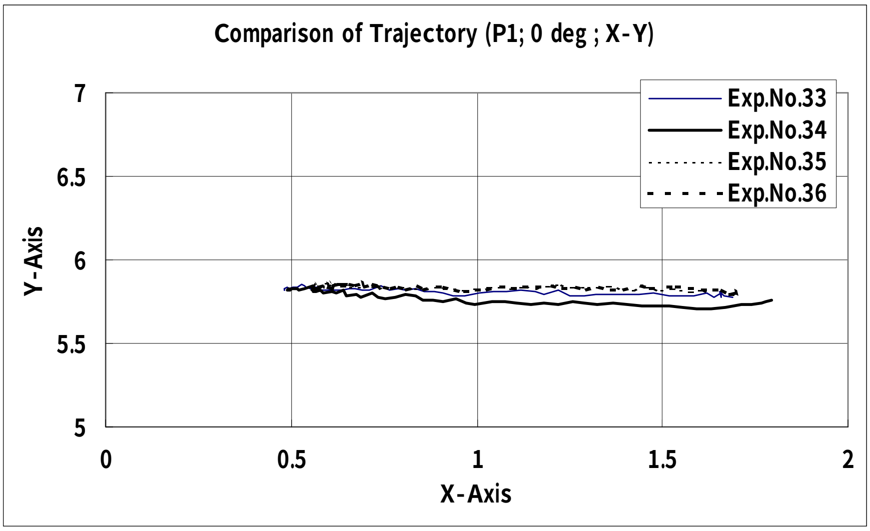


(d) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(Y-Z 平面への投影)

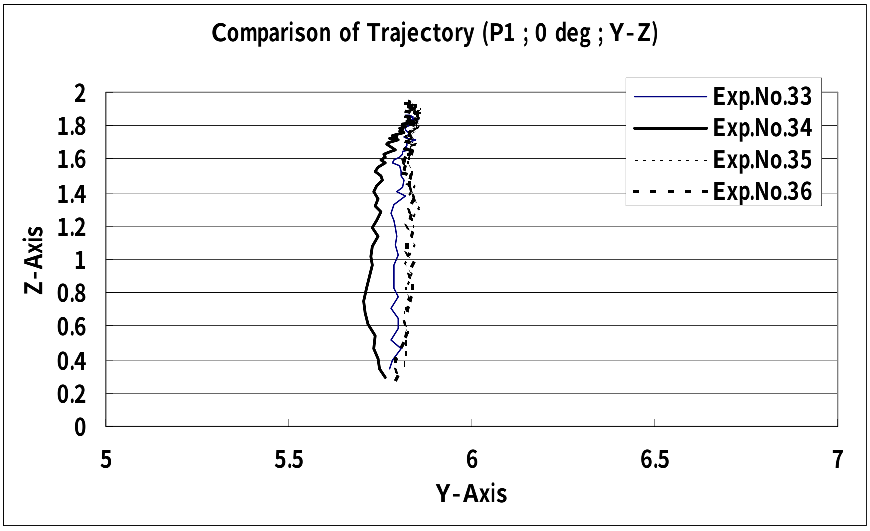


(e) 追跡点 1 の 3 次元位置推定値(X-Z 平面への投影)

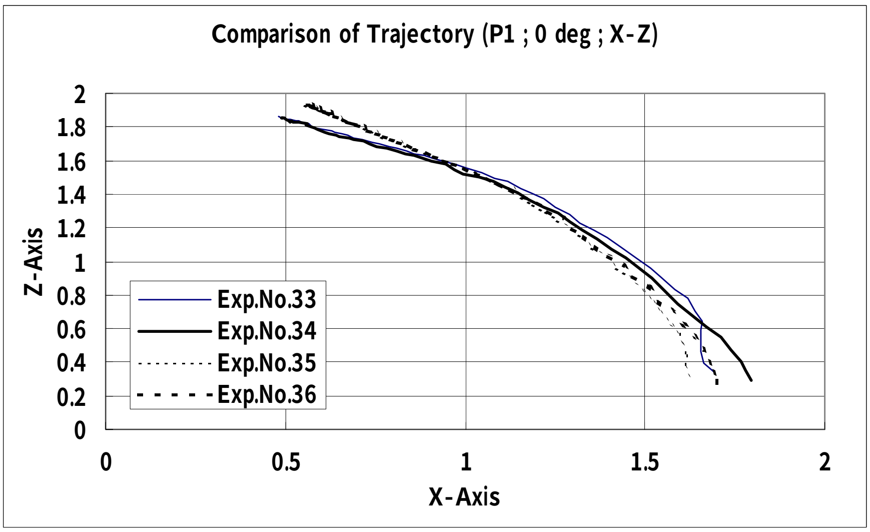
Fig.16 実験 No.36(出会い角：0deg，降下角：40deg，着水地点：波底)ビデオ解析および位置推定結果



(a) X-Y 平面への投影

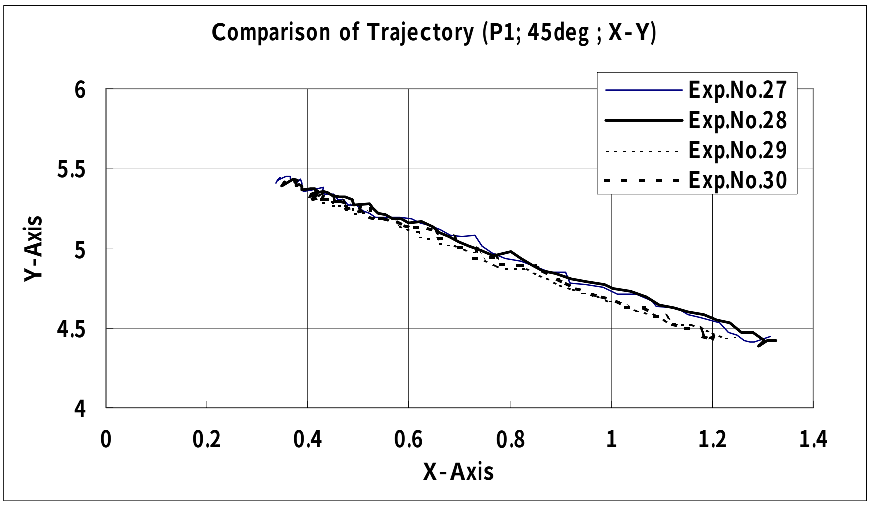


(b) Y-Z 平面への投影

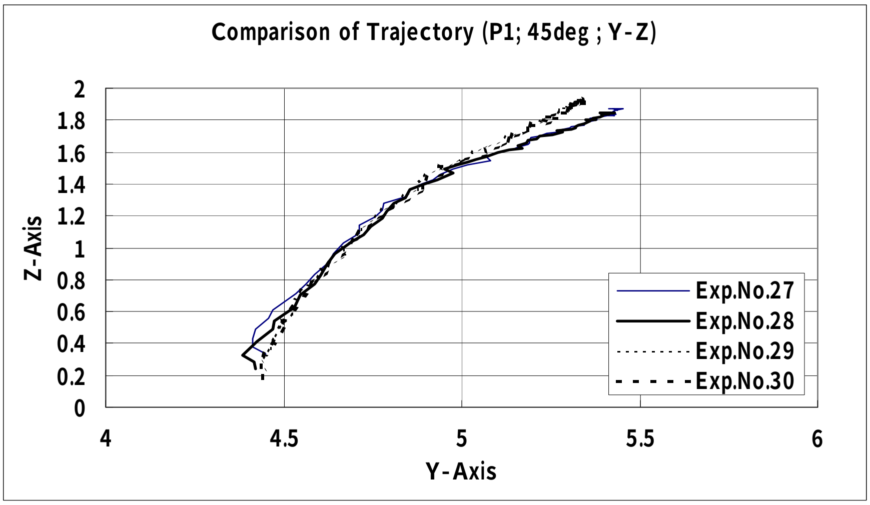


(c) X-Z 平面への投影

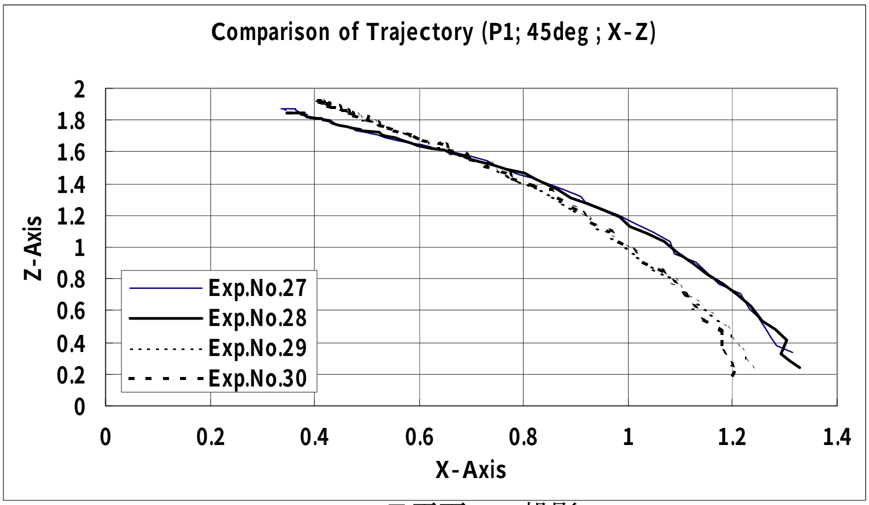
Fig.17 滑走時および自由落下時の航跡の推定値の比較（出会い角：0deg）



(a) X-Y 平面への投影



(b) Y-Z 平面への投影



(c) X-Ｚ平面への投影

Fig.18 滑走時および自由落下時の航跡の推定値の比較（出会い角：45deg）

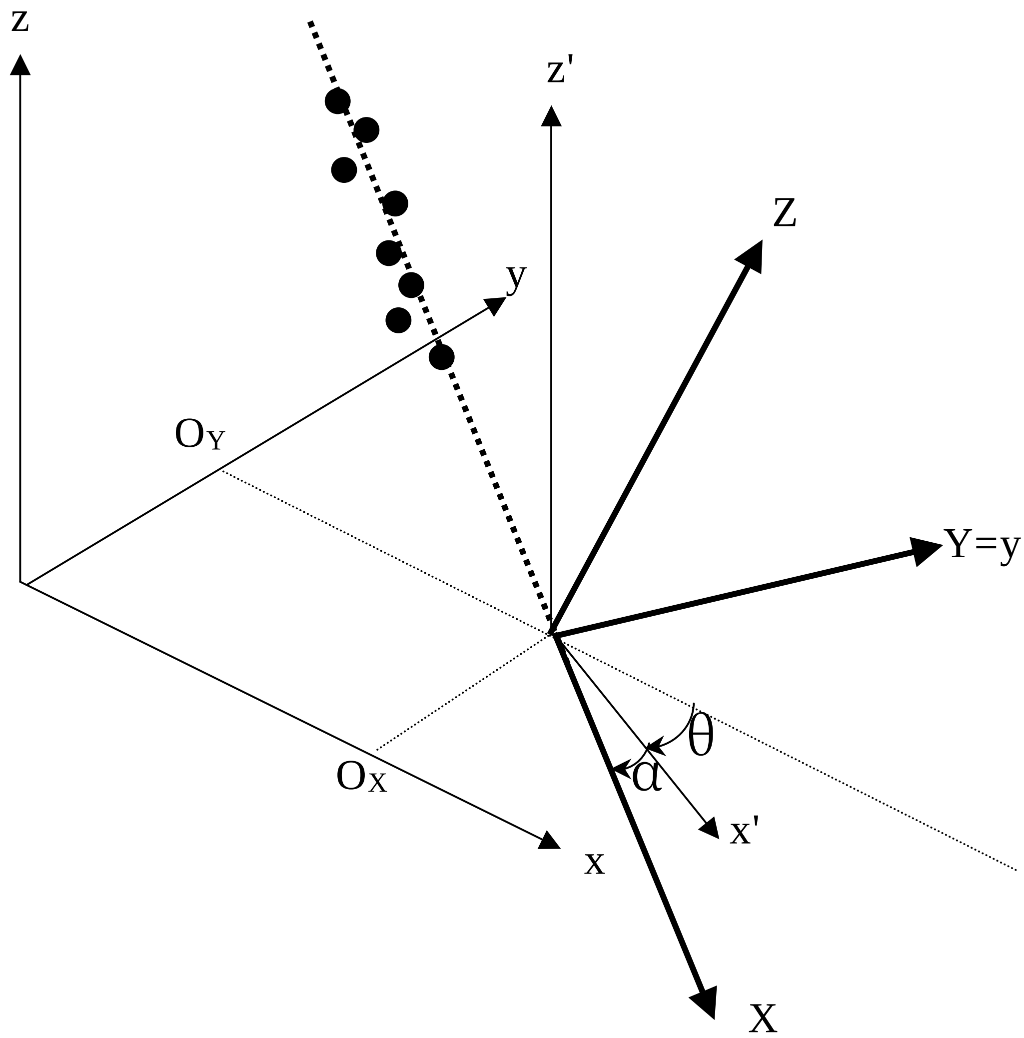


Fig.19 直線部評価のための座標系

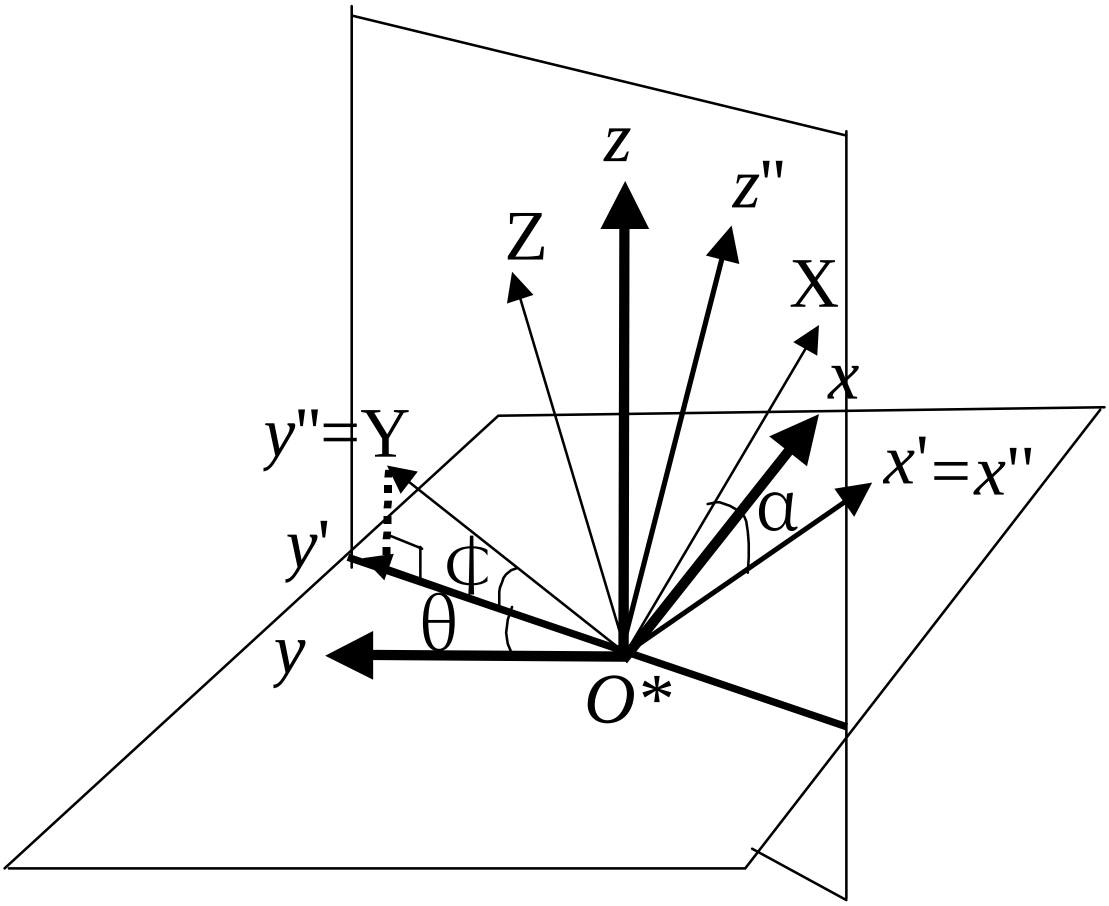


Fig.20　カメラの任意の位置、姿勢への移動方法

		Original values		Estimated values (used data:significant figures are 6 digits)				Estimated values (used data:read by pixel unit)			
		Camera A	Camera B	Camera A	Difference*	Camera B	Difference*	Camera A	Difference*	Camera B	Difference*
Camera parameters	Ox (m)	1.46000	5.64000	1.46738	0.00738	5.64067	0.00067	1.47584	0.01584	5.62621	-0.01379
	Oy (m)	9.72000	9.44000	9.80246	0.08246	9.46842	0.02842	9.73062	0.01062	9.48497	0.04497
	Oz (m)	1.84000	1.78000	1.79521	-0.04479	1.72732	-0.05268	1.90454	0.06454	1.83931	0.05931
	θ (rad)	-3.11000	2.46000	-3.11091	-0.05214	2.46142	0.08136	-3.11124	-0.07105	2.46362	0.20741
	ϕ (rad)	-0.13300	-0.12600	-0.12730	0.32659	-0.12156	0.25439	-0.14020	-0.41230	-0.13074	-0.27181
	α (rad)	0.08000	0.01800	0.08076	0.04354	0.02166	0.20970	0.07570	-0.24637	0.01519	-0.16077
	B	790.000	735.000	796.120	0.775%	734.865	-0.018%	787.388	-0.331%	737.155	0.293%
Coordinate value unknown points	x(Point 4) (m)	2.06250		2.07081	0.00831			2.07201	0.00951		
	y(Point 4) (m)	5.75751		5.78224	0.02473			5.78961	0.03210		
	z(Point 4) (m)	0.96875		0.93837	-0.03038			1.00083	0.03208		
	x(Point 5) (m)	2.58333		2.59380	0.01047			2.59007	0.00674		
	y(Point 5) (m)	5.82292		5.84996	0.02704			5.86479	0.04187		
	z(Point 5) (m)	0.70833		0.67814	-0.03019			0.74495	0.03662		
Evaluation function(S)				0.03211				1.17805			

*:Ox,Oy,Oz : Estimated value - Original Value (unit:m)

θ , ϕ , α : (Estimated value - Original Value)*180.0/ π (unit:deg)

B : (Esimated value - Original value)*100.0/Estimated value (unit:%)

x,y,z :Estimated value - Original Value (unit:m)

Table 1 カメラパラメータおよび座標未知点の設定値および推定値

		Significant figures : 6 digits		Read by pixel unit	
		XGB	ZGB	XGB	ZGB
Point 1	Camera A	395.631	200.165	396	200
	Camera B	148.830	211.275	149	211
Point 2	Camera A	334.456	204.920	334	205
	Camera B	103.012	214.214	103	214
Point 3	Camera A	273.585	210.029	274	210
	Camera B	54.7430	217.636	55	218
Point 4	Camera A	168.188	328.070	168	328
	Camera B	320.997	277.367	321	277
Point 5	Camera A	70.3021	387.964	70	388
	Camera B	271.207	326.446	271	326

Table 2 画像ボード出力模擬値

		Point Sequence 1			Point Sequence 2			Point Sequence 3		
		O to A	O to B	A to B	O to A	O to B	A to B	O to A	O to B	A to B
Opt.	Mean of Difference	5.356E-03	5.506E-03	1.485E-03	4.425E-03	4.428E-03	1.262E-03	6.214E-03	6.490E-03	1.583E-03
	Standard Deviation	1.475E-03	1.481E-03	9.743E-04	1.659E-03	1.906E-03	1.103E-03	1.844E-03	1.877E-03	1.024E-03
No Opt.	Mean of Difference	5.146E-02	4.932E-02	6.261E-03	5.535E-02	5.436E-02	5.314E-03	4.611E-02	4.359E-02	7.226E-03
	Standard Deviation	4.387E-03	9.022E-03	4.136E-03	3.264E-03	7.196E-03	3.735E-03	5.049E-03	9.940E-03	5.047E-03

O to A : Difference between each original point and the corresponding point estimated from the observation simulated data by the camera A
O to B : Difference between each original point and the corresponding point estimated from the observation simulated data by the camera B
A to B : Difference between each estimated point from the observation simulated data by the camera A and the corresponding point by the camera B

Table 3 量子化誤差補償手法の効果

Exp.No.	Exp.Id.	Tested boat (Actual boat length)	Encounter Angle(deg)	Launching Angle (deg)	Entrance position into wave
27	H623T	6.6m	45	30	Top
28	H623B	6.6m	45	30	Bottom
29	H624T	6.6m	45	40	Top
30	H624B	6.6m	45	40	Bottom
33	H613T	6.6m	0	30	Top
34	H613B	6.6m	0	30	Bottom
35	H614T	6.6m	0	40	Top
36	H614B	6.6m	0	40	Bottom

Table 4 実験条件

Exp.No.	27	28	29	30	33	34	35	36
Encounter angle(deg)	45	45	45	45	0	0	0	0
Launching angle(deg)	30	30	40	40	30	30	40	40
Ox	2.465	2.561	1.956	1.991	3.692	3.511	2.792	2.768
Oy	3.115	3.136	3.655	3.726	5.676	5.306	5.752	5.815
θ	-47.65	-46.07	-47.33	-45.53	-2.845	-9.807	-2.354	-0.643
α	30.66	30.22	40.09	40.38	30.07	31.11	40.82	41.19

Table 5 実験における直線部分の航跡点座標推定値の近似直線の推定

・ 数 式 補 遺

$$
\begin{pmatrix}
x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_1x_1 & -X_1y_1 & -X_1z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & -Z_1x_1 & -Z_1y_1 & -Z_1z_1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
x_n & y_n & z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X_ix_i & -X_iy_i & -X_iz_i \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & z_n & 1 & -X_ix_i & -X_iy_i & -X_iz_i
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{Ba}{k} \\ \frac{Bb}{k} \\ \frac{Bc}{k} \\ \frac{j}{k} \\ \frac{Bg}{k} \\ \frac{Bh}{k} \\ \frac{Bi}{k} \\ \frac{l}{k} \\ \frac{d}{k} \\ \frac{e}{k} \\ \frac{f}{k}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
X_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \\ X_n
\end{pmatrix}
\quad \cdots(14)
$$

・ p(8)

$$g_x = B_j\{(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) - \sin\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*) - {}_jX_i\}$$

$$g_z = B_j\{(\sin\alpha_j\cos\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\sin\alpha_j\sin\theta_j - \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) + \cos\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*) - {}_jZ_i\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\theta_j} = B_j\{(-\cos\alpha_j\sin\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*)\}$$

・ p(9)

$$\frac{\partial g_x}{\partial\phi_j} = B_j\{-\sin\alpha_j\cos\phi_j\sin\theta_j(x_i - {}_jO_x^*) + \sin\alpha_j\cos\phi_j\cos\theta_j(y_i - {}_jO_y^*) + \sin\alpha_j\sin\phi_j(z_i - {}_jO_z^*)\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial\alpha_j} = B_j\{(-\sin\alpha_j\cos\theta_j - \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (-\sin\alpha_j\sin\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) - \cos\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*)\}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial B_j} = (\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) - \sin\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*) - {}_jX_i$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial\theta_j} = B_j\{(-\sin\alpha_j\sin\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\sin\alpha_j\cos\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*)\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial\phi_j} = B_j\{\cos\alpha_j\cos\phi_j\sin\theta_j(x_i - {}_jO_x^*) - \sin\alpha_j\cos\phi_j\cos\theta_j(y_i - {}_jO_y^*) + \sin\alpha_j\sin\phi_j(z_i - {}_jO_z^*)\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial\alpha_j} = B_j\{(\cos\alpha_j\cos\theta_j - \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\cos\alpha_j\sin\theta_j + \sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) - \sin\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*)\}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial B_j} = (\sin\alpha_j\cos\theta_j + \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(x_i - {}_jO_x^*) + (\sin\alpha_j\sin\theta_j - \cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j)(y_i - {}_jO_y^*) + \cos\alpha_j\cos\phi_j(z_i - {}_jO_z^*) - {}_jZ_i$$

・　数　式　補　遺

・p(3)

$$M_Y(\alpha_j)M_X(\phi_j)M_Z(\theta_j)=\begin{pmatrix}\cos\alpha_j\cos\theta_j-\sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j & \cos\alpha_j\sin\theta_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j & -\sin\alpha_j\cos\phi_j\\ -\cos\phi_j\sin\theta_j & \cos\phi_j\cos\theta_j & \sin\phi_j\\ \sin\alpha_j\cos\theta_j+\cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j & \sin\alpha_j\sin\theta_j-\cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j & \cos\alpha_j\cos\phi_j\end{pmatrix}\quad\cdots(2)$$

$${}_jX_i=\frac{B_j\left\{\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\left(\cos\alpha_j\cos\theta_j-\sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\left(\cos\alpha_j\sin\theta_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)-\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\sin\alpha_i\cos\phi_j\right\}}{-\left(x_i-O_x^*\right)\cos\phi\sin\theta+\left(y_i-O_y^*\right)\cos\phi\cos\theta+\left(z_i-O_z^*\right)\sin\phi}$$

$${}_jZ_i=\frac{B_j\left\{\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\left(\sin\alpha_j\cos\theta_j+\cos\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\left(\sin\alpha_j\sin\theta_j-\cos\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)+\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\cos\alpha_j\cos\phi_j\right\}}{-\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\cos\phi\sin\theta+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\cos\phi\cos\theta+\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\sin\phi}\quad\cdots(4)$$

・p(4)

$${}_jf_{2i-1}=\frac{B\left\{\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\left(\cos\alpha_j\cos\theta_j-\sin\alpha_j\sin\phi_j\sin\theta_j\right)+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\left(\cos\alpha_j\sin\theta_j+\sin\alpha_j\sin\phi_j\cos\theta_j\right)-\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\sin\alpha_j\cos\phi_j\right\}}{-\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\cos\phi_j\sin\theta_j+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\cos\phi_j\cos\theta_j+\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\sin\phi_j}-{}_jX_i$$

$${}_jf_{2i}=\frac{B\left\{\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\left(\sin\alpha_j\cos\theta_j+\cos\alpha_j\sin\phi\sin\theta_j\right)+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\left(\sin\alpha_j\sin\theta_j-\cos\alpha_j\sin\phi\cos\theta_j\right)+\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\cos\alpha_j\cos\phi\right\}}{-\left(x_i-{}_jO_x^*\right)\cos\phi_j\sin\theta_j+\left(y_i-{}_jO_y^*\right)\cos\phi_j\cos\theta_j+\left(z_i-{}_jO_z^*\right)\sin\phi_j}-{}_jZ_i\quad\cdots(7)$$

・p(5)

$$M_Z(-\theta)M_X(-\phi)M_Y(-\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\phi\sin\alpha & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\alpha+\sin\theta\sin\phi\cos\alpha\\ \sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\phi\sin\alpha & \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\alpha-\cos\theta\sin\phi\cos\alpha\\ -\cos\phi\sin\alpha & \sin\phi & \cos\phi\cos\alpha\end{pmatrix}\quad\cdots(9)$$

$$\begin{pmatrix}a_A & b_A & c_A\\ d_A & e_A & f_A\\ g_A & h_A & i_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_A\cos\alpha_A-\sin\theta_A\sin\phi_A\sin\alpha_A & -\sin\theta_A\cos\phi_A & \cos\theta_A\sin\alpha_A+\sin\theta_A\sin\phi_A\cos\alpha_A\\ \sin\theta_A\cos\alpha_A+\cos\theta_A\sin\phi_A\sin\alpha_A & \cos\theta_A\cos\phi_A & \sin\theta_A\sin\alpha_A-\cos\theta_A\sin\phi_A c\cos\alpha_A\\ -\cos\phi_A\sin\alpha_A & \sin\phi_A & \cos\phi_A\cos\alpha_A\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_B & b_B & c_B\\ d_B & e_B & f_B\\ g_B & h_B & i_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta_B\cos\alpha_B-\sin\theta_B\sin\phi_B\sin\alpha_B & -\sin\theta_B\cos\phi_B & \cos\theta_B\sin\alpha_B+\sin\theta_B\sin\phi_B\cos\alpha_B\\ \sin\theta_B\cos\alpha_B+\cos\theta_B\sin\phi_B\sin\alpha_B & \cos\theta_B\cos\phi_B & \sin\theta_B\sin\alpha_B-\cos\theta_B\sin\phi_B\cos\alpha_B\\ -\cos\phi_B\sin\alpha_B & \sin\phi_B & \cos\phi_B\cos\alpha_B\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_A & b_A & c_A\\ d_A & e_A & f_A\\ g_A & h_A & i_A\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\dfrac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AX_i\\ {}_AY_i^*\\ \dfrac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AZ_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}{}_AO_x^*\\ {}_AO_y^*\\ {}_AO_z^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_B & b_B & c_B\\ d_B & e_B & f_B\\ g_B & h_B & i_B\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\dfrac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BX_i\\ {}_BY_i^*\\ \dfrac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BZ_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}{}_BO_x^*\\ {}_BO_y^*\\ {}_BO_z^*\end{pmatrix}\quad\cdots(10)$$

$$f_1=a_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AX_i+b_A\,{}_AY_i^*+c_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AZ_i+{}_AO_x^*-\left(a_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BX_i+b_B\,{}_BY_i^*+c_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BZ_i+{}_BO_x^*\right)$$

$$f_2=d_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AX_i+e_A\,{}_AY_i^*+f_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AZ+{}_AO_y^*-\left(d_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BX_i+e_B\,{}_BY_i^*+f_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BZ_i+{}_BO_y^*\right)\quad\cdots(11)$$

$$f_3=g_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AX_i+h_A\,{}_AY_i^*+i_A\frac{{}_AY_i^*}{B_A}{}_AZ+{}_AO_z^*-\left(g_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BX_i+h_B\,{}_BY_i^*+i_B\frac{{}_BY_i^*}{B_B}{}_BZ_i+{}_BO_z^*\right)$$

・p(6)

$$M_Y(\alpha)M_X(\phi)M_Z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\phi\sin\theta & \cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\sin\phi\cos\theta & -\sin\alpha\cos\phi\\ -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & \sin\phi\\ \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\phi\sin\theta & \sin\alpha\sin\theta-\cos\alpha\sin\phi\cos\theta & \cos\alpha\cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$