複数浮体の波浪中動揺問題について

大松　重雄*

On the Oscillation Problem of Multiple Floating Bodies in Waves

by

Shigeo OHMATSU

Abstract

This paper deals with the wave diffraction/radiation problems of multiple floating bodies in regular waves. For the analysis of hydrodynamic force of diffraction/radiation problems, 3-dimensional eigenfunction expansion method[1)2)] is applied and numerical calculation code is developed. This paper describes detail of the 3-dimensional eigenfunction expansion method and the numerical results of various hydrodynamic forces and motions for the case of two adjacent floating bodies. These results will be the numerical examples of the commentary paper[3)] written by the same author. This paper also shows the irregular frequency phenomena appear in the case of 3-dimensional eigenfunction expansion method and describes its elimination method.

Finally, the property of radiation waves due to the impulse response of multiple floating bodies is discussed and experimental estimation method of motion response amplitude operator without wave generator is shown as an appendix .

*　海洋部門
原稿受付　平成19年 7月17日
審 査 済　平成19年12月20日

目　次

記　号

A_W ：浮体の水線面積

a_{ij} ：付加質量(慣性モーメント)係数

b_{ij} ：減衰力係数

c_{ij} ：復原力係数

d ：浮体の喫水

D ：水深影響係数

$E_j(\beta)$ ： β 方向の入射波によって浮体に働く j モードの波強制力

$e_j(\beta)$ ： $E_j(\beta)$ の無次元表示

g ：重力の加速度

$\overline{GM}$ ：横メタセンター高さ

$\overline{GM}_l$ ：縦メタセンター高さ

h ：水深

$H_j(\theta)$ ： j モード動揺による Radiation potential の Kochin 関数

$H_0^{(1)}(z)$ ：第 1 種 Hankel 関数

k_0 ：有限水深波の進行波の波数

k_m ：有限水深波の局所波の波数

$K_0(z)$ ：第 1 種変形 Bessel 関数

l_j ： j モードの動揺の複素振幅

l_G ：座標原点（静止水面）から重心までの高さ

m_{ij} ：質量(慣性モーメント)

M_{ij} ：付加質量(慣性モーメント)

N_{ij} ：減衰力

ν_j ：浮体浸水表面法線の j モード成分

U_j ：j モード動揺の Radiation 問題の特解

β ：入射波の進行方向

ζ_a ：入射波の波高(複素振幅)

ρ ：流体の密度

ω ：周期的流体現象の円周波数

Φ_0 ：浮体外部の流場の速度ポテンシャル

Φ_i ：i 番目の浮体下部の流場の速度ポテンシャル

本論文における動揺モード番号は一般的に
1:surge　2 :sway　3:heave
4:roll　5:pitch　6:yaw　とする。

1. まえがき

本論文は複数の浮体が波浪中に存在する場合の波力、流体力及び動揺応答の解析法を示すものである。波力、流体力の解析法には取扱いが簡便な 3 次元領域分割法 [1)2)] を用いる。したがって、浮体形状は側面が鉛直で底面が平面形状に限られるが、計算データの入力が容易でかつ計算時間

が短時間ですむ。本法は浮体動揺の概要を簡便に計算するのに有用であろう。

本論では第 2 章で複数浮体の場合の radiation 流体力、diffraction 流体力を 3 次元領域分割法を用いて求める方法を詳述した。第 3 章では前述の方法によって計算された波力、流体力の例を多数示した。これらは、計算法の妥当性を示すとともに、著者が以前に執筆した動揺流体力に関する解説論文 [3)] の具体例としても見ることができる。そして第 4 章で、これらの流体力を用いて複数浮体の規則波中動揺応答を解く運動方程式を導き、計算例を示した。

さらに付録－3 として、3 次元領域分割法の場合の irregular frequency 現象を解説するとともにその除去法について述べた。また付録－4 として、複数浮体の場合の自由動揺応答とその発散波の性質・利用法に言及しておく。この付録－4 は流体力の計算法とは直接の関係はないが、複数浮体の場合の流体力の関係から導かれるものであるので、ここに記述しておくことにした。

当然のことながら、本論で述べる事柄はすべて単一浮体の場合にも適用することができる。

2. 領域分割法による波力、流体力の解析

2.1 仮定と定義

ここで扱う動揺理論においては、以下の仮定をおく。

1）水深は有限で一定とする。
2）流体は非粘性、非回転であるとして速度ポテンシャルを導入する。また、入射波振幅、動揺振幅ともに線型理論で扱える程度に小さいとする。
3）すべての現象は周期的であるとし、時間項を $e^{-i\omega t}$ とする。
4）浮体の平面形状は任意であるが、側面は鉛直、底面は平面であるとする。
5）浮体の前進速度はないものとする。

3次元流場の座標系と記号を図-1のように定義する。空間固定座標と同時に、各浮体にはそれぞれの浮体固定座標があるものとする。

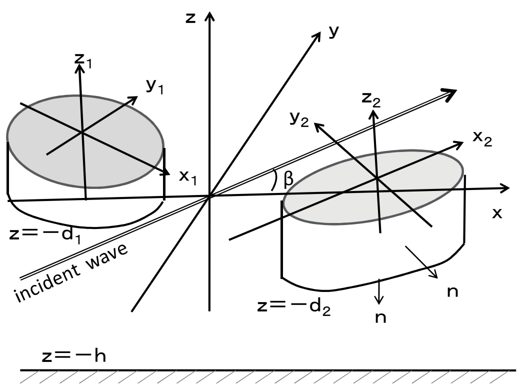


図-1　3 次元流場の座標系と記号

浮体の波浪中動揺応答を解くには、浮体が静水中で動揺することによって発生する流体力を求めるいわゆる radiation 問題、及び浮体に入射波が当たることによって発生する波力を求めるいわゆる diffraction 問題をまず解く必要がある。以下、複数浮体の場合に、これらの radiation 及び diffraction 問題を 3 次元領域分割法によって解く方法を述べることにする。

2.2 Radiation 問題

複数浮体の場合の radiation 問題は、どれか一つの浮体が一つのモードの動揺をしている（他の浮体は静止している）場合の流場を解き、その流場によって各浮体に働く力を解く問題である。図-2 に、1 番目の浮体が heave 運動をしている時の例を示す。

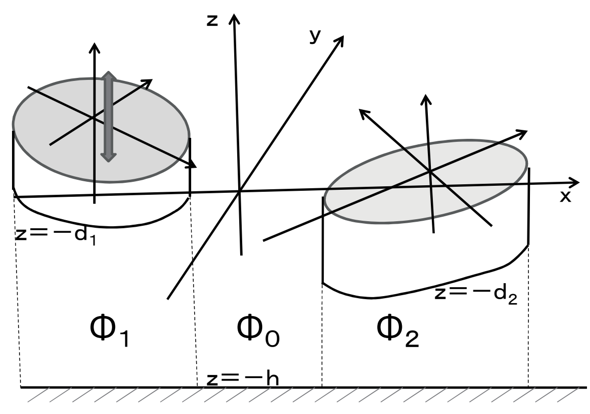


図-2　Radiation 問題の一例

一つの浮体が l_j という振幅で j モードの動揺をしているとする。すなわち、j モードの変位を $l_j e^{-i\omega t}$ とする。（速度は $-i\omega l_j e^{-i\omega t}$ である。）

流場を浮体の外側の領域とそれぞれの浮体下部の領域に分け、それぞれにおける速度ポテンシ

ャルを Φ_0 及び $\Phi_1, \Phi_2, ...$ と表すことにする。それぞれの領域における速度ポテンシャルの満足すべき条件は以下の如くである。

浮体外部

[L]　$\nabla^2 \Phi_0 = 0$　in fluid domain　(1)

[F]　$\dfrac{\omega^2}{g}\Phi_0 - \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0$　at z=0　(2)

[H]　$\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial n} = v_j$　on C　at z=-d~0　(3)

[B]　$\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0$　at z=-h　(4)

[R]　Radiation condition　(5)

ここで、[L]は流体の連続の条件を意味するLaplace の条件、 [F]は自由表面を横切る流れがなく、自由表面がひとつの流線であることを意味する自由表面条件、 [H]は浮体表面の粒子が浮体表面の法線速度と同じ速度を持つことを意味する浮体表面条件、 [B]は水底を横切る流れがないことを意味する水底条件、[R]は浮体による攪乱波はすべて外方に向かって伝播しなければならないという条件、をそれぞれ表している。 v_j は j モード動揺の浮体表面における法線方向速度成分を表す。動揺していない浮体との境界ではもちろん $v_j = 0$ である。

浮体下部（i 番目の浮体）

[L]　$\nabla^2 \Phi_i = 0$　in fluid domain　(6)

[H]　$\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial n} = v_j$　at bottom z=-d　(7)

[B]　$\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial z} = 0$　at z=-h　(8)

これらの条件を満足する速度ポテンシャルを以下のように仮定する。

$$\Phi_0 = f_0(x,y)\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

$$+\sum_{m=1} f_m(x,y)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{9}$$

$$\Phi_i = \varphi_0(x,y) + \sum_{m=1}\varphi_m(x,y)\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i}$$

$$-i\omega U_j(x,y,z) \tag{10}$$

ここで d_i は i 番目の浮体の喫水、k_0, k_m は次式の実根で、 k_0 は進行波の波数、 k_m は局所波の波数である。

$$\frac{\omega^2}{g}h = k_0 h \tanh k_0 h = -k_m h \tan k_m h \tag{11}$$

また、 $U_j(x,y,z)$ は次の条件を満足する実関数とする。

[L]　$\nabla^2 U_j = 0$　in fluid domain　(12)

[H]　$\dfrac{\partial U_j}{\partial z} = v_j$　at z=-d　(13)

[B]　$\dfrac{\partial U_j}{\partial z} = 0$　at z=-h　(14)

以上により、Φ_0 は自由表面条件[F]及び水底での条件[B]を、 Φ_i は水底での条件[B]を満足することが確認される。

Φ_0, Φ_i を(9)(10)式のように、 z 方向には自由表面条件や水底条件を満足する関数で表し、その係数関数 $f_0(x,y), f_m(x,y), \varphi_0(x,y), \varphi_m(x,y)$ を他の条件を満足するように決定するので、領域分割法は固有関数展開法とも呼ばれることがある。

Φ_0, Φ_i が Laplace の条件[L]を満足するためには、それぞれの係数関数は以下の Helmholtz の方程式を満足しなければならない。これは(9)(10)式を[L]に代入すれば容易に確かめられる。

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + k_0{}^2 f_0 = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2}-k_m{}^2 f_m=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2}-\left(\frac{m\pi}{h-d}\right)\varphi_m=0 \tag{18}$$

これらを満足する関数は、Green の定理により、境界 C 上におけるそれらの値と、C に対する法線微分値を用いて次のように表すことができる。

$$f_0(x,y)=-\frac{1}{2}\int_C\Big\{\ f_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(-\frac{i}{2}H_0{}^{(1)}(k_0 r)\big)-\big(-\frac{i}{2}H_0{}^{(1)}(k_0 r)\big)\cdot\overline{f}_0(\xi,\eta)\ \Big\}dl(\xi,\eta) \tag{19}$$

$$f_m(x,y)=-\frac{1}{2}\int_C\Big\{\ f_m(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(-\frac{K_0(k_m r)}{\pi}\big)-\big(-\frac{K_0(k_m r)}{\pi}\big)\cdot\overline{f}_m(\xi,\eta)\ \Big\}dl(\xi,\eta) \tag{20}$$

$$\varphi_0(x,y)=\frac{1}{2}\int_C\Big\{\ \varphi_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(\frac{\ln(k_0 r)}{\pi}\big)-\big(\frac{\ln(k_0 r)}{\pi}\big)\cdot\overline{\varphi}_0(\xi,\eta)dl(\xi,\eta) \tag{21}$$

$$\varphi_m(x,y)=\frac{1}{2}\int_C\varphi_m(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(-\frac{K_0(\alpha_m r)}{\pi}\big)-\big(-\frac{K_0(\alpha_m r)}{\pi}\big)\cdot\overline{\varphi}_m(\xi,\eta)dl(\xi,\eta) \tag{22}$$

ここで$\alpha_m=\dfrac{m\pi}{h-d}$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

(ξ,η)は C 上の点を表す

$H_0{}^{(1)}$は第 1 種 Hankel 関数、K_0は第 1 種変形 Bessel 関数である。浮体外部の流場を表すf_0の表現に$H_0{}^{(1)}$を用いることにより、[R]Radiation condition が満足されるのである。また、$\overline{f}_0$等の上付きバーは法線方向の微分値を表す。

上記の式において積分路 C は、図-3 に示すように f_0, f_m についてはすべての浮体の境界、φ_0,φ_m については個々の浮体回りの境界をとるものである。

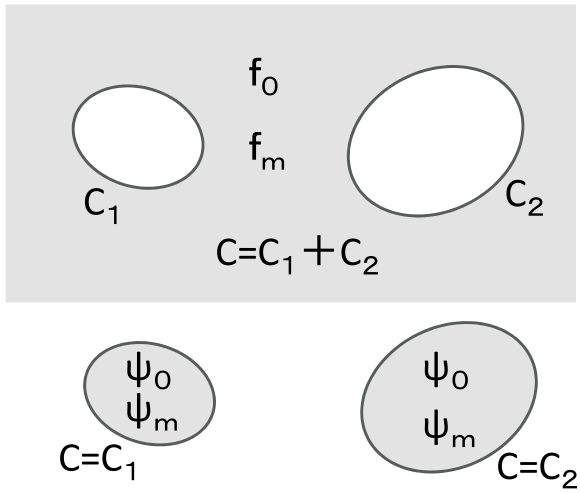


図-3　積分路 C

式(19)～(22)において、点(x,y)を境界 C 上の点(ξ',η')にもっていくと、Green 関数の特異性により、次のような積分方程式が得られる。

$$f_0(\xi',\eta')=-\int_C\Big\{\ f_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(-\frac{i}{2}H_0{}^{(1)}(k_0 R)\big)-\big(-\frac{i}{2}H_0{}^{(1)}(k_0 R)\big)\cdot\overline{f}_0(\xi,\eta)\ \Big\}dl(\xi,\eta) \tag{23}$$

$$f_m(\xi',\eta')=-\int_C\Big\{\ f_m(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(-\frac{K_0(k_m R)}{\pi}\big)-\big(-\frac{K_0(k_m R)}{\pi}\big)\cdot\overline{f}_m(\xi,\eta)\ \Big\}dl(\xi,\eta)$$

(24)

$$\varphi_0(\xi',\eta')=\int_C\Big\{\ \varphi_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\big(\frac{\ln(k_0 R)}{\pi}\big)-\big(\frac{\ln(k_0 R)}{\pi}\big)\cdot\overline{\varphi}_0(\xi,\eta)\ \Big\}dl(\xi,\eta) \tag{25}$$

$$\varphi_m(\xi',\eta')=\int_C\{\ \varphi_m(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}(-\frac{K_0(\alpha_m R)}{\pi})$$

$$-(-\frac{K_0(\alpha_m R)}{\pi})\cdot\bar{\varphi}_m(\xi,\eta)\ \}dl(\xi,\eta) \quad (26)$$

ここで $R=\sqrt{(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}$

ここで φ_0 に関する(21)(25)式の表現には注意が必要であることを付録-3 の中で記しておく。

さらに、図-4 に示すように浮体下部の境界 C において、浮体外部領域と浮体下部領域の速度ポテンシャルは連続でなければならないから、
次式のような条件が課せられる。

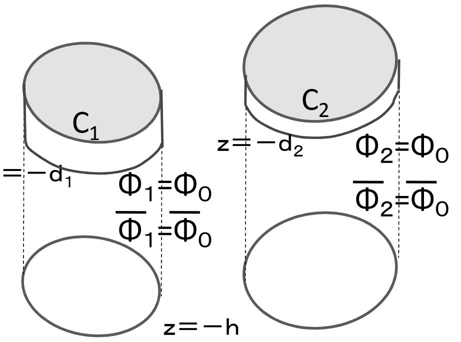


図-4　速度ポテンシャルの連続の条件

$$\Phi_0=\Phi_i \qquad \text{on } C_i \quad z=-h\sim-d_i \qquad (27)$$

$$\bar{\Phi}_0=\bar{\Phi}_i \qquad \text{on } C_i \quad z=-h\sim-d_i \qquad (28)$$

また(3)式の[H]条件より

$$\bar{\Phi}_0=v_j \qquad \text{on } C_i \quad z=-d_i\sim 0 \qquad (29)$$

であるので、(27)式に(9)(10)式を代入すると

$$f_0(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_{m=1} f_m(\xi',\eta')\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}$$

$$=\varphi_0(\xi',\eta')+\sum_{m=1}\varphi_m(\xi',\eta')\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i}$$

$$-i\omega U_j(\xi',\eta',z) \qquad \text{on } C_i \quad z=-h\sim-d_i \qquad (30)$$

という条件が得られる。また(28)(29)式に(9)(10)式を代入すると

$$\bar{f}_0(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_{m=1}\bar{f}_m(\xi',\eta')\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}$$

$$=\bar{\varphi}_0(\xi',\eta')+\sum_{m=1}\bar{\varphi}_m(\xi',\eta')\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i}$$

$$-i\omega\bar{U}_j(\xi',\eta',z) \qquad \text{on } C_i \quad z=-h\sim-d_i$$

$$=v_j(\xi',\eta',z) \qquad \text{on } C_i \quad z=-d_i\sim 0 \qquad (31)$$

という条件が得られる。
上の(30)(31)式は動揺する i 番目の浮体境界 C_i での条件であり、静止している他の浮体境界 C の場合は $U_j,\bar{U}_j$ や v_j は 0 である。$U_j,\bar{U}_j,v_j$ は動揺のモード j に応じて具体的に定められる。それらをまとめて付録－1 に示しておく。

上記(30)(31)式と(23)～(26)式を連立させて解くことにより、境界 C 上における係数関数の値が定められ、それらを(19)～(22)式に代入することにより速度ポテンシャル Φ_0 及び $\Phi_1,\Phi_2...$ が確定される。

その手順は以下の如くである。速度ポテンシャルの表示式(9)(10)式における z 方向の固有関数系は以下のような直交性を有する。

$$\int_{-h}^{0}\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}dz=0 \qquad (32)$$

$$\int_{-h}^{0}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}\frac{\cos k_n(z+h)}{\cos k_n h}dz=0 \qquad (33)$$

$$\int_{-h}^{0}\frac{\cosh^2 k_0(z+h)}{\cosh^2 k_0 h}dz=$$

$$\frac{\tanh k_0 h}{2k_0}+\frac{2he^{-2k_0h}}{1+e^{-4k_0h}+2e^{-2k_0h}} \qquad (34)$$

$$\int_{-h}^{0}\frac{\cos^2 k_m(z+h)}{\cos^2 k_m h}dz=$$

$$\frac{\tan k_m h}{2k_m}+\frac{h}{2\cos^2 k_m h} \qquad (35)$$

及び

$$\int_{-h}^{-d}1\cdot\cos\frac{m\pi(z+d)}{h-d}dz=0 \qquad (36)$$

$$\int_{-h}^{-d}\cos\frac{m\pi(z+d)}{h-d}\cos\frac{n\pi(z+d)}{h-d}dz=0 \qquad (37)$$

$$\int_{-h}^{-d} 1\cdot 1 dz = h-d \tag{38}$$

$$\int_{-h}^{-d} \cos^2 \frac{m\pi(z+d)}{h-d} dz = \frac{h-d}{2} \tag{39}$$

これらの直交性を利用することが領域分割法の一つの特徴である。すなわち、(30)式の両辺に1及び $\cos(m\pi(z+d)/(h-d))$ を乗じて $-h \le z \le -d$ における積分を施す。

また、(31)式の両辺に $\cosh k_0(z+h)/\cosh k_0 h$ 及び $\cos k_m(z+h)/\cos k_m h$ を乗じて $-h \le z \le 0$ における積分を施す。そうすると、上記の直交性により、以下のような形の関係式が得られる。

$$\varphi_0(i) = A_0 f_0(i) + \sum_{m=1}^{M} B_{0m} f_m(i) + P_{0U}(i)$$

$$i = 1 \to N$$

$$\varphi_n(i) = A_n f_0(i) + \sum_{m=1}^{M} B_{nm} f_m(i) + P_{nU}(i)$$

$$i = 1 \to N$$

$$n = 1 \to M$$

(40)

$$\overline{f}_0(i) = C_0 \overline{\varphi}_0(i) + \sum_{m=1}^{M} D_{0m} \overline{\varphi}_m(i) + Q_{0\overline{U}}(i)$$

$$i = 1 \to N$$

$$\overline{f}_n(i) = C_n \overline{\varphi}_0(i) + \sum_{m=1}^{M} D_{nm} \overline{\varphi}_m(i) + Q_{n\overline{U}}(i)$$

$$i = 1 \to N$$

$$n = 1 \to M$$

(41)

ここでi点は境界 $C=C_1+C_2+\ldots$ を合計N個に分割した線分の中点である。また、Mは速度ポテンシャルを表現する(9)(10)式において固有関数をM個までとることを意味する。式(40)(41)の中の係数 A_n, B_{nm}, C_n, D_{nm} は、煩雑であるので具体的には記述しないが、すべて固有関数の解析的積分で計算される既知の値である。また $P_{nU}, Q_{n\overline{U}}$ なども固有関数と特解の解析的積分で求められる既知の値である。

一方、(23)～(26)式からは、境界C上の値とその法線微分値との一次変換式が以下のような形で得られる。

$$f_0(i) = \sum_{j=1}^{N} F_0(i,j) \overline{f}_0(j)$$

$$f_m(i) = \sum_{j=1}^{N} F_m(i,j) \overline{f}_m(j) \qquad m = 1 \to M$$

$$\varphi_0(i) = \sum_{j=1}^{C_N} P_{0N}(i,j) \overline{\varphi}_0(j) \qquad \text{on each } C_N$$

$$\varphi_m(i) = \sum_{j=1}^{C_N} P_{mN}(i,j) \overline{\varphi}_m(j) \qquad \text{on each } C_N$$

$$m = 1 \to M$$

(42)

以上により、未知数 $f_0, f_m, \varphi_0, \varphi_m$ 及びその法線微分値、合計（M+1）*N*4個に対し、(40)(41)(42)式も合計（M+1）*N*4個であるので基本的に解くことができることがわかるが、効率良く解くために次の方法を採用する。まず、(42)式の一次変換式を(40)式に代入して法線微分値に関する関係式に変換する。さらにその式に(41)式を代入すると $\overline{\varphi}_0(i), \overline{\varphi}_m(i)$ のみを未知数とする（M+1）*N元の連立一次方程式が得られる。その連立方程式を解いて得られた解をもとに、上記と逆の手順をたどることにより、最終的に速度ポテンシャルを求めることができる。

上記の連立一次方程式の左辺の係数マトリックスは、水深h,浮体の数、形状寸法、配置と動揺周期のみで計算される値であり、動揺のモードには関係しない。右辺の列ベクトルのみが各動揺モードによって変化する。したがって左辺の係数をLU分解したマトリックスを用意しておけばすべての動揺モードの計算を効率良く行うことができる。

以上により速度ポテンシャルが求められたら、

圧力 $p(x,y,z)$ は

$$p(x,y,z) = -\rho \frac{\partial \Phi e^{-i\omega t}}{\partial t} = i\omega\rho\Phi(x,y,z) \quad (43)$$

より、浮体側面の圧力 p_1 は

$$p_1 = i\omega\rho\left[f_0(i)\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_{m=1}^{M} f_m(i)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \right] \quad (44)$$

浮体底面の圧力 p_2 は

$$p_2 = i\omega\rho\left[\varphi_0(x,y) + \sum_{m=1}^{M}\varphi_m(x,y) - i\omega U_j(x,y,-d) \right] \quad (45)$$

により求めることができる。これらをそれぞれの動揺モード成分向きに積分することにより、それぞれのモードの流体力が得られる。すなわち、(図-5 参照)

Surge Force= $\sum(-\cos\alpha \cdot p_1)$

Sway Force= $\sum(-\sin\alpha \cdot p_1)$

Heave Force= $\sum p_2$

Roll Moment= $\sum(\sin\alpha \cdot p_1 \cdot z) + \sum(p_2 \cdot y)$

Pitch Moment=

$$\sum(-\cos\alpha \cdot p_1 \cdot z) + \sum(-p_2 \cdot x)$$

Yaw Moment= $\sum(\cos\alpha \cdot p_1 \cdot y - \sin\alpha \cdot p_1 \cdot x)$

(46)

により流体力が求められる。

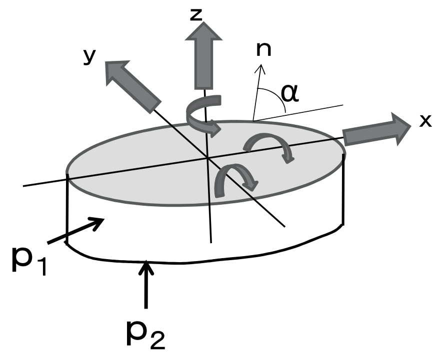


図-5　浮体固定座標に関する流体力

こうして求められる力あるいはモーメントの実数部分 F^r/ω^2 が付加質量あるいは付加慣性モーメント成分、虚数部分 F^i/ω が減衰力あるいは減衰モーメント成分となる。これらは次のように無次元化表示される。

$$a_{ij} = \frac{F^r{}_{ij}/\omega^2}{\rho\nabla\varepsilon_i\varepsilon_j} \quad , \quad b_{ij} = \frac{F^i{}_{ij}/\omega}{\rho\omega\nabla\varepsilon_i\varepsilon_j} \quad (47)$$

ここで F_{ij} は j モード動揺による i モードの流体力を表す。ε_j 等は j=1,2,3 のとき 1 、j=4,5,6 のとき L（無次元化に使う浮体の代表長さ）とする。また ∇ は無次元化に使う浮体の排水量である。

2.3 Diffraction 問題

複数浮体の場合の diffraction 問題は、図-6 に示すようにすべての浮体が固定されている状態に、一つの方向から規則波が入射してきた場合の流場を解き、その流場によって各浮体に働く力を解く問題である。

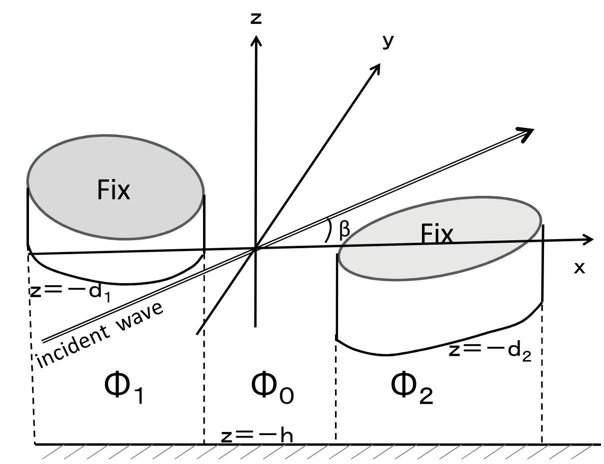


図-6　Diffraction 問題の一例

Diffraction 問題も radiation 問題とほぼ同じ手順で解くことができる。この場合も流場を浮体の外側の領域とそれぞれの浮体下部の領域に分け、それぞれにおける速度ポテンシャルを Φ_0 及び $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ と表す。それぞれの領域における速度ポテンシャルの満足すべき条件は以下の如くである。

浮体外部

[L]　$\nabla^2\Phi_0 = 0$　in fluid domain　(48)

[F]　$\dfrac{\omega^2}{g}\Phi_0 - \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z} = 0$　at z=0　(49)

[H]　$\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0$　on C　at z=-d~0　(50)

[B]　$\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z} = 0$　at z=-h　(51)

浮体下部（i 番目の浮体）

[L]　$\nabla^2\Phi_i = 0$　in fluid domain　(52)

[H]　$\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial n} = 0$　at bottom z=-d　(53)

[B]　$\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial z} = 0$　at z=-h　(54)

これらの条件を満足する速度ポテンシャルを以下のように仮定する。

$$\Phi_0 = \left[Q(x,y) + f_0(x,y)\right]\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_{m=1} f_m(x,y)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{55}$$

$$\Phi_i = \varphi_0(x,y) + \sum_{m=1}\varphi_m(x,y)\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i} \tag{56}$$

ここで

$$Q(x,y) \equiv -i\frac{g\zeta_a}{\omega}e^{ik_0(x\cos\beta + y\sin\beta)} \tag{57}$$

は β 方向に進行する振幅 ζ_a の入射波を表す。

この場合も浮体外部と下部の速度ポテンシャルの連続の条件（27）(28)式及び Φ_0 の[H]条件(50)式に(55)(56)式を代入することにより以下の関係式が得られる。

$$f_0(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_{m=1} f_m(\xi',\eta')\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}$$

$$= \varphi_0(\xi',\eta') + \sum_{m=1}\varphi_m(\xi',\eta')\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i}$$

$$-Q(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad \text{on } C_i \quad z=-h\sim -d_i$$

(58)

$$\overline{f}_0(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_{m=1}\overline{f}_m(\xi',\eta')\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}$$

$$= \overline{\varphi}_0(\xi',\eta') + \sum_{m=1}\overline{\varphi}_m(\xi',\eta')\cos\frac{m\pi(z+d_i)}{h-d_i}$$

$$-\overline{Q}(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad \text{on } C_i \quad z=-h\sim -d_i$$

$$= -\overline{Q}(\xi',\eta')\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad \text{on } C_i \quad z=-d_i\sim 0$$

(59)

上の(58)(59)式は(30)(31)式における $U_j, \overline{U}_j$ や v_j が $Q, \overline{Q}$ に変わったのみであるので、この後の手順は radiation 問題の場合とまったく同様にして解くことができる。したがって最終的に得られる連立一次方程式も右辺の列ベクトルが違うのみで、左辺の係数マトリックスは radiation 問題の場合と同一であるので、その際に LU 分解したマトリックスをそのまま使うことができる。

以上により速度ポテンシャルが求められたら、この場合の浮体側面の圧力 p_1 は

$$p_1 = i\omega\rho\left[Q(i) + f_0(i)\right]\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + i\omega\rho\sum_{m=1}^{M} f_m(i)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{60}$$

浮体底面の圧力 p_2 は

$$p_2 = i\omega\rho\left[\varphi_0(x,y) + \sum_{m=1}^{M}\varphi_m(x,y)\right] \tag{61}$$

により求めることができる。これらをそれぞれのモード成分向きに積分することにより、それぞれのモードの波力が得られる。

こうして求められる j モードの力あるいはモ

ーメント E_j を以下のように無次元化表示する。

$$e_j = \frac{E_j}{\rho g \zeta_a A_W \varepsilon_j} \tag{62}$$

ここで A_W は浮体の水線面積、ε_j は j=1,2,3 のとき 1、j=4,5,6 のとき L（無次元化に使う浮体の代表長さ）とする。

3. 流体力の関係

前章で述べた方法により radiation 流体力及び波力を計算するプログラムを作成した。本プログラムの検証のため、特異点分布法による計算との比較を行った例を付録－2 に示しておく。両者はほぼ完全に一致しており、本プログラムの妥当性が確認された。なお、計算にあたっては、解が収束するように固有関数の個数Mを決めなければならないが、通常はM=10 から 20 程度で十分である。

ここではその計算プログラムにより得られた計算結果をもとに、流体力間の関係を具体的に示すことにする。本章で述べる事柄の解析的証明については著者の解説論文[3)]を参照していただきたい。

計算に使用した浮体配置を図-7 に、計算パラメータを表-1 に示しておく。

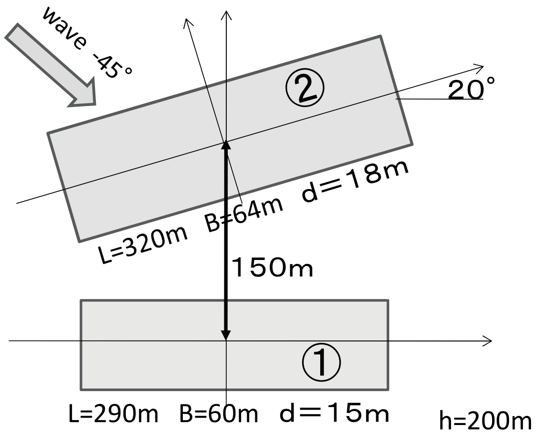


図-7　２浮体の配置

表-1　計算パラメータ

浮体①	L=290m, B=60m, d=15m 重心位置　水面下 -7m 慣動半径　kxx=15m, kyy=70m, kzz=70m
浮体②	L=320m, B=64m, d=18m 重心位置　水面下 -8m 慣動半径　kxx=17m, kyy=80m, kzz=80m
その他の条件	水深 200m 波向きは-45 度方向

3.1 Radiation 流体力の対称性

Radiation 流体力、すなわち i モードの動揺による j モードの流体力は、j モードの動揺による i モードの流体力と等しい、という対称性があることが知られている。(前著論文[3)]の(29)式参照)

複数浮体の場合は、

「m 番目の浮体の i モードの動揺によって
　n 番目の浮体の j モード方向に働く流体力」は、
「n 番目の浮体の j モードの動揺によって
　m 番目の浮体の i モード方向に働く流体力」と
等しい、ということになる。

２浮体 6 モードの場合、この組み合わせは 12*12=144 ケースもあるが、ここでは例として浮体①の heave と浮体②の pitch、及び浮体①の roll と浮体②の yaw の場合について計算結果を図-8a,8b に示す。図中の a①3-②5 は浮体②の pitch による浮体①の heave の付加質量係数、b①3-②5 は浮体②の pitch による浮体①の heave の減衰力係数を表す。図-8a,8b いずれも対称性が満足されていることがわかるが、図-8b においてやや差が見られるのは比較している流体力自身が小さいためである。

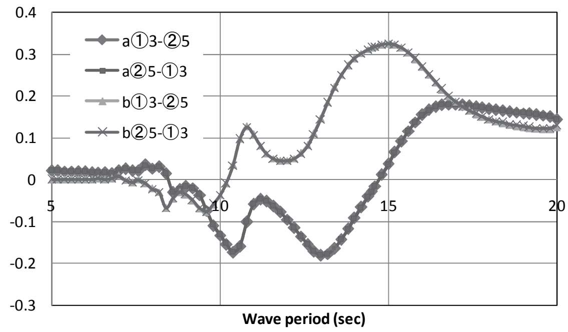


図-8a Radiation 流体力の対称性(①3-②5)

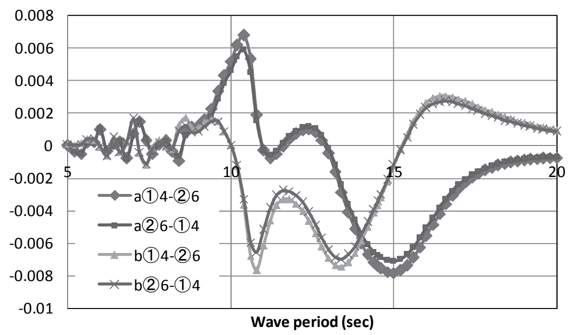


図-8b Radiation 流体力の対称性(①4-②6)

3.2 Kochin 関数

後で述べる造波減衰力と発散波の関係、Haskind-花岡-Newman の関係においては Kochin 関数が使

われる。ここでは領域分割法で浮体外部の速度ポテンシャルを(9)式や (55) 式のように表現した場合の Kochin 関数の式を示しておく。

Kochin 関数は遠方に発散していく波の振幅と位相を表すもので、(9)(55)式における $f_0(x,y)$ すなわち(19)式において点 (x,y) を遠方に持っていったときの表示式から得られる。式(19)においてｒが大なるとき

$$H_0^{(1)}(k_0r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{i(k_0 r - \pi/4)} \tag{63}$$

であるので、

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$
$$\approx R + (-\xi \cdot \cos\theta - \eta \cdot \sin\theta) \tag{64}$$

ここで $(x,y) = (R,\theta)$

を考慮すると

$$H_0^{(1)}(k_0r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 R}} e^{ik_0R - i\pi/4} e^{-ik_0(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)} \tag{65}$$

であるので、Kochin 関数が

$$H(\theta) = \frac{i}{2\omega k_0}\int_C \left\{ f_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n} - \overline{f}_0(\xi,\eta) \right\}$$
$$\times e^{-ik_0(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta)} dl(\xi,\eta) \tag{66}$$

により求められる。

3.3 造波減衰力と発散波の関係

造波減衰力 N_{ij} （ｊモードの動揺によるｉモードの減衰力)はｊモード動揺の場合の Kochin 関数 $H_j(\theta)$ 及び ｉ モード動揺の場合の Kochin 関数 $H_i(\theta)$ を用いて

$$N_{ij} = \frac{\rho\omega D k_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_i^*(\theta) H_j(\theta) d\theta \tag{67}$$

と表される。(前著論文[3]の(34b)式参照)

ここでアスタリスクは複素共役を表す。また D は水深影響係数と呼ばれるもので

$$D \equiv 2k_0\int_{-h}^{0} \left\{ \frac{\cosh^2 k_0 h(z+h)}{\cosh^2 k_0 h} \right\} dz \tag{68}$$
$$= \tanh k_0 h + k_0 h / \cosh^2 k_0 h$$

である。式(67)を(47)式と同様に無次元化すると

$$b_{ij} = \frac{D k_0}{4\pi \nabla \varepsilon_i \varepsilon_j}\int_0^{2\pi} H_i^*(\theta) H_j(\theta) d\theta \tag{69}$$

$i = j$ の場合は $b_{ii} = \dfrac{D k_0}{4\pi \nabla \varepsilon_i^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| H_i(\theta) \right|^2 d\theta$

となる。

この計算例として、通常の圧力積分による b_{ij} と(69)式によるものを比較して図-9a,9b に示す。図-9a は浮体①の heave による浮体①の sway の減衰力係数を、通常の(47)式から求めたものと(69)式から求めたものを示す。図-9b は浮体①の heave による浮体①の heave の減衰力係数及び浮体②の heave による浮体②の heave の減衰力係数について、同じく(47)(69)式から求めたものを示す。いずれにおいても両者良く一致しており、(67)式の関係が満足されていることがわかる。

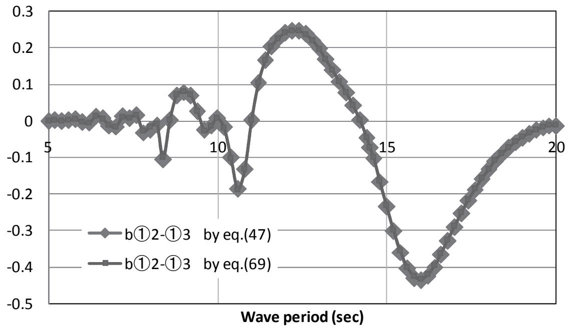


図-9a　減衰力係数の比較（①2-①3）

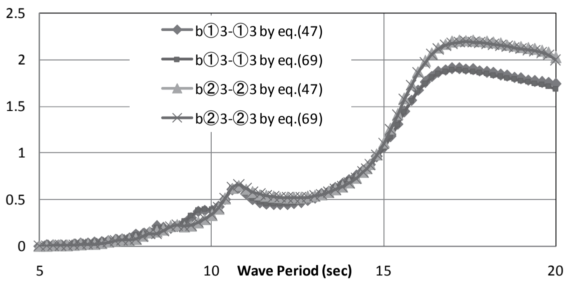


図-9b　減衰力係数の比較（①3,②3）

3.4 Haskind-花岡-Newman の関係

Radiation 問題と diffraction 問題の間には

Haskind-花岡-Newman の関係と呼ばれる以下のような関係がある。(前著論文[3]の(48)式参照)

$$E_j(\beta) = \rho g \xi_a D H_j(\beta + \pi) \tag{70}$$

これは β 方向の入射波によって m 番目の浮体に働く j モードの波力 $E_j(\beta)$ は、m 番目の浮体の j モードの動揺によって $\beta + \pi$ 方向に発散していく波の複素振幅で表されることを示している。
式(62)と同様な無次元表示をすると

$$e_j(\beta) = \frac{D}{A_W \varepsilon_j} H_j(\beta + \pi) \tag{71}$$

これについても計算例を図-10a,10b に示す。図-10a は浮体①と②に働く heave 力、図-10b は浮体①と②に働く yaw モーメントについて、それぞれ(62)式及び(71)式から求めた結果を示している。普通に diffraction 問題を解いて圧力積分より求めた e_j と、radiation 問題を解いてその Kochin 関数から求めた結果は良く一致し、複数浮体の場合も Haskind-花岡-Newman の関係が成り立つことがわかる。

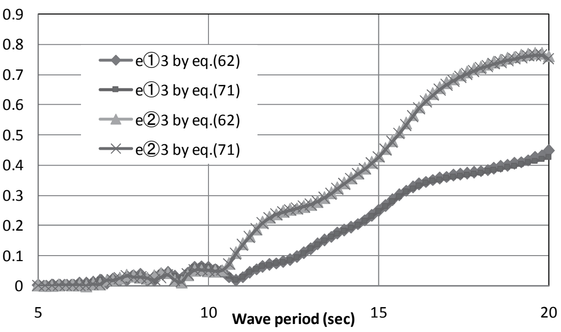


図-10a Haskind-花岡-Newman の関係（①3,②3)

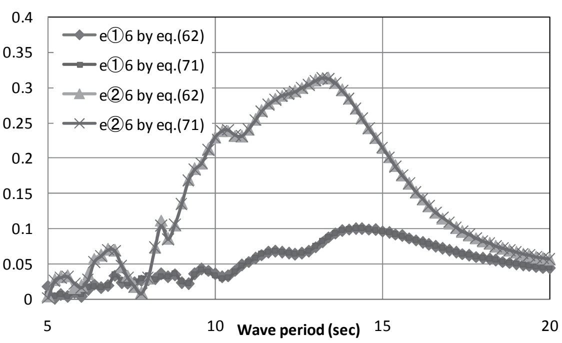


図-10b Haskind-花岡-Newman の関係（①6,②6)

また、図-11a,11b は波周期 8 秒のとき、浮体①に働く sway 力とその位相を波の入射角 β ベースに示したものである。波力の波向きによる変化が良くわかる。

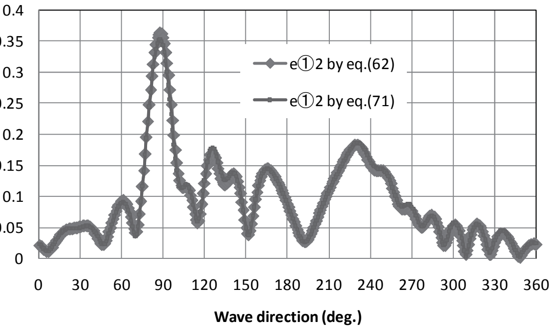


図-11a　浮体①に働く sway 力

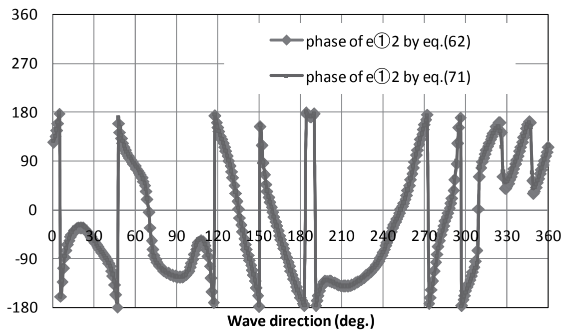


図-11b　浮体①に働く sway 力の位相

4. 規則波中動揺応答の解析

波浪中の浮体の運動方程式は一般的に次式で与えられる。

$$\sum_{j=1} (m_{ij} + M_{ij})\ddot{x}_j + N_{ij}\dot{x}_j + c_{ij}x_j = E_i \tag{72}$$

ここで $x_j(t) = X_j e^{-i\omega t}$ とすると

$$\sum_{j=1} \left[-\omega^2 (m_{ij} + M_{ij}) - i\omega N_{ij} + c_{ij} \right] X_j = E_i \tag{73}$$

と書ける。ここで

m_{ij} は質量あるいは慣性モーメント

M_{ij} は付加質量あるいは付加慣性モーメント

N_{ij} は造波減衰係数

c_{ij} は静水圧に基づく復原力係数

E_i は波力あるいはモーメント

である。m_{ij} と c_{ij} は各浮体毎に次のように与えられる。

$$m_{ii}=\rho\nabla \qquad \text{for i=1~3}$$

$$m_{ii}=I_{ii}=\rho\nabla k_{ii} \qquad \text{for i=4~6} \tag{74}$$

$$c_{33}=\rho g A_W$$

$$c_{44}=\rho g\nabla\overline{GM} \quad , \quad c_{55}=\rho g\nabla\overline{GM}_l \tag{75}$$

これ以外に c_{35} 等がありえるが、他はすべて 0 である。ここで I_{ii},k_{ii}（i=4~6）は x, y, z 回りの慣性モーメント及び慣動半径、$\overline{GM},\overline{GM}_l$ はそれぞれ横メタセンター高さ、縦メタセンター高さである。

M_{ij} と N_{ij} が radiation 流体力の実数成分と虚数成分で、E_i が diffraction 問題の解から得られる波力である。あるいは E_i は(70)式のように Haskind-花岡-Newman の関係を用いて radiation 問題の Kochin 関数から得ることもできる。したがって、これまでに述べてきた手法によってこれらの流体力、波力を求めることができるので、(73)式の運動方程式を解くことができる。

式(73)において、力の場合は $\rho\nabla\omega^2\zeta_a$ で、モーメントの場合は $\rho\nabla\omega^2\zeta_a L$ で両辺を除して無次元化を行うことにする。ここで ∇,L は代表する浮体の排水量と長さとする。そうすると、運動方程式(73)は(47)(62)式の表記を使って

$$\sum_{j=1}\left[-(m'_{ij}+a_{ij})-ib_{ij}+c'_{ij}\right]\frac{X_j}{\zeta_a}=\frac{gA_W}{\omega^2\nabla}e_i \tag{76}$$

のように表される。ここで m'_{ij},c'_{ij} はそれぞれの無次元表記とする。

さて、2 章、3 章における流体力、波力の解析では座標原点を静止水面上 z=0 に取っていたが、浮体の運動は重心 G に関して考えることにしたい。そこで座標原点に対して得られた流体力、波力を重心 G に対するそれに変換する手順を以下に示す。参考文献 4)参照。

重心 G の上下位置は z 軸の正方向(鉛直上向き)に距離 l_G のところにあるとする。一般的に、座標原点に対する力 F_i が、座標原点に関する変位 X_j によって

$$F_i=\sum_j T_{ij}X_j \tag{77}$$

のように表されるとする。すなわち、2 章、3 章で求めた a_{ij},b_{ij} 等が T_{ij} に対応する。ここで重心 G に対する力 $F^G{}_i$ に変換するマトリックスを $T^G{}_{ij}$ とし、

$$F^G{}_i=\sum_j T^G{}_{ij}X_j \tag{78}$$

とすると、T_{ij} と $T^G{}_{ij}$ の関係は

$$T^G{}_{ij}=T_{ij} \qquad \text{for i=1, 2, 3 and 6}$$

$$T^G{}_{4j}=T_{4j}+l_G T_{2j}$$

$$T^G{}_{5j}=T_{5j}-l_G T_{1j} \tag{79}$$

と表される。また、重心 G に関する変位 $X^G{}_j$ と X_j の関係は

$$X_1=X^G{}_1-l_G X^G{}_5$$

$$X_2=X^G{}_2+l_G X^G{}_4$$

$$X_j=X^G{}_j \qquad \text{for j=3, 4, 5 and 6} \tag{80}$$

である。この(79)(80)式を考慮して、T_{ij} から

$$F^G{}_i=\sum_j T'_{ij}X^G{}_j \tag{81}$$

を満足する T'_{ij} に変換することができる。

波力についても次式により、座標原点に関する波力 e_i から、重心 G に関する波力 $e^G{}_i$ へ変換することができる。

$$e^G{}_i=e_i \qquad \text{for i=1, 2, 3 and 6}$$

$$e^G{}_4=e_4+l_G e_2$$

$$e^G{}_5 = e_5 - l_G e_1 \tag{82}$$

以上のようにして、重心 G の動揺振幅 $X^G{}_j$ に関する運動方程式が

$$\sum_{j=1}\left[-(m'_{ij}+a'_{ij})-ib'_{ij}+c'_{ij}\right]\frac{X^G{}_j}{\zeta_a}=\frac{gA_W}{\omega^2\nabla}e^G{}_i \tag{83}$$

と表される。ここで a'_{ij}, b'_{ij} は a_{ij}, b_{ij} を $T_{ij} \to T'_{ij}$ のように変換したものとする。

一般に、左右対称な単一浮体の場合、運動方程式を surge-pitch 型、sway-roll 型、heave 型、yaw 型に分離して取り扱うことができるが、複数浮体が任意に配置されている場合は、すべてのモードの動揺が連成するので、分離せずに(83)式を全体として解くことになる。しかしそれは特に困難なことではない。

計算例として、3 章の図-7 の２浮体の場合についての動揺振幅を図-12a,12b に示しておく。

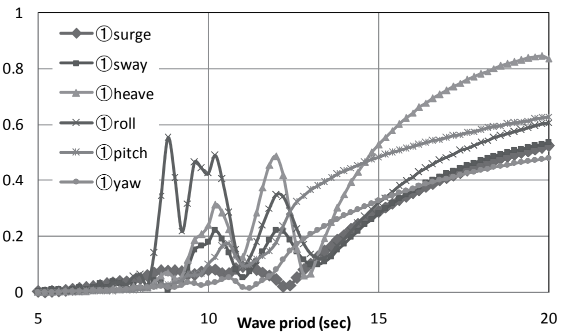


図-12a 浮体①の動揺応答振幅

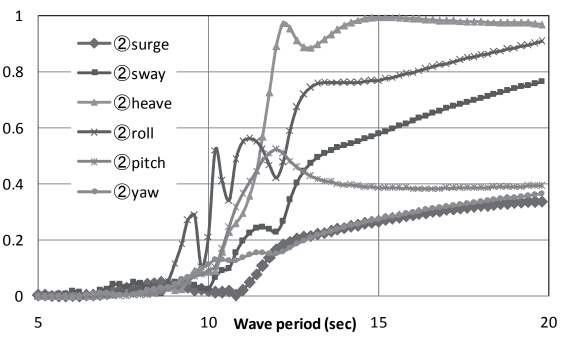


図-12a 浮体②の動揺応答振幅

5. まとめ

複数の浮体が波浪中に存在する場合の波力、流体力を 3 次元領域分割法で解析する方法及び動揺応答の解析法を示した。本法で取り扱える浮体形状は側面が鉛直で底面が平面形状に限られるが、計算データの入力が容易でかつ計算時間が短時間ですむ。本法は浮体動揺の概要を簡便に把握するのに有用であろう。

3 章においては、波力、流体力間の関係などについて多数の計算例を示した。これらは、著者が執筆した動揺流体力に関する解説論文 3)の具体例となっている。

さらに付録として、3 次元領域分割法の場合の irregular frequency 現象とその除去法、複数浮体の場合の自由動揺応答とその発散波の性質・利用法についてまとめておいた。本論で述べている事柄はすべて単一浮体の場合にも適用することができる。本論が、浮体の動揺問題に関心のある初学者の理解に役立てば幸いである。

最後に、本プログラム検証のための計算を快く引き受けていただいた大川豊氏に感謝の意を表する。

参考文献

1）井島武士 他：「有限水深域の波による楕円および矩形浮体の運動と波の変形」、土木学会論文報告集第 244 号(1975)
2）永田修一 他：「3 次元領域分割法による浮体運動の計算」、海岸工学講演集第 37 巻(1990)
3）大松重雄：「浮体の動揺理論における流体力の関係について」、海上技術安全研究所研究報告第 7 巻第 1 号(2007)
4）日本造船学会海洋工学委員会性能部会：「実践浮体の流体力学、前編-動揺問題の数値計算法 6.7 浮体の波浪中運動方程式」成山堂(2003)
5）大川豊　他：「浮体に働く外力及び流体力の推定法に関する研究」船舶技術研究所報告別冊 6 号（1985）
6）Ohmatsu,S.：「A New Simple Method to Eliminate the Irregular Frequencies in the Theory of Water Wave Radiation Problems」, Papers of Ship Research Institute, No.70 (1983)
7）大松重雄：「超大型ポンツーン型浮体の波浪中弾性応答計算」、日本造船学会論文集第 182 号（1997）
8）別所正利：「船体運動のイムパルス応答とその発散波について」、防衛大学理工学研究報告、第 11 巻 2 号（1973）
9）大松重雄：「浮体の impulse 応答による発散波の Fourier 変換」、西部造船会会報第 60 号（1980）

付録－１　Radiation 問題の特解

Radiation 問題において、浮体下部の領域における特解 $U_j(x,y,z)$ は次の条件を満足する実関数である。

$$[L] \quad \nabla^2 U_j = 0 \quad \text{in fluid domain}$$

$$[H] \quad \frac{\partial U_j}{\partial z} = v_j \quad \text{at z=-d}$$

$$[B] \quad \frac{\partial U_j}{\partial z} = 0 \quad \text{at z=-h} \qquad (A\text{-}1)$$

Surge, sway 及び yaw モードに関しては $v_j = 0$ であるので、$U_j(x,y,z) = 0$ である。その他のモードについては、

Heave モード　（$v_3 = l_3$）

$$U_3(x,y,z) = \frac{l_3 h}{2(1-d/h)}\left[(1+\frac{z}{h})^2 - (\frac{x^2+y^2}{2h^2})\right]$$

Roll モード　（$v_4 = l_4 y$）

$$U_4(x,y,z) = \frac{l_4 h}{2(1-d/h)}\left[y(1+\frac{z}{h})^2 - y(\frac{x^2+y^2}{4h^2})\right]$$

Pitch モード　（$v_5 = -l_5 x$）

$$U_5(x,y,z) = \frac{-l_5 h}{2(1-d/h)}\left[x(1+\frac{z}{h})^2 - x(\frac{x^2+y^2}{4h^2})\right] \qquad (A\text{-}2)$$

とする。実際、これらが(A-1)式を満足することはすぐに確かめることができる。

また、式(31)における浮体側面での v_j は

$$v_1 = -i\omega l_1 \cos\alpha$$

$$v_2 = -i\omega l_2 \sin\alpha$$

$$v_3 = 0$$

$$v_4 = i\omega l_4 z \sin\alpha$$

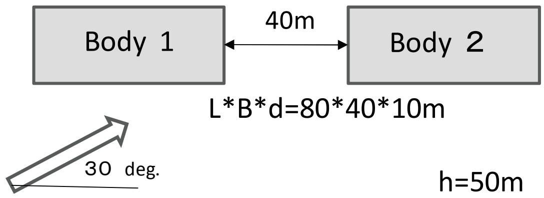
$$v_5 = -i\omega l_5 z \cos\alpha$$

$$v_6 = -i\omega l_6 (x\sin\alpha - y\cos\alpha) \qquad (A\text{-}3)$$

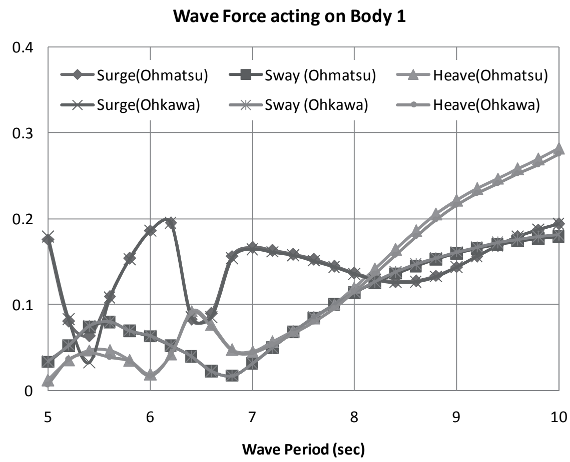
で与えられる。ここで α は側面の法線が x 軸となす角である。

付録－２　特異点分布法による計算との比較

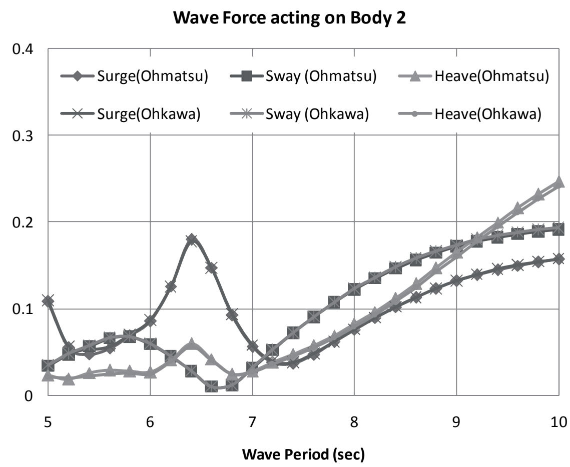
本プログラムの検証のため、大川[5)] の特異点分布法を用いたプログラムによる計算との比較を行った結果を以下に示す。計算条件は付図-1 に示すような同一形状の２浮体である。それぞれの浮体に働く波力を付図-2a, 2b に示す。



付図-1　プログラム検証計算の浮体配置図



付図-2a　浮体１に働く surge, sway, heave 力



付図-2b　浮体２に働く surge, sway, heave 力

いずれも両者ほぼ完全に一致しており、計算プログラムの妥当性が示されている。

付録－３　Irregular frequency とその除去法

境界要素法などで浮体の radiation 問題や diffraction 問題を解くときに、浮体内部の仮想流体と関連するいわゆる irregular frequency 問題があることが知られている[6)]。領域分割法においても同様の問題が発生する。ここでは領域分割法において如何にして irregular frequency が現れるか、その予測法及び除去法について述べる。以後、ここでは irregular frequency を I.R と略記することにする。

領域分割法において、浮体外部で遠方まで伝播する波動を表す項、(9)式の $f_0(x,y)$ は(15)式の Helmholtz の方程式を満足するもので､Green の定理により浮体外部領域では(19)式のように表される。この $f_0(x,y)$ は点 (x,y) が浮体の内部では亘等的に 0 でなければならないが、特定の周波数においては固有解を有し､境界 C 上において $f_0=0$ でも内部で $f_0\neq 0$ となる場合がある。その周波数では浮体外部においても f_0 が(19)式で一意に定められなくなる。すなわち、領域分割法における I.R は､「浮体境界 C 上で $f_0=0$ で、かつ(15)式の Helmholtz の方程式を満足する亘等的に 0 でない解が存在する周波数」である。任意の平面形状について、この周波数を予測することは困難であるが、平面形状が矩形の場合は容易に予測することができる。すなわち、$L\times B$ の矩形周囲で 0 となる f_0 は

$$f_0(x,y)=\sin\left\{\alpha\pi\left(\frac{x}{L}-\frac{1}{2}\right)\right\}\sin\left\{\beta\pi\left(\frac{y}{B}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

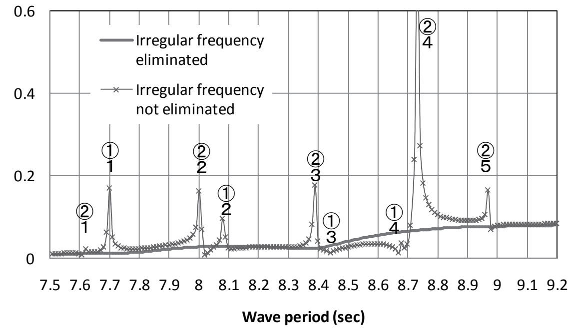
ここで $\alpha=1,2,3...\quad\beta=1,2,3...$　(A-4)

と表される。この f_0 はまた(15)式を満足しなければならないから、(A-4) を(15)式に代入すると、α,β と波数 k_0 の関係が

$$k_0=\sqrt{\left(\frac{\alpha\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\beta\pi}{B}\right)^2}\qquad\text{(A-5)}$$

のように得られる。これにより矩形浮体の場合の I.R を予測することができる。

実際に、計算例として、3 章の図-7 の 2 浮体の計算結果を示そう。付図-3 は波周期 7.5 秒～9.2 秒間を細かい刻みで計算した波力の例（浮体②の pitch モーメント）である。鋭いピークが I.R を表している。本文で示した計算結果にこのような変動が見られないのは、後で述べる I.R 対策が施してあるからである。付表-1 は(A-5)式によって、それぞれの浮体について予測した I.R（周期 7.5 秒から 9.2 秒の範囲についての予測）であり、その予測が付図-1 のピークの波周期と良く一致していることがわかる。また、それぞれのピークがどちらの浮体に起因するものであるかということもわかる。



付図-3　浮体②に働く pitch モーメント
（I.R 対策を施さない場合）

付表-1　予測された I.R の周期

番号	浮体①	浮体②
1	7.699 sec	7.618 sec
2	8.085	8.005
3	8.432	8.389
4	8.680	8.729
5	-	8.971

次に I.R の除去法について述べる。その方法は著者が以前、2 次元境界要素法で動揺問題を扱うときに採用した方法[6)]を 3 次元の場合に適用するものである。その考え方は、f_0 は浮体の内部領域では亘等的に 0 出なければならないのであるから、0 以外の値をとり得ないよう、すなわち(A-4)式のような波動が有りえないように、浮体内部の一点 (x_0,y_0) で以下のような条件を課す。

$$f_0(x_0,y_0)=0$$

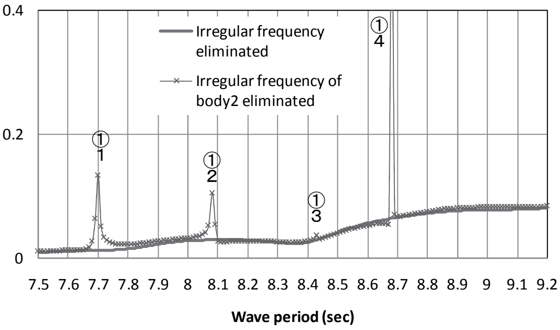
$$\frac{\partial f_0(x_0,y_0)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f_0(x_0,y_0)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}=0 \qquad \text{(A-6)}$$

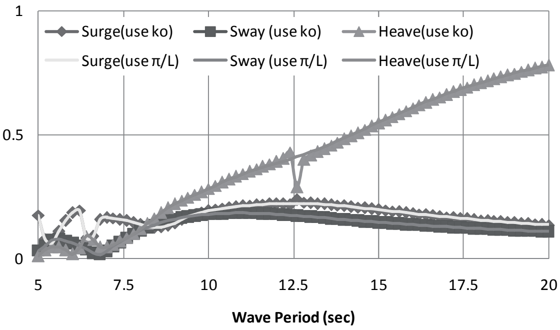
式(23)から(42)式の $F_0(i,j)$ の一次変換マトリックスを作成するときに、この４条件も追加し、最小二乗法を適用する。点 (x_0,y_0) の位置は任意であるが浮体のほぼ中央の点とする。

このような対策を施せば I.R は簡単に取り除くことができる。付図-3 には、２浮体のそれぞれ中央の点においてこのような対策をとり、I.R を取り除いた結果も示してある。付図-4 は浮体②についてのみ対策を施した場合で、浮体①に起因する I.R が残っていることがわかる。



付図-4　浮体②に働く pitch モーメント
（浮体②にのみ I.R 対策を施こした場合）

以上により I.R は簡単に除去することができるが、さらに３次元領域分割法に特有の特異周波数が存在する。例として付図-1 の浮体について、波周期 20 秒まで計算した結果を付図-5 に示す。



付図-5　浮体１に働く surge, sway, heave 力

この図を見ると、波周期 12.5 秒付近に不自然な変動があることがわかる。その原因を探ったところ、$\varphi_0(\xi',\eta')$ を表現する（25）式がこの周期で singular になることがわかった。したがってその周期は浮体の寸法形状と k_0 によって決まることになる。式(21)(25)による φ_0 の表現は、3 次元領域分割法の創始者井島[1)]から永田[2)]等へ伝承され、そして著者[7)]も超大型浮体の弾性応答の計算で使用していた。この現象がおきるのは波長が浮体寸法よりかなり長い周波数の１点でのみであり、いままで気付かれなかったものと思われる。この現象を避ける方法は簡単である。φ_0 を表現する際に k_0 を使う必要はないのであるから、周期によって変化することのない値（例えば π/L）を使用すればよい。付図-5 にはそうした場合の計算結果も示してある。不自然な変動がなくなっていることがわかる。

付録－４　浮体の自由動揺応答とその発散波

ここで自由動揺応答とは、どれか一つの浮体に初期変位を与えておき、瞬時に放した後のそれぞれの浮体のいわゆる Free Oscillation のことである。このような自由動揺応答とそれによる発散波については、単一浮体の場合の考察が文献８)９)にある。ここではその考察を複数浮体にも適用し、一般的な記述を行うことにする。自由動揺応答を扱うので、まず時間領域の浮体の運動方程式の一般形から記述する。

$$\sum_{j=1}^{M}(m_{ij}+\mu_{ij})\ddot{x}_j(t)+c_{ij}x_j(t)+\int_{-\infty}^{t}l_{ij}(t-t')\ddot{x}_j(t')dt'=e_i(t) \qquad \text{(A-7)}$$

ここで

x_j　：j モードの変位

m_{ij}　：浮体の質量あるいは慣性モーメント

μ_{ij}　：付加質量あるいは付加慣性モーメント

c_{ij}　：復原力あるいは復原モーメントの係数

l_{ij}　：運動の履歴による流体力を表す係数

e_i　：i モードの外力

M ：動揺モードの数＝浮体数＊6

この運動方程式に Fourier 変換を施すと周波数領域の運動方程式が得られる。以下、Fourier 変換、逆 Fourier 変換を次のように定義する。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad \text{(A-8)}$$

$t=0$ まで $x(t)=0,\dot{x}(t)=0$ として $\ddot{x}(t)$ の Fourier 変換を行うと

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{x}(t)e^{-i\omega t}dt=\left[\dot{x}(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=i\omega\left[x(t)e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty}-\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt=-\omega^2X(\omega) \quad \text{(A-9)}$$

したがって(A-7)式の Fourier 変換は

$$\sum_{j=1}^{M}\left[-\omega^2(m_{ij}+\mu_{ij}+L_{ij}(\omega))+c_{ij}\right]X_j(\omega)=E_i(\omega) \quad \text{(A-10)}$$

と表される。

（ここで $\mu_{ij}+L_{ij}(\omega)$ の実数部分が本文(73)式における M_{ij} に、虚数部分が N_{ij} に対応する。）

ここで外力として、β 方向に進行する振幅 ζ_a の波による力を考えると $E_i(\omega;\beta)$ は Haskind-花岡-Newman の関係により

$$E_i(\omega;\beta)=\rho g\zeta_a DH_i(\omega;\beta+\pi) \quad \text{(A-11)}$$

で与えられる[3)]。ここで $H_i(\omega;\beta+\pi)$ は、平水中で浮体が i モードの動揺をしたときに $(\beta+\pi)$ 方向に発散していく波の振幅を表す Kochin 関数である。

式(A-11)の関係及び、

$$m_{ij}+\mu_{ij}+L_{ij}(\omega)\equiv\Delta_{ij}(\omega)$$

$$-\omega^2\Delta_{ij}(\omega)+c_{ij}\equiv A_{ij}(\omega) \quad \text{(A-12)}$$

の表記を用いると、運動方程式(A-10)は簡単には

$$\sum_{j=1}^{M}A_{ij}X_j=\rho g\zeta_a DH_i \quad \text{(A-13)}$$

と表され、その解は

$$X_i=\rho g\zeta_a D\cdot\sum_{j=1}^{M}B_{ij}H_j \quad \text{(A-14)}$$

と表される。ここで B_{ij} は A_{ij} の逆行列とする。

この変位 X_i を ζ_a で正規化した $M_i=X_i/\zeta_a$ が最終的に求めたいいわゆる波浪中応答関数である。すなわち

$$M_i=\rho gD\cdot\sum_{j=1}^{M}B_{ij}H_j \quad \text{(A-15)}$$

である。

次に、平水中で浮体のうちのどれかひとつに N モードの初期値 α_N を与え、$t=0$ でリリースするいわゆる Free Oscillation（自由動揺）について考察する。

このときは、N モードの加速度 $\ddot{x}_N(t)$ の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{x}_N(t)e^{-i\omega t}dt=\left[\dot{x}_N(t)e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}_N(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=i\omega\left[x_N(t)e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty}-\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}x_N(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=-i\omega\alpha_N-\omega^2X_N(\omega) \quad \text{(A-16)}$$

N モード以外の $\ddot{x}_j(t)$ の Fourier 変換は前と同様 $-\omega^2X_j(\omega)$ であり、また、この場合は外力は 0 であるので、(A-7)式の Fourier 変換は

$$\sum_{j=1}^{M}A_{ij}X_j=i\omega\alpha_N\Delta_{iN} \quad \text{(A-17)}$$

となる。また、自由動揺のときの N モードの速度 $\dot{x}_N(t)$ の Fourier 変換は

$$V_N(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}_N(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\left[x_N(t)e^{-i\omega t}\right]_0^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}x_N(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\alpha_N+i\omega X_N(\omega) \quad \text{(A-18)}$$

であり、他のモード $j \neq N$ の場合は

$$V_j(\omega) = i\omega X_j(\omega) \tag{A-19}$$

であるので、(A-17)式の変位に関する方程式において、(A-18)(A-19)式を代入して、速度に関する方程式に書き換えると

$$\sum_{j=1}^{M} A_{ij}V_j + A_{iN}\alpha_N = -i\omega^2\alpha_N\Delta_{iN}$$
$$\therefore \sum_{j=1}^{M} A_{ij}V_j = -\alpha_N c_{iN} \tag{A-20}$$

となる。式(A-20)の解は

$$V_i = -\alpha_N \cdot \sum_{j=1}^{M} B_{ij}c_{jN} \tag{A-21}$$

と表される。

さて、この自由動揺による発散波であるが、一般に浮体の動揺による発散波は､各モードの Kochin 関数 $H_j(\omega)$ と各モードの動揺速度 $V_j(\omega)$ より、

$$\mathrm{I}(\omega) = -i\frac{\omega}{g}\sqrt{\frac{k_0}{2\pi R}}e^{-ik_0R+\frac{\pi}{4}i}\sum_{j=1}^{M} V_j(\omega)H_j(\omega) \tag{A-22}$$

で与えられる [3)9)]。

ここで $R = \sqrt{x^2+y^2}$ である。

したがって、自由動揺の速度が(A-21)式で与えられる場合の発散波は、

$$\sum_{j=1}^{M} V_j(\omega)H_j(\omega) =$$
$$-\alpha_N(B_{11}c_{1N} + B_{12}c_{2N} + \cdots\cdots + B_{1M}c_{MN})\cdot H_1$$
$$-\alpha_N(B_{21}c_{1N} + B_{22}c_{2N} + \cdots\cdots + B_{2M}c_{MN})\cdot H_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$-\alpha_N(B_{M1}c_{1N} + B_{M2}c_{2N} + \cdots\cdots + B_{MM}c_{MN})\cdot H_M \tag{A-23}$$

であるので、これは(A-15)式に示されている応答関数 $M_i(\omega)$ を使って

$$\sum_{j=1}^{M} V_j(\omega)H_j(\omega) =$$
$$\frac{-\alpha_N}{\rho g D}(c_{1N}M_1 + c_{2N}M_2 + \cdots\cdots + c_{MN}M_M) \tag{A-24}$$

と表すことができる。ここで B_{ij} の対称性を使っている。（第３章で述べたように、radiation 流体力は対称であり、また静的復原力の項も[補-1]に示すように対称であるので、 A_{ij} が対称行列、すなわちその逆行列の B_{ij} も対称である。）

以上により､N モードの自由動揺による発散波の Fourier 変換が以下のように表されることがわかる。

$$\mathrm{I}(\omega) = i\frac{\alpha_N\omega}{\rho g^2 D}\sqrt{\frac{k_0}{2\pi R}}e^{-ik_0R+\frac{\pi}{4}i}(c_{1N}M_1 + c_{2N}M_2 + \cdots\cdots + c_{MN}M_M) \tag{A-25}$$

式(A-25)から次のことが言える。

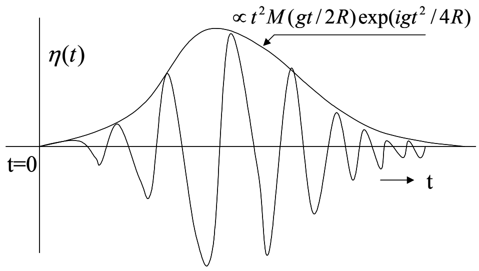
- 復原力(モーメント)係数 c_{ij} は浮体の形状から直ちに求めることができるものであるので､M 個それぞれのモードについて初期値を与えて自由動揺させて、発散波の Fourier 変換を M 個得れば､すなわち(A-25)式を M 個得れば、その連立方程式より $M_i(\omega)$　$i = 1$ ～M を求めることができる。
- 通常は連成項 c_{ij} $(i \neq j)$ は 0 か非常に小さいので､1 回の自由動揺で 1 個の $M(\omega)$ を求めることができる。
- ここで述べた方法によって浮体の波浪中動揺応答関数を実験的に求める場合、造波機も必要とせず､すべての周波数のすべての方向からの入射波に対する応答関数をたった一回の自由動揺による発散波を周囲で計測すればよいので､非常に効率が良い方法と言えるが､(A-25)式に見られるように､周波数が小さいときには、小さい値を小さい値で除する演算となり､精度が悪くなるのが欠点である。

さらに、(A-25)式の逆 Fourier 変換により時間領域にもどし、発散波の時系列を求めると、
（演算に Stationary phase method[補-2]を使用）

$$\eta(t)=\frac{\alpha_N c_{NN}}{4\sqrt{2}\pi\rho R^3}t^2 M_N\left(\frac{gt}{2R}\right)e^{i\frac{gt^2}{4R}}$$

(A-26)

となる。ここでは簡単のため、水深は無限大、連成項の c_{ij} は $i \neq j$ のときは 0 とした。この (A-26)式は、発散波の時系列のエンベロープからも応答関数を求めることができることを示している。付図-6 にその概念図を示す。

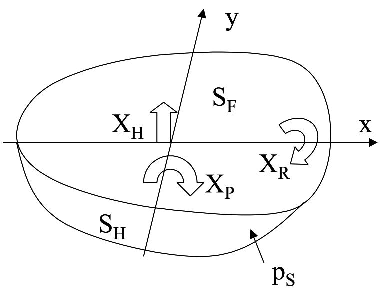


付図-6　発散波の時系列の概念図

［補-1］

連成復原項 c_{ij} の対称性について

Heave（X_H）と Roll（X_R）と Pitch（X_P）について記述する。付図-7 参照。



付図-7　復原項の座標と記号

変位による静水圧の変化分は

$$p_S=-\rho g(X_H+yX_R-xX_P) \quad \text{(A-27)}$$

であるので、それによる Heave 力は

$$F_H=\int_{S_H}p_S n_z dS=-\rho g\int_{S_H}(X_H+yX_R-xX_P)n_z dS$$

(A-28)

である。ここでガウスの定理

$$\int_V\frac{\partial F}{\partial x}dV=\int_S Fn_x dS\ \text{,etc} \quad \text{(A-29)}$$

を使うと

$$\int_{S_H+S_F}(X_H+yX_R-xX_P)n_z dS=\int_V\frac{\partial(X_H+X_R-xX_P)}{\partial z}dV=0$$

$$\therefore \int_{S_H}(X_H+yX_R-xX_P)n_z dS=-\int_{S_F}(X_H+yX_R-xX_P)n_z dS$$

$$=\int_{S_F}(X_H+yX_R-xX_P)dxdy \quad \text{(A-30)}$$

と書けるので、

$$\therefore F_H=\left[-\rho g\int_{S_F}dxdy\right]X_H+\left[-\rho g\int_{S_F}ydxdy\right]X_R+\left[\rho g\int_{S_F}xdxdy\right]X_P$$

$$\equiv C_{HH}X_H+C_{HR}X_R+C_{HP}X_P$$

(A-31)

となる。

Roll モーメントは

$$M_R=\int_{S_H}p_S y n_z dS=-\rho g\int_{S_H}(yX_H+y^2X_R-xyX_P)n_z dS$$

(A-32)

より、前と同様の操作を行うと、

$$M_R=\left[-\rho g\int_{S_F}ydxdy\right]X_H+\left[-\rho g\int_{S_F}y^2dxdy\right]X_R+\left[\rho g\int_{S_F}xydxdy\right]X_P$$

$$\equiv C_{RH}X_H+C_{RR}X_R+C_{RP}X_P$$

(A-33)

Pitch モーメントは

$$M_P=-\int_{S_H}p_S x n_z dS=\rho g\int_{S_H}(xX_H+xyX_R-x^2X_P)n_z dS$$

(A-34)

より、前と同様の操作を行うと、

$$M_P=\left[\rho g\int_{S_F}xdxdy\right]X_H+\left[\rho g\int_{S_F}xydxdy\right]X_R+\left[\rho g\int_{S_F}-x^2dxdy\right]X_P$$

$$\equiv C_{PH}X_H+C_{PR}X_R+C_{PP}X_P$$

(A-35)

ゆえに $C_{HR}=C_{RH}, C_{HP}=C_{PH}, C_{RP}=C_{PR}$ であることがわかる。

[補-2]

Method of stationary phase

$$f(x)=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\exp(ixh(t))dt \qquad \text{(A-36)}$$

において、x は大きな正の実数、$h(t)$ は実変数の実関数とする。この積分への寄与は、$h(t)$ が stationary すなわち $h'(t)=0$ の近傍からが主要であることから、

$$f(x)\approx\sqrt{\frac{2\pi}{xh''(\tau)}}g(\tau)\exp(ixh(\tau)+i\pi/4) \qquad \text{(A-37)}$$

が導かれる。ここで $h'(\tau)=0$、$h''(\tau)>0$ とする。