空気室を有する浮体の造波理論について

大松　重雄*

On the wave making theory of the floating body with air chamber

by

Shigeo OHMATSU

Abstract

The oscillating water column(OWC) type wave energy converter has air chamber for energy extraction and also the air-cushion vehicle(ACV) has large air chamber in order to lift up the body. This paper deals with the wave making theory of such floating bodies with air chamber. The free surface condition on the water surface in air chamber will be different from usual free surface condition, and it causes necessity of unique treatment of wave making phenomena. The special attention is paid on the verifications of symmetry of radiation hydrodynamic forces and on the so-called Haskind relation which are known to stand for ordinary floating bodies. This paper describes these theories in time domain and in frequency domain, and it is shown that these are precisely related each other by Fourier transformation. The equation of motion in time domain will be applicable even for non sinusoidal actions of wave energy converter such as Wells turbine.

＊ 企画部
原稿受付　平成 27 年 4 月　3 日
審 査 日　平成 27 年 6 月 19 日

目　次

記　号

A ：空気室の水面面積

P_0 , V_0 ：空気室の静止時の圧力と容積

$\overline{P}$, v ：空気室の変動圧と容積の減少量

α ：空気室開口部・タービン等の影響を表す係数（複素数）　$0 \le |\alpha| \le 1$

γ ：空気室の空気の比熱比

$\delta(t)$ ：デルタ関数、　$H(t)$ ：ステップ関数

ϕ_0 , Φ_0 ：入射波の速度ポテンシャル　$\Phi_0 = \dfrac{iga}{\omega}\phi_0$　（a は波高）

ϕ_d , Φ_d ：Diffraction ポテンシャル

ϕ_S , Φ_S ：Scattering ポテンシャル　$\phi_S = \phi_0 + \phi_d$, $\Phi_S = \Phi_0 + \Phi_d$

ϕ_i , Φ_i ：Radiation ポテンシャル　$i = 1{:}\,surge,\ 2{:}\,sway,\ 3{:}\,heave,\ 4{:}\,roll,\ 5{:}\,pitch,\ 6{:}\,yaw$

ϕ_k ：空気室 k の OWC による radiation ポテンシャル

周波数領域における時間項は $e^{i\omega t}$ とする，ω は周波数，$K = \omega^2 / g$

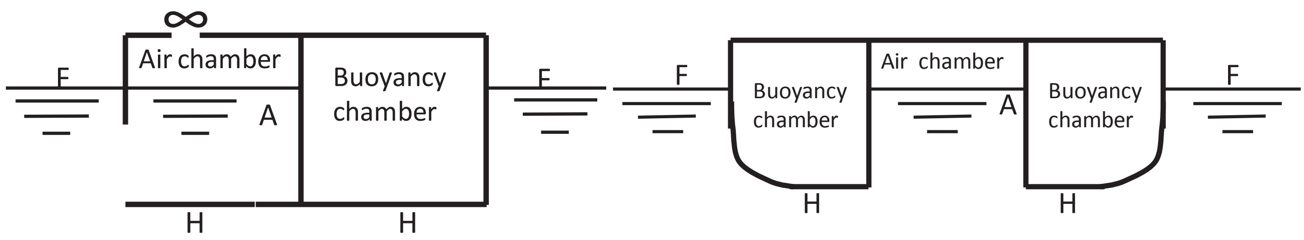
座標系は静止水面に原点を置く直交座標系で鉛直上向きを z 軸の正方向とする
流体領域境界における法線の方向は，流場から外に向かう方向を正とする

Fourier 変換　$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$　　逆 Fourier 変換　$f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

1.　まえがき

波力発電装置のひとつに図 1(a)のような振動水柱型発電装置がある[1)-6)]．これは空気室のノズルに設置された空気タービンの回転により波のエネルギーを電気エネルギーに変換するものである．また，図 1(b)のように圧縮空気で船体を持ちあげるホーバークラフトがある．本論文は，このような空気室を有する浮体の造波理論を扱うものである．すなわち，空気室を有する浮体が動揺した場合の波浪場や，空気室を有する浮体に働く波浪外力を求める方法について検討するのであるが，図 1 のような空気室においては変動圧が働き，その水面においては通洞の自由表面条件とは異なる条件が課せられるであろう．したがって通常の浮体とは異なる取り扱いが必要となる．本論文では，radiation 流体力の対称性および Haskind の関係についても詳しく検討する．これらは通常の浮体では成り立つことが知られており，有効に利用されているが，空気室がある場合にこれらの関係はどのようなものになるかは興味のあるところである．また，本論文ではこれらの造波現象を時間領域および周波数領域で記述し，両者が Fourier 変換で結ばれていることを明示する．時間領域で記述された運動方程式は，非周期的現象，例えばウエルズタービンによる空気動の影響なども取り込んだシミュレーションを可能にするであろう．

なお本論文における式の導出においては，この分野の初学者のために，煩雑さをいとわず丁寧に記述することにした．またなお，本論で扱う各種の変動量は線形理論が成り立つ程度に微小なものであるとする．



(a) 振動水柱型発電装置　　　　(b)ホーバークラフト

図 1　空気室の模式図

2.　空気室の変動圧と自由表面条件

まず，空気室が密閉されている場合を考える．空気の圧縮・膨張が断熱的と考えると，空気圧とその容積の間には Poisson の法則と呼ばれる以下のような関係が成り立つ．

$$P(V_0 - v)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \tag{2.1}$$

ただし，P_0, V_0 は静止時の圧力と容積，v は相対水位変動などによる空気容積の減少，γ は比熱比と呼ばれる係数である．ここで $v \le\le V_0$ の場合は，$V_0^\gamma/(V_0 - v)^\gamma \approx \left(1 + \gamma\, v / V_0\right)$ であるので，(2.1)式より

$$P \approx P_0 + \gamma (v / V_0) P_0 \tag{2.2}$$

が得られる．したがって，空気室の圧力の変動分 $\overline{P} \equiv P - P_0$ と空気室容積の変動　とは以下のような線形の関係で表されることがわかる．

$$\overline{P} \equiv P - P_0 = \gamma (P_0 / V_0) \cdot v \tag{2.3}$$

さて，空気室の容積の減少量　は以下のように表される．

$$v = \iint_A (\eta - \Delta z) dS \tag{2.4}$$

ここで A は空気室の水面，η はそこにおける自由表面上昇量，Δz は空気室の上下変位量とする．したがって v の時間微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \iint_A \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) dS \tag{2.5}$$

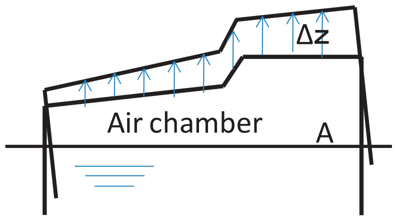


図 2　空気室の上下変位量

ここで，流場を表す速度ポテンシャルを Φ とすると，自由表面における運動学的条件および力学的条件（Bernoulli の定理）は以下のように表される．

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad on \quad z = 0 \tag{2.6}$$

$$\overline{P} = -\rho g \eta - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad on \quad z = 0 \tag{2.7}$$

ここで(2.7)式の時間微分より，(2.6)式も考慮すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho g}\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} \qquad on \quad z = 0 \tag{2.8}$$

が得られる．これを(2.5)式に代入すると以下のようになる．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \iint_A \left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho g}\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} - \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) dS = \iint_A \left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) dS - \frac{1}{\rho g}\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} A \tag{2.9}$$

ここで空気圧は空気室内の場所によらずどこでも一定ということを考慮した．（A は空気室の水面面積）

一方，Poisson の法則(2.3)式の時間微分より

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} = \gamma (P_0 / V_0) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2.10}$$

であるので，(2.9)(2.10)式より

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} = \gamma (P_0 / V_0) \cdot \iint_A \left(-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) dS - \gamma (P_0 / V_0) \cdot \frac{1}{\rho g}\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} A \tag{2.11}$$

したがって，整理すると

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} = \rho \frac{\Lambda}{A} \cdot \iint_A \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \Delta z}{\partial t} \right) dS \tag{2.12}$$

ここで　$C \equiv \dfrac{\gamma (P_0 / V_0) A}{\rho g}$　，　$\Lambda \equiv \dfrac{C}{1 + C}$　(2.13)

と書ける．また，(2.8)式より

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial t} = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad on \quad z = 0 \tag{2.14}$$

であるので，(2.12)(2.14)式より

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Delta z}{\partial t}\right)dS \qquad on \quad z=0 \tag{2.15}$$

が得られる．これが空気室における自由表面条件である．

以上においては空気室は密閉されていると考えてきたが，波力発電装置のように開口部があり，そこにタービンが設置されている場合はどうなるであろうか．この場合も(2.3)式のような線形関係が成り立つと考え，そこに位相，振幅を加味した下のような関係が成り立つと仮定する．

$$\overline{P}=\alpha\cdot\gamma(P_0/V_0)\cdot v \tag{2.16}$$

ここで α は $|\alpha|\le 1$ なる適当な複素数とする． $\alpha=1$ のときは密閉， $\alpha=0$ のときは開放状態になる．こうして，

あらためて $C\equiv\dfrac{\alpha\gamma(P_0/V_0)A}{\rho g}$　，　$\Lambda\equiv\dfrac{C}{1+C}$ とすれば，(2.15)式は密閉状態以外にも適用できることになる．

(2.15)式は時間領域における自由表面条件式であるが，その Fourier 変換により，

$$\begin{aligned}&-\omega^2\Phi^*+g\frac{\partial\Phi^*}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(-\omega^2\Phi^*+i\omega g\Delta z^*\right)dS\\ &\therefore \qquad K\Phi^*-\frac{\partial\Phi^*}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(K\Phi^*-i\omega\Delta z^*\right)dS \qquad on \quad z=0\end{aligned} \tag{2.17}$$

が得られる．これが周波数領域における自由表面条件である．空気室の変動圧は(2.12)式より

$$\overline{P}_j(t)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial\Phi_j(t)}{\partial t}+g\Delta z_j(t)\right)dS \tag{2.18}$$

周波数領域においては

$$\overline{P}^*{}_j(\omega)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(i\omega\Phi^*{}_j+g\Delta z^*{}_j\right)dS \tag{2.19}$$

と表される．

3.　空気室を有する浮体の流場の解法と運動方程式

ここではまず，空気室を有する浮体が平水中で動揺しているとき（radiation 問題），あるいは固定された浮体に入射波があたっているとき（diffraction 問題）の浮体まわりの流場を時間領域で解く方法を考える [7]．また，解いた結果を用いて浮体に働く流体力を求め，時間領域の運動方程式を導く．本章での焦点は，空気室における自由表面条件と，空気室の変動圧による力の扱い方である．

3.1　時間領域における流場とその解法

平水中で，浮体が $t=0$ より j モード方向に $\dot{\xi}_j(t)$ という速度で運動を始めた場合の流場の速度ポテンシャルを $\Phi_j(P;t)$ とすると，この速度ポテンシャルの支配方程式と境界条件は以下のように与えられる．

$$[L]\ \nabla^2\Phi_j(P;t)=0 \qquad in \quad Fluid \quad Domain \tag{3.1}$$

$$[F]\ \frac{\partial^2\Phi_j(P;t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial z}=0 \qquad on \quad z=0 \tag{3.2}$$

$$[A]\ \frac{\partial^2\Phi_j(P;t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Delta z_j}{\partial t}\right)dS \quad on \ \ z=0 \quad in \quad Air\,Chamber \tag{3.3}$$

$$[H]\ \frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial n}=n_j(P)\dot{\xi}_j(t) \qquad P \quad on \ \ H \tag{3.4}$$

$$[B]\ \frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial z}=0 \qquad P \quad on \ \ Bottom \tag{3.5}$$

$$[\infty]\ \lim_{R\to\infty}\Phi_j(P;t)=0 \tag{3.6}$$

$$[I]\ \Phi_j(P;t)=\frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial t}=0 \qquad for \ \ t\le 0_- \tag{3.7}$$

ここで、式の先頭にある記号[L]は流体領域、[F]は自由表面、[A]は空気室の自由表面、[H]は浮体表面、[B]は水底、[∞]は無限遠方境界を表し、[I]は初期条件を表す。また、$n_j(P)$ は浮体表面上における法線の j 方向成分である．$t=0_-$ は $t=0$ の瞬間より微小時間前を表すものとする．また，空気室における自由表面条件(3.3)式の右辺において，括弧の中の第 2 項は具体的には

$$\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A g\frac{\partial\Delta z_j}{\partial t}dS=g\Lambda q_j\cdot\dot{\xi}_j(t) \tag{3.8}$$

$$q_1=0\ ,\ q_2=0\ ,\ q_3=1\ ,\ q_4=(y_F-y_G)\ ,\ q_5=-(x_F-x_G)\ ,\ q_6=0 \tag{3.9}$$

と書くことができる．ここで (x_F,y_F) は空気室水面の浮面心の座標である．

そこで，[H][A]以外の条件は上記のままで，

$$[A]\ \frac{\partial^2\phi_j(P;t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_j(P;t)}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\frac{\partial^2\phi_j}{\partial t^2}dS+g\Lambda q_j\delta(t) \quad on \ \ z=0 \quad in \quad Air\,Chamber \tag{3.10}$$

$$[H]\ \frac{\partial\phi_j(P;t)}{\partial n}=n_j(P)\delta(t) \qquad P \quad on \ \ H \tag{3.11}$$

を満足する速度ポテンシャル $\phi_j(P;t)$ をインパルス応答速度ポテンシャルと呼ぶことにする．これが求められると，$\Phi_j(P;t)$ は

$$\Phi_j(P;t)=\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\phi_j(P;t-\tau)d\tau \tag{3.12}$$

により求めることができる．ここで 0_- や t_+ と書くのは δ 関数の積分の取り扱いを厳密に行うために採用するもので，必要のない場合は適宜省略する．

(3.12)式の $\Phi_j(P;t)$ が(3.3)(3.4)式を満足することは以下のようにして確かめられる．

$\phi_j(P;t)$ は(3.10)式を満足するものとすると，両辺に $\dot{\xi}_j(\tau)$ を乗じて $\int_{0_-}^{t_+} d\tau$ を施すと

$$\int_{0_-}^{t_+} \dot{\xi}_j(\tau)\left[\frac{\partial^2\phi_j(P;t-\tau)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi_j(P;t-\tau)}{\partial z}\right]d\tau=\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\left[\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\frac{\partial^2\phi_j(t-\tau)}{\partial t^2}dS+g\Lambda q_j\delta(t-\tau)\right]d\tau \tag{3.13}$$

である．これを書きなおすと

$$\begin{aligned}&\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\frac{\partial^2\phi_j(P;t-\tau)}{\partial t^2}d\tau+g\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\frac{\partial\phi_j(P;t-\tau)}{\partial z}d\tau\\&\qquad=\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\left[\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\frac{\partial^2\phi_j(t-\tau)}{\partial t^2}dS\right]d\tau+g\Lambda q_j\dot{\xi}_j(t)\end{aligned} \tag{3.14}$$

となる．したがって，(3.12)式より $\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\cdot\partial^2/\partial t^2\cdot\phi_j(P;t-\tau)d\tau=\partial^2/\partial t^2\cdot\Phi(P;t)$ であるので

$$[A]\ \frac{\partial^2\Phi_j(P;t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\frac{\partial^2\Phi_j}{\partial t^2}dS+g\Lambda q_j\dot{\xi}_j(t)\quad on\ \ z=0 \tag{3.15}$$

すなわち(3.3)式が満足される．

また，(3.12)(3.11)式より

$$\frac{\partial\Phi_j(P;t)}{\partial n}=\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)\frac{\partial\phi_j(P;t-\tau)}{\partial n}d\tau=\int_{0_-}^{t_+}\dot{\xi}_j(\tau)n_j(P)\delta(t-\tau)d\tau=n_j(P)\dot{\xi}_j(t) \tag{3.16}$$

すなわち(3.4)式が満足される．

したがって以下ではインパルス応答の速度ポテンシャル $\phi_j(P;t)$ の求め方について述べる．この $\phi_j(P;t)$ と，付録 1 に示す時間領域の Green 関数 $G(P;Q;t-\tau)$ に対して Green の第 2 定理を適用すると，

$$\begin{aligned}&\iiint_V\left(\phi_j\nabla^2G-G\nabla^2\phi_j\right)dV=\iint_S\left(\phi_j\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j}{\partial n_Q}\right)G(P;Q;t-\tau)dS(Q)\\&\therefore\qquad \phi_j(P;\tau)\delta(t-\tau)=\iint_S\left(\phi_j\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j}{\partial n_Q}\right)G(P;Q;t-\tau)dS(Q)\end{aligned} \tag{3.17}$$

が得られる．ここで S は流体領域を囲む全面 $S=H+F+A+B+\infty$ である．B と ∞ 上では ϕ_j , G ともに[B][∞]を満足するので，積分値は 0 となる．

ここで付録 1 にしたがって

$$G(P;Q;t-\tau)\equiv G_0(P;Q)\delta(t-\tau)+\hat{G}(P;Q;t-\tau)H(t-\tau) \tag{3.18}$$

と書くことにすると

$$\phi_j(P;\tau)\delta(t-\tau)=\iint_{H+F+A}\left(\phi_j\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j}{\partial n_Q}\right)\left[G_0(P;Q)\delta(t-\tau)+\hat{G}(P;Q;t-\tau)H(t-\tau)\right]dS(Q) \tag{3.19}$$

この(3.19)式をτ について$-\infty$から∞まで積分すると，

$$\phi_j(P;t)=\iint_{H+F+A}\left(\phi_i(Q;t)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j(Q;t)}{\partial n_Q}\right)G_0(P;Q)dS(Q)$$
$$+\iint_{H+F+A}\int_{-\infty}^{t}d\tau\left(\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \qquad (3.20)$$

となる．

右辺第 2 項のF 上の積分をI_{F2} とすると，F 上では

$$\frac{\partial}{\partial n}\begin{cases}\Phi\\ \hat{G}\end{cases}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\begin{cases}\Phi\\ \hat{G}\end{cases}\qquad on\quad F \qquad (3.21)$$

であるので，

$$I_{F2}=\iint_F\int_{-\infty}^{t}d\tau\left(\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q)$$
$$=\iint_F\int_{-\infty}^{t}d\tau\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\phi_j(Q;\tau)}{\partial^2\tau}\hat{G}(P;Q;t-\tau)-\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial^2\hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial^2\tau}\right)dS(Q)$$
$$=\iint_F\frac{1}{g}\left[\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial\tau}\hat{G}(P;Q;t-\tau)-\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial\hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial\tau}\right]_{-\infty}^{t}dS(Q)$$
$$+\iint_F\int_{-\infty}^{t}d\tau\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial\tau}\right)dS(Q)$$
$$=-\iint_F\frac{1}{g}\phi_j(Q;t)\frac{\partial\hat{G}(P;Q;0)}{\partial\tau}dS(Q)\qquad\because\ \hat{G}(P;Q;0)=0$$

(3.22)

となる．

したがって，(3.20)式右辺の　 上の積分をI_{F1+F2}とすると，$G_0(P;Q)=0\quad on\quad z=0$ であるので，

$$I_{F1+F2}=\iint_F\phi_j(Q;t)\left(\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q}-\frac{1}{g}\frac{\partial\hat{G}(P;Q;0)}{\partial\tau}\right)dS(Q) \qquad (3.23)$$

しかるに，附録 1 に示すように，　 上では$\partial/\partial n\cdot G_0=1/g\cdot\partial/\partial\tau\cdot\hat{G}(0)$より結局$I_{F1+F2}=0$となる．

次にA 上の積分を考える．A 上の積分I_{A1+A2}は

$$I_{A1+A2}=\iint_A\left(\phi_i(Q;t)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j(Q;t)}{\partial n_Q}\right)G_0(P;Q)dS(Q)$$
$$+\iint_A\int_{-\infty}^{t}d\tau\left(\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi_j(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \qquad (3.24)$$

であるが，A 上では

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = -\frac{1}{g}\left[\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \tau^2} - \frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \tau^2} dA - g\Lambda q_j \delta(t)\right] \tag{3.25}$$

であるので，

$$\begin{aligned} I_{A1+A2} &= \iint_A \left(\phi_j(Q;t)\frac{\partial}{\partial n_Q} - \frac{\partial \phi_j(Q;t)}{\partial n_Q}\right) G_0(P;Q)dS(Q) \\ &+ \iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \frac{1}{g}\left[\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\partial^2 \phi_j(Q;\tau)}{\partial \tau^2} \underline{\underline{- \dfrac{\Lambda}{A}\iint_A \dfrac{\partial^2 \phi_j(Q;\tau)}{\partial \tau^2} dS - g\Lambda q_j \delta(\tau)}}\right\}\hat{G}(P;Q;t-\tau) \\ - \phi_j(Q;\tau)\dfrac{\partial^2 \hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial \tau^2}\end{array}\right] dS(Q) \end{aligned} \tag{3.26}$$

と書ける．ここで，上の式で二重下線を施した空気圧変動の項以外は前の F 上の積分と同様に消えるので，

$$I_{A1+A2} = -\frac{1}{g}\iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \left\{\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \phi_j(Q;\tau)}{\partial \tau^2} dS + g\Lambda q_j \delta(\tau)\right\}\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \tag{3.27}$$

となる．したがって，

$$\wp_j(\tau) \equiv -\frac{1}{g}\left[\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \phi_j(Q;\tau)}{\partial \tau^2} dS + g\Lambda q_j \delta(\tau)\right] \tag{3.28}$$

と書くことにすると，速度ポテンシャルは物体表面上および空気室水面上の積分で以下のように表される．

$$\begin{aligned} \phi_j(P;t) &= \iint_H \left(\phi_j(Q;t)\frac{\partial}{\partial n_Q} - \frac{\partial \phi_j(Q;t)}{\partial n_Q}\right) G_0(P;Q)dS(Q) \\ &+ \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \left(\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q} - \frac{\partial \phi_j(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \\ &+ \iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \wp_j(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \end{aligned} \tag{3.29}$$

この $\phi_j(P;t)$ に対する積分方程式は，$P \to H$ 上の滑らかな点とすれば，$G_0(P;Q)$ の特異性により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_j(P;t) - \iint_H \phi_j(Q;t)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q} dS(Q) &= -\iint_H \frac{\partial \phi_j(Q;t)}{\partial n_Q} G_0(P;Q)dS(Q) \\ &+ \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \left(\phi_j(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q} - \frac{\partial \phi_j(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \\ &+ \iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \wp_j(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \end{aligned} \tag{3.30}$$

が得られる．これにより，浮体表面上の法線速度が(3.11)式のように与えられているので，それを右辺に代入し，また，解いて得た結果を右辺の第 2 項，3 項に代入することにより，時間進行法で順々に速度ポテンシャルを求めて行くことができる．

具体的には，$\phi_j(P;t)$ を下記のように衝撃に応ずる速度ポテンシャルと，衝撃によって生じた流体運動に対

応する速度ポテンシャルの和で表すことにすると，

$$\phi_j(P;t) \equiv \Omega_j(P)\delta(t) + \Gamma_j(P;t)H(t) \tag{3.31}$$

物体表面の境界条件は以下のように表される．

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_j(Q)}{\partial n} &= n_j(Q) \\ \frac{\partial \Gamma_j(Q;t)}{\partial n} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad on \quad H \tag{3.32}$$

そこで(3.31)式を(3.30)式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\Omega_j(P)\delta(t) + \Gamma_j(P;t)H(t)\right] - \iint_H \left[\Omega_j(Q)\delta(t) + \Gamma_j(Q;t)H(t)\right]\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q} dS(Q) \\ &\qquad = -\iint_H \left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial n}\delta(t) + \frac{\partial \Gamma_j}{\partial n}H(t)\right] G_0(P;Q)dS(Q) \\ &\qquad\quad + \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \left[\Omega_j(Q)\delta(\tau) + \Gamma_j(Q;\tau)H(\tau)\right]\frac{\partial \hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial n} dS(Q) \\ &\qquad\quad - \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \left[\frac{\partial \Omega_j}{\partial n}\delta(\tau) + \frac{\partial \Gamma_j}{\partial n}H(\tau)\right]\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \\ &\qquad\quad + \iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \wp_j(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \end{aligned} \tag{3.33}$$

であるので，(3.32)式を考慮して，$\delta(t)$ および $H(t)$ のオーダー毎に整理すると，$\Omega_j(P)$ および $\Gamma_j(P;t)$，それぞれの積分方程式が以下のように得られる．

$$\frac{1}{2}\Omega_j(P) - \iint_H \Omega_j(Q)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q} dS(Q) = -\iint_H n_j(Q)G_0(P;Q)dS(Q) \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Gamma_j(P;t) - \iint_H \Gamma_j(Q;t)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q} dS(Q) \\ &\qquad = \iint_H \Omega_j(Q)\frac{\partial \hat{G}(P;Q;t)}{\partial n} dS(Q) \\ &\qquad\quad + \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau\ \Gamma_j(Q;\tau)\frac{\partial \hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial n} dS(Q) \\ &\qquad\quad - \iint_H n_j(Q)\hat{G}(P;Q;t)dS(Q) \\ &\qquad\quad + \iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \wp_j(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) \end{aligned} \tag{3.35}$$

以上，radiation 問題の解法を述べたが，diffraction 問題の場合は空気室における自由表面条件および物体表面の境界条件が以下のようになる．入射波の速度ポテンシャルを $\Phi_0(P;t)$，それによる diffraction ポテンシャルを

$\Phi_d(P;t)$，それらの和である scattering ポテンシャルを $\Phi_0(P;t)+\Phi_d(P;t)\equiv\Phi_S(P;t)$ とすると、この場合は(2.15)式の自由表面条件が $\Delta z\to 0$ であり

$$[A]\ \frac{\partial^2\Phi_S}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi_S}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial^2\Phi_S}{\partial t^2}\right)dS \qquad on \quad z=0 \tag{3.36}$$

あるいは，$\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2}+g\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z}=0\ on\ z=0$ より

$$[A]\ \frac{\partial^2\Phi_d}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi_d}{\partial z}=\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial^2(\Phi_0+\Phi_d)}{\partial t^2}\right)dS \qquad on \quad z=0 \tag{3.37}$$

となる．物体表面の境界条件は

$$[H]\ \frac{\partial\Phi_S}{\partial n}=0 \qquad P\ \ on\ \ H \tag{3.38}$$

あるいは

$$[H]\ \frac{\partial\Phi_d}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \qquad P\ \ on\ \ H \tag{3.39}$$

である．したがって，$\Phi_d(P;t)$ を求めるための積分方程式は，(3.30)式を参照すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Phi_d(P;t)-\iint_H \Phi_d(Q;t)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q)&=\iint_H\frac{\partial\Phi_0(Q;t)}{\partial n_Q}G_0(P;Q)dS(Q)\\&+\iint_H\int_{-\infty}^{t}d\tau\left(\Phi_d(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q}+\frac{\partial\Phi_0(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q)\\&+\iint_A\int_{-\infty}^{t}d\tau\,\wp_S(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q)\end{aligned} \tag{3.40}$$

となる．ただし，ここでは

$$\wp_S(\tau)\equiv-\frac{1}{g}\left[\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\left(\Phi_d+\Phi_0\right)}{\partial\tau^2}dS\right] \tag{3.41}$$

である．あるいは以下のようにして，$\Phi_S(P;t)$ に対する積分方程式も得られる．入射波の速度ポテンシャル $\Phi_0(P;\tau)$ と時間領域の Green 関数 $G(P;Q;t-\tau)$ に対して浮体“内部”の領域で Green の第 2 定理を適用し，τ について $-\infty$ から ∞ まで積分すると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Phi_0(P;t)&=-\iint_H\left(\Phi_0(Q;t)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\Phi_0(Q;t)}{\partial n_Q}\right)G_0(P;Q)dS(Q)\\&-\iint_H\int_{-\infty}^{t}d\tau\left(\Phi_0(Q;\tau)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\Phi_0(Q;\tau)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q)\end{aligned} \tag{3.42}$$

したがって,

$$\iint_H \frac{\partial \Phi_0(Q;t)}{\partial n_Q} G_0(P;Q)dS(Q) + \iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \frac{\partial \Phi_0(Q;\tau)}{\partial n_Q} \hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q) =$$

$$\frac{1}{2}\Phi_0(P;t) + \iint_H \Phi_0(Q;t)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q) \qquad (3.43)$$

$$+\iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \Phi_0(Q;\tau)\frac{\partial \hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial n_Q}dS(Q)$$

という関係式が得られる．これを(3.40)式の右辺に代入し，両辺に$1/2\cdot\Phi_0(P;\tau)$を加えると

$$\frac{1}{2}\Phi_S(P;t) - \iint_H \Phi_S(Q;t)\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q) = \Phi_0(P;t)$$

$$+\iint_H \int_{-\infty}^{t} d\tau \Phi_S(Q;\tau)\frac{\partial \hat{G}(P;Q;t-\tau)}{\partial n_Q}dS(Q) \qquad (3.44)$$

$$+\iint_A \int_{-\infty}^{t} d\tau \wp_S(\tau)\hat{G}(P;Q;t-\tau)dS(Q)$$

という積分方程式が得られる．数値的にはこれの方が扱いやすいだろう．

3.2 流体力と運動方程式

ここでは，前節に示した radiation 問題，diffraction 問題の積分方程式が解かれたとして，それぞれの速度ポテンシャルより流体力を求め，浮体の運動方程式を導くことにする．

まず，(3.34)(3.35)式の積分方程式を解いて，radiation ポテンシャル$\phi_j(P;t) \equiv \Omega_j(P)\delta(t) + \Gamma_j(P;t)H(t)$

が得られたとする．これにより，浮体が$t=0$よりjモード方向に$\dot{\xi}_j(t)$という速度で運動をした場合，変動水

圧によるiモード方向の流体力は(3.12)式を参照して，

$$F_{ij}(t) = -\rho\iint_H n_i(p)\frac{\partial \Phi_j(P;t)}{\partial t}dS = -\rho\iint_H n_i(p)\left[\ddot{\xi}_j(t)\Omega_j(P) + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j(P;t-\tau)d\tau\right]dS$$

$$= -\rho\iint_H n_i(p)\Omega_j(P)dS\cdot\ddot{\xi}_j(t) - \rho\iint_H n_i(p)dS\int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j(P;t-\tau)d\tau \qquad (3.45)$$

$$\equiv -\mu_{ij}\ddot{\xi}_j(t) - \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)K_{ij}(t-\tau)d\tau$$

と表される．ここで

$$\rho\iint_H n_i(p)\Omega_j(P)dS \equiv \mu_{ij} \quad , \qquad \rho\iint_H n_i(P)\dot{\Gamma}_j(P;t)dS \equiv K_{ij}(t) \qquad (3.46)$$

とおいた．

次に，空気室の変動圧によって浮体に働く力を考える．空気室の変動圧は(2.18)式より

$$\overline{P}_j(t) = -\rho\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(\frac{\partial \Phi_j(t)}{\partial t} + g\Delta z_j(t)\right)dS \qquad (3.47)$$

で与えられる．この空気圧は空気室内では一定であり，水平方向の力は発生させない．この空気圧により発生する力とモーメントは，(3.9)式で定義した q_j を使って以下のように表される．

$$F^A{}_{ij}(t) = Aq_i \cdot \overline{P}_j(t) \tag{3.48}$$

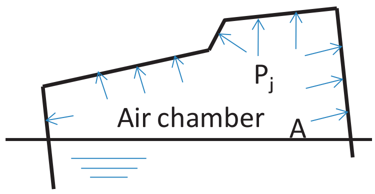


図 3　空気室に働く力

そこで， j モードの運動 $\dot{\xi}_j(t)$ による空気室自由表面の速度ポテンシャルを

$$\Phi_j(P_A;t) = \Omega_j(P_A)\dot{\xi}_j(t) + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\Gamma_j(P_A : t-\tau)d\tau \tag{3.49}$$

として，

$$\iint_A \Omega_j(P_A)dS \equiv \Omega_j{}^A \quad , \quad \iint_A \dot{\Gamma}_j(P_A;t)dS \equiv \dot{\Gamma}_j{}^A(t) \tag{3.50}$$

と書くことにすると，(3.47)式右辺カッコの第 1 項は

$$\text{第1項} = \Omega_j{}^A\ddot{\xi}_j(t) + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j{}^A(t-\tau)d\tau \tag{3.51}$$

と表される．
また，(3.47)式右辺カッコの第 2 項は

$$\text{第2項} = g\iint_A \Delta z_j(t)dS = g\xi_j(t)\cdot Aq_j = gAq_j\cdot\xi_j(t) \tag{3.52}$$

と表されるので，(3.51)(3.52)を(3.47)式に代入すると

$$\overline{P}_j(t) = -\rho\frac{\Lambda}{A}\left[\Omega_j{}^A\ddot{\xi}_j(t) + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j{}^A(t-\tau)d\tau + gAq_j\cdot\xi_j(t)\right] \tag{3.53}$$

したがって，(3.53)を(3.48)式に代入することにより

$$F^A{}_{ij}(t) = -\mu^A{}_{ij}\cdot\ddot{\xi}_j(t) - \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)K^A{}_{ij}(t-\tau)d\tau - c^A{}_{ij}\cdot\xi_j(t) \tag{3.54}$$

ここで

$$\mu^A{}_{ij} \equiv \rho\Lambda q_i\Omega_j{}^A \quad , \quad K^A{}_{ij}(t) \equiv \rho\Lambda q_i\dot{\Gamma}_j{}^A(t) \quad , \quad c^A{}_{ij} \equiv \rho gA\Lambda q_i q_j \tag{3.55}$$

と表すことができる．つまり j モードのインパルス応答による空気室自由表面の速度ポテンシャルを求めておけば，(3.54)式より空気室の変動圧による力を求めることができる．

また，入射波浪による強制力は

$$F^W{}_i(t) = -\rho\iint_H n_i(p)\frac{\partial\Phi_S(P;t)}{\partial t}dS - \rho\Lambda q_i\iint_A \frac{\partial\Phi_S(P;t)}{\partial t}dS \tag{3.56}$$

により求められる．(3.56)式の右辺第 2 項が空気室に働く力の項である．

以上により，浮体の運動方程式は

$$\sum_j M_{ij}\ddot{\xi}_j(t) = \sum_j\left[F_{ij}(t) - c_{ij}\xi(t) + F^A{}_{ij}(t)\right] + F^W{}_i(t) \tag{3.57}$$

となる．ここで c_{ij} は通常の浮体の復原力係数である．(3.57)式に(3.47)(3.54)式を代入して整理すると

$$\sum_j \left(M_{ij}+\mu_{ij}+\mu^A{}_{ij}\right)\ddot{\xi}_j(t)+\int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\left\{K_{ij}(t-\tau)+K^A{}_{ij}(t-\tau)\right\}d\tau+\left(c_{ij}+c^A{}_{ij}\right)\xi_j(t)=F^W{}_i(t) \tag{3.58}$$

これが，空気室がある場合の浮体の運動方程式である． $\mu^A{}_{ij}$ が空気室による付加質量， $K^A{}_{ij}(t)$ がメモリー影響を表す関数である．これらが求められるならば，(3.58)式の運動方程式を解くのに特段の問題はない．

4.　周波数領域における解法

前章では時間領域における流場の解法，およびその解による流体力の求め方について述べたが，本章ではこれらを周波数領域で取り扱う方法について述べる．

4.1　周波数領域における流場の積分方程式

時間領域と周波数領域は互いに Fourier 変換の関係にあるだろう．実際，時間領域における速度ポテンシャルの表式(3.29)の Fourier 変換を行うと，

$$\begin{aligned}\phi^*{}_j(P;\omega)&=\iint_H\left(\phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}\right)G_0(P;Q)dS(Q)\\&\quad+\iint_H\left(\phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}\right)\hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)\\&\quad+\iint_A \wp^*{}_j(\omega)\hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる．ここで $\wp^*{}_j$ は(3.28)式の Fourier 変換より

$$\wp^*{}_j(\omega)=K\frac{\Lambda}{A}\iint_A\phi^*{}_j(Q;\omega)dS-\Lambda q_j \tag{4.2}$$

である．また，周波数領域の Green 関数は附録 1 に示すように $G^*=G_0+\hat{G}^*$ であるので，(4.1)式は下式のようになる．

$$\begin{aligned}\phi^*{}_j(P;\omega)&=\iint_H\left(\phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}\right)G^*(P;Q;\omega)dS(Q)\\&\quad+\left[K\frac{\Lambda}{A}\iint_A\phi^*{}_j(Q;\omega)dS-\Lambda q_j\right]\iint_A \hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)\end{aligned} \tag{4.3}$$

一方，はじめから周波数領域において考えると， $\phi^*{}_j$ と G^* に Green の第 2 定理を適用することにより，

$$\begin{aligned}\phi^*{}_j(P;\omega)&=\iint_H\left(\phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}\right)G^*(P;Q;\omega)dS(Q)\\&\quad+\iint_A\left(\phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial}{\partial n_Q}-\frac{\partial\phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}\right)G^*(P;Q;\omega)dS(Q)\end{aligned} \tag{4.4}$$

であるが，空気室自由表面における積分 I_A は，G^* の自由表面条件および(2.17)式の自由表面条件を考慮すると，

$$I_A = \left[K\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A \phi^*{}_j dS - \Lambda q_j \right]\iint_A G^*(P;Q;\omega)dS(Q) \tag{4.5}$$

となり，(4.3)式と同一の表式が得られる．（自由表面においては $G^* = \hat{G}^*$ である.）

同様にして，radiation ポテンシャルを求めるための積分方程式は(3.30)式の Fourier 変換により，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\phi^*{}_j(P;\omega) - \iint_H \phi^*{}_j(Q;\omega)\frac{\partial G^*(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q) \\
&\quad = -\iint_H \frac{\partial \phi^*{}_j(Q;\omega)}{\partial n_Q}G^*(P;Q)dS(Q) \\
&\qquad + \left[K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \phi^*{}_j(Q;\omega)dS - \Lambda q_j \right]\iint_A \hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる．これはまた，(4.3)式において $P \to H$ 上の点とすることによっても同じ式が得られる．

同様に，diffraction ポテンシャルを求める積分方程式は(3.40)式あるいは(3.44)式の Fourier 変換より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Phi^*{}_d(P;\omega) - \iint_H \Phi^*{}_d(Q;\omega)\frac{\partial G^*(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q) \\
&\quad = \iint_H \frac{\partial \Phi^*{}_0(Q;\omega)}{\partial n_Q}G^*(P;Q)dS(Q) \\
&\qquad + \left[K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \left(\Phi^*{}_d + \Phi^*{}_0\right)dS \right]\iint_A \hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

あるいは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Phi^*{}_S(P;\omega) - \iint_H \Phi^*{}_S(Q;\omega)\frac{\partial G^*(P;Q)}{\partial n_Q}dS(Q) \\
&\quad = \Phi^*{}_0(P;\omega) + \left[K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \Phi^*{}_S dS \right]\iint_A \hat{G}^*(P;Q;\omega)dS(Q)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

が得られる．

4.2　流体力係数

前節で求めた空気室の変動圧による力(3.54)式の Fourier 変換を行うと

$$F^{*A}{}_{ij}(\omega) = -\mu^A{}_{ij}\cdot\left[-\omega^2\xi^*{}_j\right] - K^{*A}{}_{ij}(\omega)\left[i\omega\xi^*{}_j\right] - c^A{}_{ij}\left[\xi^*{}_j\right] \tag{4.9}$$

であるが，

$$\begin{aligned}
K^{*A}{}_{ij}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K^A{}_{ij}(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} K^A{}_{ij}(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} K^A{}_{ij}(t)\sin(\omega t)dt\cdot \\
&\equiv K^{*A}{}_{ij}{}^C(\omega) + iK^{*A}{}_{ij}{}^S(\omega)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

と書くことにすると

$$F^{*A}{}_{ij}(\omega)=\omega^2\left[\mu^A{}_{ij}+\frac{K^{*A}{}_{ij}{}^S(\omega)}{\omega}\right]\cdot\xi^*{}_j+\left[-i\omega K^{*A}{}_{ij}{}^C(\omega)\right]\cdot\xi^*{}_j+\left[-c^A{}_{ij}\right]\cdot\xi^*{}_j \tag{4.11}$$

と表される.

一方，周波数領域において，radiation ポテンシャルの積分方程式(4.6)が解かれたとして，空気室変動圧による流体力係数を求める手順は以下のとおりである.

$$F^{*A}{}_{ij}(\omega)=Aq_i\cdot\overline{P}^*{}_j(\omega) \tag{4.12}$$

ここで(2.19)より

$$\overline{P}^*{}_j(\omega)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\cdot\iint_A\left(i\omega\Phi^*{}_j+g\Delta z^*{}_j\right)dS \tag{4.13}$$

である．そこで

$$\begin{aligned}&\Phi^*{}_j(\omega)=i\omega\xi^*{}_j\phi^*{}_j\equiv i\omega\xi^*{}_j\left(\phi^*{}_j{}^r+i\phi^*{}_j{}^i\right)\\&\iint_A\Delta z^*{}_j(\omega)dS=Aq_j\cdot\xi^*{}_j\end{aligned} \tag{4.14}$$

を(4.13)に代入すると，

$$\overline{P}^*{}_j(\omega)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\left[\iint_A\left\{-\omega^2\left(\phi^*{}_j{}^r+i\phi^*{}_j{}^i\right)\right\}dS+gAq_j\right]\cdot\xi^*{}_j \tag{4.15}$$

となる．そこで，(4.15)を(4.12)式に代入すると

$$F^{*A}{}_{ij}(\omega)=\omega^2a^{*A}{}_{ij}(\omega)\cdot\xi^*{}_j-i\omega b^{*A}{}_{ij}(\omega)\cdot\xi^*{}_j-c^A{}_{ij}\cdot\xi^*{}_j \tag{4.16}$$

ここで

$$a^{*A}{}_{ij}(\omega)\equiv\rho\Lambda q_i\iint_A\phi^*{}_j{}^r dS\quad,\quad b^{*A}{}_{ij}(\omega)\equiv-\rho\Lambda q_i\omega\iint_A\phi^*{}_j{}^i dS\quad,\quad c^A{}_{ij}\equiv\rho gA\Lambda q_iq_j \tag{4.17}$$

と表される．これが，周波数領域での表現である.

(4.16)と(4.11)を対比すると，

$$\mu^A{}_{ij}+\frac{K^{*A}{}_{ij}{}^S(\omega)}{\omega}=a^{*A}{}_{ij}(\omega)\quad,\quad K^{*A}{}_{ij}{}^C(\omega)=b^{*A}{}_{ij}(\omega) \tag{4.18}$$

の関係にあることがわかる．これより，（メモリー影響関数は因果律を満たす関数であるので）

$$\mu^A{}_{ij}=a^{*A}{}_{ij}(\infty) \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}&K^A{}_{ij}(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\omega\left\{a^{*A}{}_{ij}(\omega)-a^{*A}{}_{ij}(\infty)\right\}\sin(\omega t)d\omega\\&or\\&K^A{}_{ij}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty b^{*A}{}_{ij}(\omega)\cos(\omega t)d\omega\end{aligned} \tag{4.20}$$

このようにして，周波数領域の流体力係数から時間領域の流体力係数が求められることになる.

同様にして，変動水圧による流体力 $\mu_{ij}, K_{ij}(t)$ についても，周波数領域の流体力係数から求められる．

次に，運動方程式の右辺，波浪強制力に関しては，時間領域では入射波の速度ポテンシャル $\Phi_0(t)$ が与えられたら，(3.44)式の積分方程式を解き，(3.56)式で強制力が求められるが，周波数領域では以下にように取り扱うことになる．まず，多方向不規則波の速度ポテンシャルが以下のように表されるとする．

$$\Phi_0(x,y,z;t) = \sum_l \sum_m \eta_{lm} \phi^*{}_0(x,y,z;\omega_l,\theta_m) e^{i(\omega_l t + \varepsilon_{lm})} \tag{4.21}$$

ここで

$$\phi^*{}_0(x,y,z;\omega_l,\theta_m) = \frac{ig}{\omega_l} \frac{\cosh k_l(z+h)}{\cosh k_l h} e^{-i(k_l x \cos\theta_m + k_l y \sin\theta_m)} \tag{4.22}$$

この(4.22)式で表される素成波に対するポテンシャル $\phi^*{}_S$ を(4.8)式の積分方程式で解き，それによる強制力を

$$f^*{}_i(\omega_l,\theta_m) = -\rho i \omega_l \iint_H \phi^*{}_S(\omega_l,\theta_m) \cdot n_i \, dS - \rho i \omega_l \Lambda q_i \iint_A \phi^*{}_S(\omega_l,\theta_m) \, dS \tag{4.23}$$

とすると，その合成により

$$F^W{}_i(t) = \mathrm{Re} \sum_l \sum_m \eta_{lm} f^*{}_i(\omega_l,\theta_m) e^{i(\omega_l t + \varepsilon_{lm})} \tag{4.24}$$

として，時間領域の多方向不規則波に対する波浪強制力が求められる．

以上のようにして，周波数領域の解を用いて，時間領域の運動方程式の流体力係数を求めることができる．

5.　流体力係数の対称性および Haskind の定理

通常の浮体においては radiation 流体力係数に対称性が成立する．また，波浪強制力も radiation による発散波から求められるという Haskind の定理が成り立つことが知られており，これらは計算効率の向上あるいは数値計算の精度確認に利用されている．空気室がある浮体についてもこれらの関係が成立するかどうかは興味のあるところである．以下ではこれらの関係を，時間領域及び周波数領域それぞれで検討してみる．検討の便宜のために，前章までに述べた速度ポテンシャルや自由表面上などを一覧にして附録 2 に示しておくことにする．

5.1　流体力係数の対称性

はじめに，時間領域における radiation 流体力の検討を行う．平水中において，j モードのインパルス $n_j\delta(t)$ が与えられたときの流場により，i 方向に働く力は，付録 2 の表を参照すると以下のように表される．

$$f_{ij}(t) = -\rho \iint_H \frac{\partial \phi_j(t)}{\partial t} n_i dS - \rho \Lambda q_i \iint_A \frac{\partial \phi_j(t)}{\partial t} dS - \rho g A \Lambda q_i q_j \cdot H(t) \tag{5.1}$$

右辺第 2，第 3 項が空気室の変動圧による力である．

この力の対称性を考えてみる．そのために，$\dfrac{\partial \phi_j(P;\tau)}{\partial \tau}$ と $\phi_i(P;t-\tau)$ に Green の第 2 定理を適用すると，共に調和な関数であるので，

$$\iint_{H+F+A+B+\infty} \left\{ \frac{\partial \phi_j(P;\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(P;t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi_j(P;\tau)}{\partial \tau \partial n} \phi_i(P;t-\tau) \right\} dS = 0 \tag{5.2}$$

であるが，水底および遠方での表面積分は 0 である．物体表面上の積分は，物体表面上における境界条件より以下のように書ける．

$$\iint_H \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau \partial n} \phi_i(t-\tau) \right\} dS = \iint_H \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} n_i \cdot \delta(t-\tau) - \frac{\partial \{ n_j \delta(\tau) \}}{\partial \tau} \phi_i(t-\tau) \right\} dS$$
$$= \iint_H \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} n_i \cdot \delta(t-\tau) - n_j \dot{\delta}(\tau) \phi_i(t-\tau) \right\} dS \tag{5.3}$$

自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\iint_F \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau \partial n} \phi_i(t-\tau) \right\} dS = \iint_F \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau \partial z} \phi_i(t-\tau) \right\} dS$$
$$= \iint_F \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \left[-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_i(t-\tau)}{\partial \tau^2} \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} \right] \phi_i(t-\tau) \right\} dS \tag{5.4}$$
$$= \frac{1}{g} \iint_F \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} \right] \phi_i(t-\tau) \right\} dS$$

次に，空気室の自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial n} - \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau \partial n} \phi_i(t-\tau) \right\} dS = \iint_A \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial z} - \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau \partial z} \phi_i(t-\tau) \right\} dS$$
$$= \iint_A \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \left[-\dfrac{1}{g} \dfrac{\partial^2 \phi_i(t-\tau)}{\partial \tau^2} + \dfrac{1}{g} \dfrac{\Lambda}{A} \iint_A \dfrac{\partial^2 \phi_i(t-\tau)}{\partial \tau^2} dS + \Lambda q_i \delta(t-\tau) \right] - \\ -\dfrac{\partial}{\partial \tau} \left[-\dfrac{1}{g} \dfrac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} + \dfrac{1}{g} \dfrac{\Lambda}{A} \iint_A \dfrac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} dS + \Lambda q_j \delta(\tau) \right] \phi_i(t-\tau) \end{array} \right\} dS$$
$$= \frac{1}{g} \iint_A \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \phi_i(t-\tau)}{\partial \tau} - \frac{\Lambda}{A} \iint_A \frac{\partial \phi_j(t-\tau)}{\partial \tau} dS \right] + \left[\frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} - \frac{\Lambda}{A} \iint_A \frac{\partial^2 \phi_j(\tau)}{\partial \tau^2} dS \right] \phi_i(t-\tau) \right\} dS$$
$$+ \iint_A \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \Lambda q_i \delta(t-\tau) dS - \iint_A \frac{\partial \Lambda q_j \delta(\tau)}{\partial \tau} \phi_i(t-\tau) dS \tag{5.5}$$

こうしておいて，(5.2)式に $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau$ を施すと，

物体表面上の積分は以下のようになる．

$$\iint_H \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} n_i \cdot \delta(t-\tau) d\tau - n_j \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\delta}(\tau) \phi_i(t-\tau) d\tau \right\} dS = \iint_H \left\{ \frac{\partial \phi_j(t)}{\partial t} n_i - n_j \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} \right\} dS \tag{5.6}$$

自由表面上における積分は以下のように 0 になる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g}\iint_F \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\phi_j(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}\right]+\left[\frac{\partial^2\phi_j(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right\}dS\ \ d\tau$$
$$=\frac{1}{g}\iint_F\left[\frac{\partial\phi_j(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}\right]+\left[\frac{\partial^2\phi_j(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{\infty}dS=0 \tag{5.7}$$

空気室の自由表面上における積分は以下のようなる．

$$\frac{1}{g}\iint_A\left[\frac{\partial\phi_j(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial\phi_j(t-\tau)}{\partial\tau}dS\right]+\left[\frac{\partial^2\phi_j(\tau)}{\partial\tau^2}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\phi_j(\tau)}{\partial\tau^2}dS\right]\phi_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{\infty}dS$$
$$+\iint_A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi_j(\tau)}{\partial\tau}\Lambda q_i\delta(t-\tau)d\tau\ dS-\iint_A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\Lambda q_j\delta(\tau)}{\partial\tau}\phi_i(t-\tau)d\tau\ \ dS$$
$$=\Lambda q_i\iint_A\frac{\partial\phi_j(t)}{\partial t}dS-\Lambda q_j\iint_A\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t}dS \tag{5.8}$$

したがって，(5.6)+(5.7)+(5.8)=0 より以下の関係式が得られる．

$$\iint_H\left\{\frac{\partial\phi_j(t)}{\partial t}n_i\right\}dS+\Lambda q_i\iint_A\frac{\partial\phi_j(t)}{\partial t}dS=\iint_H\left\{\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t}n_j\right\}dS+\Lambda q_j\iint_A\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t}dS \tag{5.9}$$

したがって，(5.9)式を(5.1)式に代入すると

$$\boxed{\begin{aligned}f_{ij}(t)=-\rho\iint_H\frac{\partial\phi_j(t)}{\partial t}n_idS-\rho\Lambda q_i\iint_A\frac{\partial\phi_j(t)}{\partial t}dS-\rho gA\Lambda q_iq_j\cdot H(t)=\\ -\rho\iint_H\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t}n_jdS-\rho\Lambda q_j\iint_A\frac{\partial\phi_i(t)}{\partial t}dS-\rho gA\Lambda q_jq_i\cdot H(t)=f_{ji}(t)\end{aligned}} \tag{5.10}$$

となり，流体力の対称性が成り立つことがわかる．

このことを周波数領域で考えてみよう．同様に付録 2 の表を参照すると，j モードの動揺運動による i 方向の力は以下のように表される．

$$f^*{}_{ij}(\omega)=-\rho i\omega\iint_H\phi^*{}_j(\omega)n_idS-\rho i\omega\Lambda q_i\iint_A\phi^*{}_j(\omega)dS-\rho gA\Lambda q_iq_j\cdot\frac{1}{i\omega} \tag{5.11}$$

右辺第 2，第 3 項が空気室の変動圧による力である．

この力の対称性を考えてみる．そのために，$\phi^*{}_j(P;\omega)$ と $\phi^*{}_i(P;\omega)$ に Green の第 2 定理を適用すると，ともに調和な関数であるので，

$$\iint_{H+F+A+B+\infty}\left\{\phi^*{}_j(p;\omega)\frac{\partial\phi^*{}_i(P;\omega)}{\partial n}-\frac{\partial\phi^*{}_j(P;\omega)}{\partial n}\phi^*{}_i(P;\omega)\right\}dS=0 \tag{5.12}$$

であるが，水底および遠方での表面積分は 0 である．
物体表面上の積分は，物体表面上における境界条件より以下のように書ける．

$$\iint_H\left\{\phi^*{}_j(\omega)\frac{\partial\phi^*{}_i(\omega)}{\partial n}-\frac{\partial\phi^*{}_j(\omega)}{\partial n}\phi^*{}_i(\omega)\right\}dS=\iint_H\left\{\phi^*{}_j(\omega)n_i-n_j\phi^*{}_i(\omega)\right\}dS \tag{5.13}$$

自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\iint_F \left\{ \phi^*{}_j(\omega) \frac{\partial \phi^*{}_i(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial \phi^*{}_j(\omega)}{\partial z} \phi^*{}_i(\omega) \right\} dS = \iint_F \left\{ \phi^*{}_j(\omega) K \phi^*{}_i(\omega) - K \phi^*{}_j(\omega) \phi^*{}_i(\omega) \right\} dS = 0 \tag{5.14}$$

次に，空気室の自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned} &\iint_A \left\{ \phi^*{}_j(\omega) \frac{\partial \phi^*{}_i(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial \phi^*{}_j(\omega)}{\partial z} \phi^*{}_i(\omega) \right\} dS = \\ &= \iint_A \left\{ \phi^*{}_j(\omega) \left[K\phi^*{}_i(\omega) - K\Lambda \iint_A \phi^*{}_i(\omega) dS + \Lambda q_i \right] - \left[K\phi^*{}_j(\omega) - K\Lambda \iint_A \phi^*{}_j(\omega) dS + \Lambda q_j \right] \phi^*{}_i(\omega) \right\} dS \\ &= \Lambda q_i \iint_A \phi^*{}_j(\omega) dS - \Lambda q_j \iint_A \phi^*{}_i(\omega) dS \end{aligned} \tag{5.15}$$

したがって，(5.13)+(5.14)+(5.15)=0 より以下の関係式が得られる．

$$\iint_H \phi^*{}_j(\omega) n_i dS + \Lambda q_i \iint_A \phi^*{}_j(\omega) dS = \iint_H \phi^*{}_i(\omega) n_j dS + \Lambda q_j \iint_A \phi^*{}_i(\omega) dS \tag{5.16}$$

したがって，(5.16)式を(5.11)式に代入すると

$$\boxed{\begin{aligned} f^*{}_{ij}(\omega) &= -\rho i\omega \iint_H \phi^*{}_j(\omega) n_i dS - \rho i\omega \Lambda q_i \iint_A \phi^*{}_j(\omega) dS - \rho g A \Lambda q_i q_j \cdot \frac{1}{i\omega} \\ &= -\rho i\omega \iint_H \phi^*{}_i(\omega) n_j dS - \rho i\omega \Lambda q_j \iint_A \phi^*{}_i(\omega) dS - \rho g A \Lambda q_j q_i \cdot \frac{1}{i\omega} = f^*{}_{ji}(\omega) \end{aligned}} \tag{5.17}$$

という流体力の対称性が成り立つことがわかる．

5.2 Haskind の定理

はじめに時間領域での検討を行う．入射波の速度ポテンシャル $\Phi_0(P;t)$ に応ずる diffraction ポテンシャルを $\Phi_d(P;t)$ とする．

物体表面上の境界条件は

$$\frac{\partial \Phi_d(P;t)}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_0(P;t)}{\partial n} \quad on \;\; H \tag{5.18}$$

である．付録 2 の表を参照すると，入射波による i 方向の波浪強制力は以下のように表される．

$$F^W{}_i(t) = -\rho \iint_H \frac{\partial \{\Phi_0(t) + \Phi_d(t)\}}{\partial t} n_i dS - \rho \Lambda q_i \iint_A \frac{\partial \{\Phi_0(t) + \Phi_d(t)\}}{\partial t} dS \tag{5.19}$$

右辺第 2 項が空気室の変動圧による力である．

この力を，diffraction ポテンシャルを使わずに，radiation ポテンシャルを使って表現することを試みる．

そのために，$\dfrac{\partial \Phi_d(P;\tau)}{\partial \tau}$ と $\phi_i(P;t-\tau)$ に Green の第 2 定理を適用すると，共に調和な関数であるので，

$$\iint_{H+F+A+B+\infty}\left\{\frac{\partial\Phi_d(P;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(P;t-\tau)}{\partial n}-\frac{\partial^2\Phi_d(P;\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(P;t-\tau)\right\}dS=0 \tag{5.20}$$

であるが，水底および遠方での表面積分は 0 である．
物体表面上の積分は，物体表面上における境界条件より以下のように書ける．

$$\iint_H\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial n}-\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)\right\}dS=\iint_H\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}n_i\cdot\delta(t-\tau)+\frac{\partial^2\Phi_0(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)\right\}dS \tag{5.21}$$

自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}&\iint_F\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial n}-\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)\right\}dS=\iint_F\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial z}-\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau\partial z}\phi_i(t-\tau)\right\}dS\\&=\iint_F\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau^2}\right]-\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right\}dS\\&=\frac{1}{g}\iint_F\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}\right]+\left[\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right\}dS\end{aligned} \tag{5.22}$$

次に，空気室の自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}&\iint_A\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial n}-\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)\right\}dS=\iint_A\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial z}-\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau\partial z}\phi_i(t-\tau)\right\}dS\\&=\iint_A\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau^2}dS+\Lambda q_i\delta(t-\tau)\right]\\&-\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{g}\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\left(\Phi_0(\tau)+\Phi_d(\tau)\right)}{\partial\tau^2}dS\right]\phi_i(t-\tau)\end{aligned}\right\}dS\\&=\frac{1}{g}\iint_A\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial\phi_j(t-\tau)}{\partial\tau}dS\right]+\left[\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}dS\right]\phi_i(t-\tau)\right\}dS\\&+\iint_A\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\Lambda q_i\delta(t-\tau)dS-\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^3\Phi_0(\tau)}{\partial\tau^3}dS\cdot\iint_A\phi_i(t-\tau)dS\end{aligned} \tag{5.23}$$

こうしておいて，(5.20)式に $\int_{-\infty}^{\infty}\ d\tau$ を施すと，

物体表面上の積分は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\iint_H\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\ \frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}n_i\cdot\delta(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}\ \frac{\partial^2\Phi_0(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)d\tau\right\}dS\\&\qquad=\iint_H\frac{\partial\Phi_d(t)}{\partial t}n_i\,dS+\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_H\frac{\partial^2\Phi_0(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)dS\ \ d\tau\end{aligned} \tag{5.24}$$

自由表面上における積分は以下のように 0 になる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{g}\iint_F \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}\right]+\left[\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right\}dS\ \ d\tau =$$
$$= \frac{1}{g}\iint_F \left[\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}\right]+\left[\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}\right]\phi_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{\infty} dS = 0 \tag{5.25}$$

空気室の自由表面上における積分は以下のようなる．

$$\frac{1}{g}\iint_A\left[\frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial\phi_i(t-\tau)}{\partial\tau}dS\right]+\left[\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}-\frac{\Lambda}{A}\iint_A\frac{\partial^2\Phi_d(\tau)}{\partial\tau^2}dS\right]\phi_i(t-\tau)\right]_{-\infty}^{\infty}dS$$
$$+\iint_A\ \int_{-\infty}^{\infty}\ \frac{\partial\Phi_d(\tau)}{\partial\tau}\Lambda q_i\delta(t-\tau)d\tau\ dS-\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_A\frac{\partial^3\Phi_0(\tau)}{\partial\tau^3}dS\cdot\iint_A\phi_i(t-\tau)dS\ d\tau$$
$$=\Lambda q_i\iint_A\ \frac{\partial\Phi_d(t)}{\partial t}dS-\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_A\frac{\partial^3\Phi_0(\tau)}{\partial\tau^3}dS\cdot\iint_A\phi_i(t-\tau)dS\ d\tau \tag{5.26}$$

したがって，(5.24)+(5.25)+(5.26)=0 より以下の関係式が得られる．

$$\iint_H\ \frac{\partial\Phi_d(t)}{\partial t}n_i dS+\Lambda q_i\iint_A\ \frac{\partial\Phi_d(t)}{\partial t}dS$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_H\frac{\partial^2\Phi_0(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)dS\ \ d\tau+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_A\frac{\partial^3\Phi_0(\tau)}{\partial\tau^3}dS\cdot\iint_A\phi_i(t-\tau)dS\ d\tau \tag{5.27}$$

したがって，(5.27)式を(5.19)式に代入すると

$$\boxed{\begin{aligned}F^W{}_i(t)&=\rho\left[\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_H\frac{\partial^2\Phi_0(\tau)}{\partial\tau\partial n}\phi_i(t-\tau)dS\ \ d\tau-\iint_H\frac{\partial\Phi_0(t)}{\partial t}n_i dS\right]\\&\quad-\rho\frac{\Lambda}{A}\left[\frac{1}{g}\int_{-\infty}^{\infty}\ \iint_A\frac{\partial^3\Phi_0(\tau)}{\partial\tau^3}dS\cdot\iint_A\phi_i(t-\tau)dS\ d\tau\ +Aq_i\iint_A\frac{\partial\Phi_0(t)}{\partial t}dS\right]\end{aligned}} \tag{5.28}$$

という関係式が成り立つことがわかる．これが，空気室が有る場合の時間領域の Haskind の定理である．

次に，周波数領域で考えてみよう．入射波の速度ポテンシャル $\Phi^*{}_0(P;\omega)$ に応ずる Diffraction ポテンシャルを

$\Phi^*{}_d(P;\omega)$ とする．

物体表面上の境界条件は

$$\frac{\partial\Phi^*{}_d(P;\omega)}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi^*{}_0(P;\omega)}{\partial n}\qquad on\ \ H \tag{5.29}$$

である．付録 2 の表を参照すると，入射波による i 方向の波浪強制力は以下のように表される．

$$F^{*W}{}_i(\omega)=-\rho i\omega\iint_H\left\{\Phi^*{}_0(\omega)+\Phi^*{}_d(\omega)\right\}n_i dS-\rho i\omega\Lambda q_i\iint_A\left\{\Phi^*{}_0(\omega)+\Phi^*{}_d(\omega)\right\}dS \tag{5.30}$$

右辺第 2 項が空気室の変動圧による力（モーメント）である．

この力を，Diffraction ポテンシャルを使わずに，Radiation ポテンシャルを使って表現することを試みる．

そのために，$\Phi^{*}{}_{d}(P;\omega)$ と $\phi^{*}{}_{i}(P;\omega)$ に Green の第 2 定理を適用すると，共に調和な関数であるので，

$$\iint_{H+F+A+B+\infty}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(P;\omega)\frac{\partial\phi^{*}{}_{i}(P;\omega)}{\partial n}-\frac{\partial\Phi^{*}{}_{d}(P;\omega)}{\partial n}\phi^{*}{}_{i}(P;\omega)\right\}dS=0 \tag{5.31}$$

であるが，水底および遠方での表面積分は 0 である．
物体表面上の積分は，物体表面上における境界条件より以下のように書ける．

$$\iint_{H}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\frac{\partial\phi^{*}{}_{i}(\omega)}{\partial n}-\frac{\partial\Phi^{*}{}_{d}(\omega)}{\partial n}\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS=\iint_{H}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)n_{i}+\frac{\partial\Phi^{*}{}_{0}(\omega)}{\partial n}\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS \tag{5.32}$$

自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\iint_{F}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\frac{\partial\phi^{*}{}_{i}(\omega)}{\partial z}-\frac{\partial\Phi^{*}{}_{d}(\omega)}{\partial z}\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS=\iint_{F}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)K\phi^{*}{}_{i}(\omega)-K\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS=0 \tag{5.33}$$

次に，空気室の自由表面上における積分は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}&\iint_{A}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\frac{\partial\phi^{*}{}_{i}(\omega)}{\partial z}-\frac{\partial\Phi^{*}{}_{d}(\omega)}{\partial z}\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS\\&=\iint_{A}\left\{\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\left[K\phi^{*}{}_{i}(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_{A}\phi^{*}{}_{i}(\omega)dS+\Lambda q_{i}\right]-\left[K\Phi^{*}{}_{d}(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_{A}\left(\Phi^{*}{}_{0}(\omega)+\Phi^{*}{}_{d}(\omega)\right)dS\right]\phi^{*}{}_{i}(\omega)\right\}dS\\&=\Lambda q_{i}\iint_{A}\Phi^{*}{}_{d}(\omega)dS+K\frac{\Lambda}{A}\iint_{A}\Phi^{*}{}_{0}(\omega)dS\cdot\iint_{A}\phi^{*}{}_{i}(\omega)dS\end{aligned} \tag{5.34}$$

したがって，(5.32)+(5.33)+(52.34)=0 より以下の関係式が得られる．

$$\iint_{H}\Phi^{*}{}_{d}(\omega)n_{i}dS+\Lambda q_{i}\iint_{A}\Phi^{*}{}_{d}(\omega)dS=-\iint_{H}\frac{\partial\Phi^{*}{}_{0}(\omega)}{\partial n}\phi^{*}{}_{i}(\omega)dS-K\frac{\Lambda}{A}\iint_{A}\Phi^{*}{}_{0}(\omega)dS\cdot\iint_{A}\phi^{*}{}_{i}(\omega)dS \tag{5.35}$$

したがって，(5.35)式を(5.30)式に代入すると

$$\boxed{F^{*W}{}_{i}(\omega)=\rho i\omega\iint_{H}\left(\phi^{*}{}_{i}(\omega)\frac{\partial}{\partial n}-n_{i}\right)\Phi^{*}{}_{0}(\omega)dS+\rho i\omega\frac{\Lambda}{A}\left(K\iint_{A}\phi^{*}{}_{i}(\omega)dS-Aq_{i}\right)\cdot\iint_{A}\Phi^{*}{}_{0}(\omega)dS} \tag{5.36}$$

という関係式が成り立つことがわかる．これが，空気室が有る場合の Haskind の定理である．(5.28)式の Fourier 変換からも(5.36)式が得られる．

ところで，β 方向に進む入射波の速度ポテンシャルは以下のように表される．

$$\begin{aligned}&\Phi^{*}{}_{0}(\omega)=\frac{ig\xi^{*}}{\omega}\phi^{*}{}_{0}(\beta)\\&\text{ここで}\quad \phi^{*}{}_{0}(\beta)=\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}e^{-ik(x\cos\beta+y\sin\beta)}\end{aligned} \tag{5.37}$$

Radiation ポテンシャルϕ_i * の Kochin 関数を

$$H_i(\beta)=\frac{1}{D}\iint_{H+A}\left\{\frac{\partial\phi^*{}_i}{\partial n}-\phi^*{}_i\frac{\partial}{\partial n}\right\}\phi^*{}_0(\beta+\pi)dS$$

$$\text{ここで}D\text{は水深影響係数で}\quad D\equiv 2k\int_{-h}^{0}\left\{\frac{\cosh^2 k(z+h)}{\cosh^2 kh}\right\}dz=\tanh kh+kh/\cosh^2 kh \tag{5.38}$$

とすると，(5.36)式は

$$\begin{aligned}F^{*W}{}_i(\omega)&=\rho i\omega\iint_H\left(\phi^*{}_i\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\phi^*{}_i}{\partial n}\right)\frac{ig\xi^*}{\omega}\phi^*{}_0(\beta)dS+\rho i\omega\frac{\Lambda}{A}\left(K\iint_A\phi^*{}_i dS-Aq_i\right)\cdot\iint_A\frac{ig\xi^*}{\omega}\phi^*{}_0(\beta)dS\\&=\rho g\xi^*\left[\iint_H\left(\frac{\partial\phi^*{}_i}{\partial n}-\phi^*{}_i\frac{\partial}{\partial n}\right)\phi^*{}_0(\beta)dS-\frac{\Lambda}{A}\left(K\iint_A\phi^*{}_i dS-Aq_i\right)\cdot\iint_A\phi^*{}_0(\beta)dS\right]\\&=\rho gD\xi^*\cdot H_i(\beta+\pi)\end{aligned} \tag{5.39}$$

と書ける．なぜならば，Kochin 関数の定義式(5.38)式において，

$$\iint_A\left\{\frac{\partial\phi^*{}_i}{\partial n}-\phi^*{}_i\frac{\partial}{\partial n}\right\}\phi^*{}_0(\beta+\pi)dS=\iint_A\left\{\left(K\phi^*{}_i-K\frac{\Lambda}{A}\iint_A\phi^*{}_i dS+\Lambda q_i\right)\phi^*{}_0(\beta+\pi)-\phi^*{}_iK\phi^*{}_0(\beta+\pi)\right\}dS$$

$$=-\frac{\Lambda}{A}\left(K\iint_A\phi^*{}_i dS-Aq_i\right)\cdot\iint_A\phi^*{}_0(\beta+\pi)dS$$

であるので

$$H_i(\beta)=\frac{1}{D}\left[\iint_H\left\{\frac{\partial\phi^*{}_i}{\partial n}-\phi^*{}_i\frac{\partial}{\partial n}\right\}\phi^*{}_0(\beta+\pi)dS-\frac{\Lambda}{A}\left(K\iint_A\phi^*{}_i dS-Aq_i\right)\cdot\iint_A\phi^*{}_0(\beta+\pi)dS\right] \tag{5.40}$$

と書けるからである．

Kochin 関数は，流場の遠方における特性を表す関数である．例えば，i モードの動揺によって，β 方向に発散して行く波は Kochin 関数を用いて以下のように表される [8)].

$$\eta^*{}_i(\omega)=-iK\xi^*{}_i\sqrt{\frac{k}{2\pi R}}H_i(\omega;\beta)e^{-i(kR-\frac{\pi}{4})}\equiv\xi^*{}_i\cdot T^*(\omega;R)\cdot H_i(\omega;\beta)$$

$$\text{ここで}\quad T^*(\omega;R)\equiv -iK\sqrt{\frac{k}{2\pi R}}e^{-i(kR-\frac{\pi}{4})} \tag{5.41}$$

したがって(5.39)式は，β 方向の入射波によるi モードの波強制力が，i モードの radiation によって，$(\beta+\pi)$ 方向に発散する波によって記述されるということを示している．具体的には，図 4 に示すように，β 方向に進む振幅ξ^* の入射波によって浮体に働くi モードの力$F^{*W}{}_i$ は，平水中で浮体にi モード，振幅ξ^* の radiation を与えたときの発散波η^* を計測し，それをT^* で除することによって(c)式で得られる．同様に，時間領域においては図 5 に示すように，β 方向に進む変位$\xi(t)$ の入射波によって浮体に働くi モードの力$F^W{}_i(t)$ は，平水中で浮体にi モード，変位$\xi(t)$ の radiation を与えたときの発散波$\eta(t)$ を計測し，それを Fourier 変換したものをT^* で除し，その逆 Fourier 変換によって(d)式のように得られる．

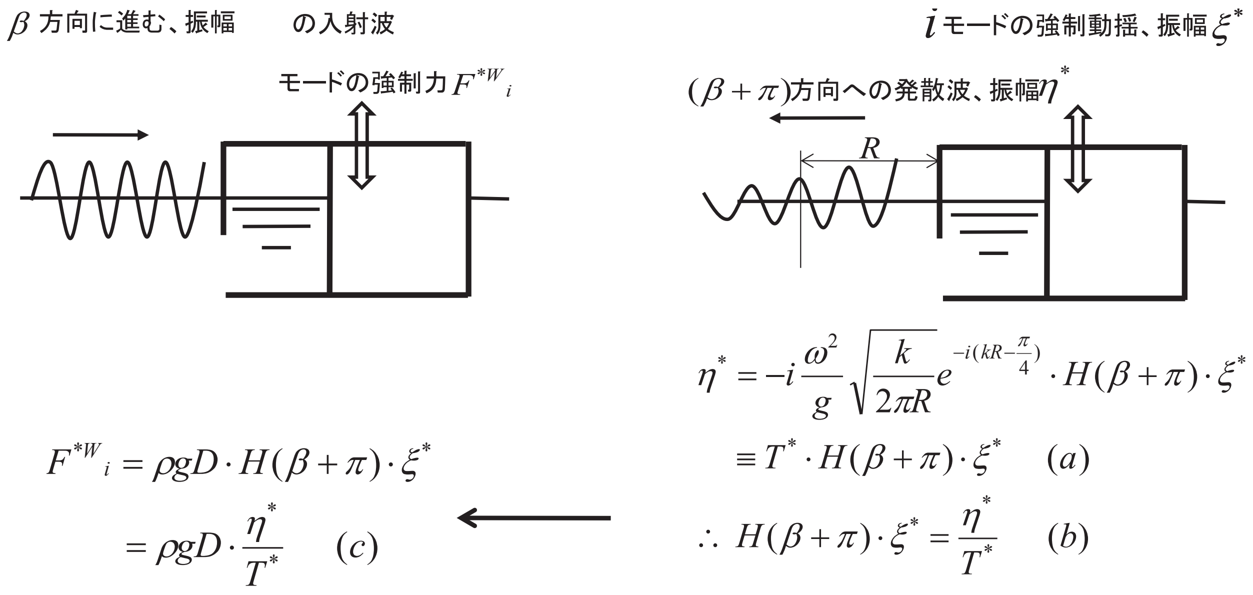


図 4　周波数領域の Haskind の定理

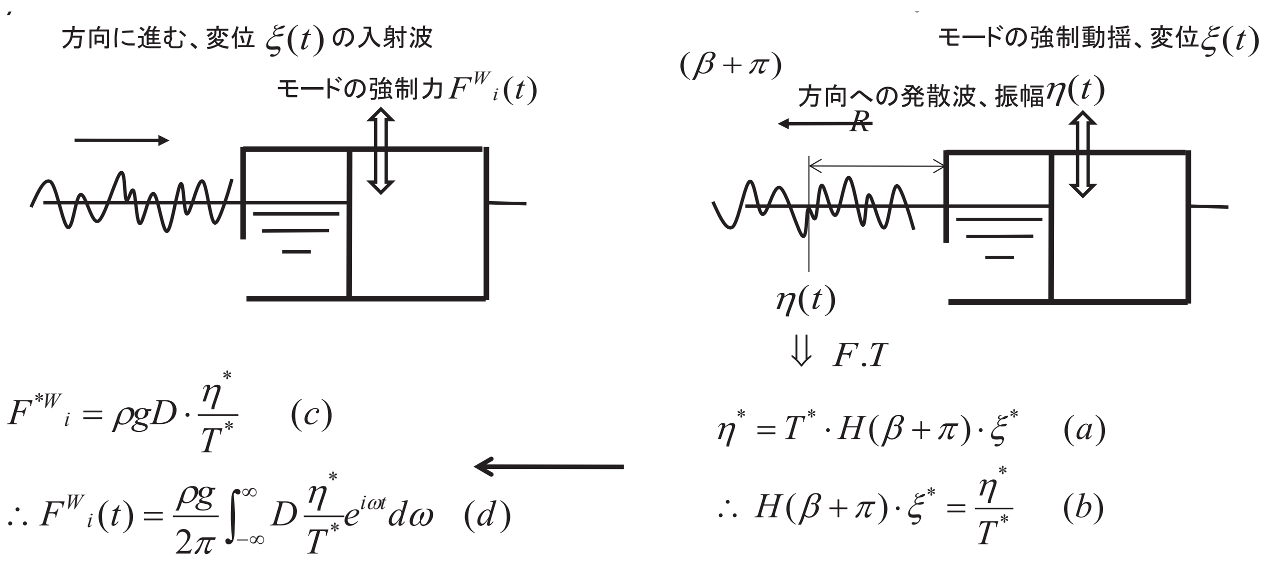


図 5　時間領域の Haskind の定理

これらのことは，空気室のない通常の浮体で成り立つことが知られているが，空気室がある浮体の場合にも同様に成り立つということである．

6.　考察

本論においては，個々の radiation モードは空気室の影響を含む radiation 問題として取り扱ってきた．同様に diffraction 問題においても空気室の影響を含む diffraction 問題として扱ってきた．この場合，全体の流場は以下のように表される．（本節においてはすべて周波数領域での考察を述べるが，簡単のためアスタリスクは省略することにする）

$$\Phi = \frac{iga}{\omega}\left(\phi_0+\phi_d\right)+\sum_{i=1}^{6} i\omega\xi_i\phi_i \tag{6.1}$$

ここでϕ_i，ϕ_d はそれぞれ空気室の影響を含むものである．

これに対して，空気室の振動水柱(Oscillating Water Column; OWC)を別個の radiation モードとして取り扱う考え方がある [2)-6)]．この場合，全体の流場は以下のように表される．

$$\Phi = \frac{iga}{\omega}\left(\phi_0 + \phi_d\right) + i\omega\sum_{i=1}^{6}\xi_i\phi_i + \frac{i\omega}{\rho g}\sum_k p_k\phi_k \tag{6.2}$$

ここでϕ_i，ϕ_d はそれぞ空気室の影響を考慮しない，つまり空気室の水面は大気圧の自由表面条件を満足する，

通常の浮体の速度ポテンシャルとする．右辺第３項のϕ_k が空気室のOWCによるradiationポテンシャルである．

ここではより一般性を持たせるため空気室が複数個あるとする．
これらの速度ポテンシャルの物体表面上における条件，空気室における自由表面条件は以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi_i}{\partial n} = n_i && on \quad H\\
&\frac{\partial\phi_k}{\partial n} = 0 && on \quad H\\
&\frac{\partial\phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial n} && on \quad H
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi_i}{\partial z} - K\phi_i = 0 && on \quad F_k\\
&\frac{\partial\phi_k}{\partial z} - K\phi_k = n_k = \begin{cases}-1 & on \quad F_k\\ 0 & on \quad F_{l\neq k}\end{cases}\\
&\frac{\partial\phi_d}{\partial z} - K\phi_d = 0 && on \quad F_k
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

以下，これらの条件を考慮して radiation 流体力の対称性や Haskind の定理を考察するのであるが [9)-10)]，その便宜のため下記の積分を定義しておく．すなわち，外部の自由表面条件，radiation 条件を満足する 2 つの速度ポテンシャルϕ, φ に Green の第 2 定理を適用すると下式が得られる．

$$I(\phi,\varphi) \equiv \iint_{H+\sum_k F_k}\left(\phi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS = 0 \tag{6.5}$$

こうしておいて radiation 流体力の対称性を見てみよう．まず通常の radiation ポテンシャルの場合，

$$f_{ij} = -\rho i\omega\iint_H \phi_j n_i dS = -\rho i\omega\iint_H \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n}dS \tag{6.6}$$

であるが，(6.5)式において$I(\phi_j, \phi_i)$ とすると，(6.4)式を考慮することにより

$$\begin{aligned}
&I(\phi_j,\phi_i) \equiv \iint_{H+\sum_k F_k}\left(\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right)dS = \iint_H\left(\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right)dS = 0\\
&\therefore \iint_H \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n}dS = \iint_H \phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}dS
\end{aligned} \tag{6.7}$$

となるので，(6.6)式より，　$f_{ij} = f_{ji}$ であることがわかる．

　次に，OWC の radiation ポテンシャルによる流体力は

$$f_{ik} = -\rho i\omega \iint_H \phi_k n_i dS = -\rho i\omega \iint_H \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS \tag{6.8}$$

であるが，(6.5)式において $I(\phi_k, \phi_i)$ とすると，(6.3)(6.4)式を考慮することにより

$$\begin{aligned} I(\phi_k, \phi_i) &\equiv \iint_{H+\sum_k F_k} \left(\phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial n} - \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial n} \right) dS = \iint_H \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS + \iint_{\sum_k F_k} \left(\phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \phi_i \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right) dS \\ &= \iint_H \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS + \iint_{F_k} \left(\phi_k K \phi_i - \phi_i (K\phi_k + n_k) \right) dS = 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\therefore \iint_H \phi_k \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = \iint_{F_k} \phi_i n_k dS$$

となるので，(6.8)式より

$$f_{ik} = -\rho i\omega \iint_H \phi_k n_i dS = -\rho i\omega \iint_{F_k} \phi_i n_k dS = f_{ki} \tag{6.10}$$

であることがわかる．つまり，空気室 k の OWC の radaition によって浮体に働く i モードの力は，浮体の i モードの radiation によって空気室　に働く力と等しいということである．

　次に，OWC の radiation ポテンシャルによって，他の空気室に働く力は

$$f_{kl} = -\rho i\omega \iint_{F_k} \phi_l n_k dS \tag{6.11}$$

であるが，(6.5)式において $I(\phi_l, \phi_k)$ とすると，(6.3)(6.4)式を考慮することにより

$$\begin{aligned} I(\phi_l, \phi_k) &\equiv \iint_{H+\sum_k F_k} \left(\phi_l \frac{\partial \phi_k}{\partial n} - \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial n} \right) dS = \iint_{F_l} \left(\phi_l \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \right) dS + \iint_{F_k} \left(\phi_l \frac{\partial \phi_k}{\partial z} - \phi_k \frac{\partial \phi_l}{\partial z} \right) dS \\ &= \iint_{F_l} \left(\phi_l K \phi_k - \phi_k (K\phi_l + n_l) \right) dS + \iint_{F_k} \left(\phi_l (K\phi_k + n_k) - \phi_k K \phi_l \right) dS = 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\therefore \iint_{F_k} \phi_l n_k dS = \iint_{F_l} \phi_k n_l dS$$

となるので，(6.11)式より

$$f_{kl} = -\rho i\omega \iint_{F_k} \phi_l n_k dS = -\rho i\omega \iint_{F_l} \phi_k n_l dS = f_{lk} \tag{6.13}$$

であることがわかる．つまり，空気室 l の OWC の radaition によって空気室　に働く力は，空気室　の OWC の radiation によって空気室 l に働く力と等しいということである．

　次に波浪強制力を考えてみよう．入射波によって浮体に働く i モードの力は

$$F^W{}_i = -\rho i\omega \frac{iga}{\omega} \iint_H (\phi_0 + \phi_d) n_i dS = \rho g a \iint_H (\phi_0 + \phi_d) n_i dS \tag{6.14}$$

と表されるが，(6.5)式において $I(\phi_d, \phi_i)$ とすると，(6.3)(6.4)式を考慮することにより

$$I(\phi_d,\phi_i)\equiv\iint_{H+\sum_k F_k}\left(\phi_d\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\phi_i\frac{\partial\phi_d}{\partial n}\right)dS=\iint_H\left(\phi_d n_i+\phi_i\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\right)\phi_k dS=0$$

$$\therefore\ \iint_H \phi_d n_i dS=-\iint_H \phi_i\frac{\partial\phi_0}{\partial n}dS \tag{6.15}$$

となるので，(6.14)式より

$$F^W{}_i=\rho ga\iint_H(\phi_0+\phi_d)n_i dS=\rho ga\iint_H\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\right)\phi_0 dS=\rho ga\iint_{H+\sum_k F_k}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n}-\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\right)\phi_0 dS \tag{6.16}$$

と書くことができる．これはつまり，(5.38)式の Kochin 関数の定義式を参照すると，入射波によって浮体に働く i モードの力は，浮体の i モードの radiation による発散波によって記述されることがわかる．

次に，入射波によって空気室 k に働く力は

$$F^W{}_k=\rho ga\iint_{F_k}(\phi_0+\phi_d)n_k dS \tag{6.17}$$

であるが，(6.5)式において $I(\phi_d,\phi_k)$ とすると，(6.3)(6.4)式を考慮することにより

$$I(\phi_d,\phi_k)\equiv\iint_H\left(\phi_d\frac{\partial\phi_k}{\partial n}-\phi_k\frac{\partial\phi_d}{\partial n}\right)dS+\iint_{\sum_k F_k}\left(\phi_d\frac{\partial\phi_k}{\partial n}-\phi_k\frac{\partial\phi_d}{\partial n}\right)dS$$

$$=\iint_H\left(\phi_k\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\right)dS+\iint_{F_k}\left(\phi_d(K\phi_k+n_k)-\phi_k K\phi_d\right)dS=0 \tag{6.18}$$

$$\therefore\ \iint_{F_k}\phi_d n_k dS=-\iint_H\phi_k\frac{\partial\phi_0}{\partial n}dS$$

となるので，(6.17)式より

$$F^W{}_k=\rho ga\iint_H(\phi_0+\phi_d)n_k dS=\rho ga\left[\iint_{F_k}\phi_0 n_k dS-\iint_H\phi_k\frac{\partial\phi_0}{\partial n}dS\right]=\rho ga\iint_{H+\sum_k F_k}\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial n}-\phi_k\frac{\partial}{\partial n}\right)\phi_0 dS \tag{6.19}$$

と書くことができる．つまり，(5.38)式の Kochin 関数の定義式を参照すると，入射波によって空気室 k に働く力は，空気室 k の OWC の radiation による発散波によって記述されることがわかる．(6.19)式が空気室における Haskind の定理である．

以上のようにして OWC を扱う場合にも，radiation 流体力の対称性，Haskind の定理が成り立つということが示された．

具体的に波エネルギー吸収率を理論計算で求めるにあたっては，本論で述べた方法による場合には，空気室開口部の影響を表す係数 α の値を適切に設定しなければならない．(2.16)式の α の値は空気室の水面変動の大きさに依存すると思われるので，実際には α を逐次変化させながら繰り返し計算を行う必要がある．一方，本節で述べた方法に寄る場合には空気室に働く圧力が未知数であり，動揺の大きさと圧力との関係式を運動方程式と連立させて解くということになる．

いずれにおいても，本論で示した事柄は効率的な計算プログラムの開発，計算精度の確認等に有用であろう．

謝　辞

本論文は（株）エイ・エス・アイ総研の野尻信弘様に研究の動機を与えられて検討したものであり，貴重なご討論をいただきました．ここに記して感謝申し上げます．

参考文献

1) 大澤弘敬，宮崎剛，宮島省吾：沖合浮体式波力装置「マイティーホエール」の流体力学的特性と発電出力特性，日本造船学会論文集第 196 号（2004），pp.115-122
2) 中川寛之，植木圭一：防波堤に組み込まれた振動水柱型波力発電装置の一次変換効率に関する研究，日本船舶海洋工学会論文集第 5 号(2007),pp.155-161
3) 中川寛之：振動水柱型波力発電装置の一次変換効率に関する基礎的研究，日本船舶海洋工学会論文集第 6 号(2007),pp.191-197
4) 永田修一，豊田和隆，今井康貴，瀬戸口俊明：浮体式振動水柱型波力発電装置の発電性能時系列計算法の開発，日本船舶海洋工学会論文集第 8 号(2008),pp.239-248
5) 永田修一，豊田和隆，今井康貴，瀬戸口俊明，中川寛之：浮体式振動水柱型波力発電装置の一次変換性能評価法の開発，日本船舶海洋工学会論文集第 14 号(2011),pp.123-133
6) 安澤幸隆，高松直登：波力発電用円筒型 OWC カラムに作用する流体力について，日本船舶海洋工学会講演会論文集第 19 号(2014),pp.523-524
7) 高木又男，新井信一：船舶・海洋構造物の耐波理論　第 9 章遷移状態の浮体の運動，成山堂書店(1996), pp.567-623
8) 大松重雄：浮体の動揺理論における流体力の関係について，海上技術安全研究所報告，第 7 巻第 1 号(2007), pp.105-120
9) J.FALNES and P.McIVER: Surface wave interactions with systems of oscillating bodies and pressure distributions, Applied Ocean Research, Vol.7 No.4(1985), pp.225-234
10) C.H.LEE and F.G.NIELSEN: Analysis of Oscillating-Water-Column Device using a Panel Method, 11th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies(1996),pp.1-4

付録１　時間領域の Green 関数とその Fourier 変換

ここでは簡単のため，無限水深の場合のインパルス応答の Green 関数について記述する．この場合の時間領域の Green 関数は以下のように表される．文献 7)参照.

$$G(P;Q;t) = G_0(P;Q)\cdot\delta(t) + \hat{G}(P;Q;t)\cdot H(t) \tag{f1.1}$$

ここで

$$G_0(P;Q) = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right] \tag{f1.2}$$

$$\hat{G}(P;Q;t) = -\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\,\sin\sqrt{gk}\,t\,dk\right] \tag{f1.3}$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\quad,\quad r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2} \tag{f1.4}$$

なお，このインパルス応答の Green 関数を自由表面条件

$$\frac{\partial^2 G(P;Q;t)}{\partial t^2}+g\frac{\partial G(P;Q;t)}{\partial z}=0\quad on\quad z=0 \tag{f1.5}$$

に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}G = G_0\dot{\delta}(t)+\frac{\partial\hat{G}(t)}{\partial t}H(t)+\hat{G}(0)\delta(t)\\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}G = G_0\ddot{\delta}(t)+\frac{\partial^2\hat{G}(t)}{\partial t^2}H(t)+\frac{\partial\hat{G}(0)}{\partial t}\delta(t)+\hat{G}(0)\dot{\delta}(t)\\
&g\frac{\partial}{\partial z}G = g\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial z}\delta(t)+g\frac{\partial\hat{G}(P;Q;t)}{\partial z}H(t)
\end{aligned} \tag{f1.6}$$

より，各オーダー毎に

$\ddot{\delta}$ のオーダー
$$G_0(P;Q)=0\qquad on\quad z=0 \tag{f1.7}$$

$\dot{\delta}$ のオーダー
$$\hat{G}(P;Q;0)=0\qquad on\quad z=0 \tag{f1.8}$$

δ のオーダー
$$g\frac{\partial G_0(P;Q)}{\partial z}+\frac{\partial\hat{G}(P;Q;0)}{\partial t}=0\qquad on\quad z=0 \tag{f1.9}$$

H のオーダー
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+g\frac{\partial}{\partial z}\right)\hat{G}(P;Q;t)=0\qquad on\quad z=0 \tag{f1.10}$$

となるが，(f1.1)は実際これらを満足していることが確かめられる．

$$\begin{aligned}
g\frac{\partial}{\partial z}G_0(P;Q)_{z=0} &= \frac{g}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right]_{z=0} = \frac{g}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left[-\int_0^\infty e^{k(\zeta-z)}J_0(kR)dk+\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)dk\right]_{z=0}\\
&= \frac{g}{4\pi}\left[\int_0^\infty ke^{k(\zeta-z)}J_0(kR)dk+\int_0^\infty ke^{k(z+\zeta)}J_0(kR)dk\right]_{z=0} = \frac{g}{2\pi}\left[\int_0^\infty ke^{k\zeta}J_0(kR)dk\right]
\end{aligned} \tag{f1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}(P;Q;t)_{z=0,t=0} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\sin\sqrt{gk}\,t\,dk\right]_{z=0,t=0}$$
$$= -\frac{g}{2\pi}\left[\int_0^\infty ke^{k\zeta}J_0(kR)dk\right] \tag{f1.12}$$

これより，(f1.9)が成り立っていることがわかる．また，

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\hat{G}(P;Q;t-\tau)_{z=0,\,\tau\to t} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\sin\sqrt{gk}\,(t-\tau)\,dk\right]_{z=0,\ \tau\to t}$$
$$= \frac{g}{2\pi}\left[\int_0^\infty ke^{k\zeta}J_0(kR)dk\right] \tag{f1.13}$$

したがって

$$g\frac{\partial}{\partial z}G_0(P;Q) = \frac{\partial}{\partial \tau}\hat{G}(P;Q;0) \qquad on \quad z=0 \tag{f1.14}$$

とも書ける．

(f1.1)式の Fourier 変換を以下のように書く．

$$G^*(P;Q;\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G_0(P;Q)\delta(t)e^{-i\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(P;Q;t)H(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$= G_0(P;Q) + \hat{G}^*(P;Q;\omega) \tag{f1.15}$$

そこで，

$$\hat{G}^*(P;Q;\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(P;Q;t)H(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty dk\,e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\ \int_{-\infty}^{\infty}\sin\sqrt{gk}\,t\cdot H(t)\,e^{-i\omega t}dt\right] \tag{f1.16}$$

であるが，ここで

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\sin\sqrt{gk}\,t\cdot H(t)\,e^{-i\omega t}dt \tag{f1.17}$$

とすると，

$$I = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i\sqrt{gk}t} - e^{-i\sqrt{gk}t}\right]\cdot H(t)\,e^{-i\omega t}dt$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty-}H(t)e^{-i(\omega-\sqrt{gk})t}dt - \int_{-\infty}^{\infty-}H(t)e^{-i(\omega+\sqrt{gk})t}dt\right] \tag{f1.18}$$

と書ける．そこで，ステップ関数の Fourier 変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(t)\,e^{-i\omega t}dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega} \tag{f1.19}$$

より

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2i}\left[\pi\delta(\omega-\sqrt{gk}) + \frac{1}{i(\omega-\sqrt{gk})} - \pi\delta(\omega+\sqrt{gk}) - \frac{1}{i(\omega+\sqrt{gk})}\right] \\
&= \frac{\pi}{2i}\left[\delta(\omega-\sqrt{gk}) - \delta(\omega+\sqrt{gk})\right] + \frac{\sqrt{gk}}{g(k-K)}
\end{aligned}
\tag{f1.20}
$$

が得られる．この(f1.20)を(f1.16)に代入すると

$$
\begin{aligned}
\hat{G}^*(P;Q;\omega) = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2i}\left[\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\left\{\delta(\omega-\sqrt{gk}) - \delta(\omega+\sqrt{gk})\right\}dk\right] \\
&-\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\sqrt{gk}\,\frac{\sqrt{gk}}{g(k-K)}dk\right]
\end{aligned}
\tag{f1.21}
$$

となる．ここで右辺 1 行目において， $\sqrt{gk} = \lambda$ ， $\dfrac{dk}{d\lambda} = \dfrac{2\lambda}{g}$ という変数変換を行うと

$$
\begin{aligned}
1行目 &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2i}\left[\int_0^\infty e^{\frac{\lambda^2}{g}(z+\zeta)}J_0\left(\frac{\lambda^2}{g}R\right)\lambda\left\{\delta(\omega-\lambda) - \delta(\omega+\lambda)\right\}\frac{2\lambda}{g}d\lambda\right] \\
&= \mathrm{sgn}(\omega)\frac{iK}{2}e^{K(z+\zeta)}J_0(KR)
\end{aligned}
\tag{f1.22}
$$

となる．2 行目は $\sqrt{gk}\,\dfrac{\sqrt{gk}}{g(k-K)} = \dfrac{k}{k-K} = 1 + \dfrac{K}{k-K}$ であるので

$$
\int_0^\infty e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)\,dk = \frac{1}{r_1}
\tag{f1.23}
$$

を利用すると

$$
2行目 = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_1} - \frac{K}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)}{k-K}dk
\tag{f1.24}
$$

したがって，(f1.22)(f1.24)式より

$$
\hat{G}^*(P;Q;\omega) = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_1} - \frac{K}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)}{k-K}dk + \mathrm{sgn}(\omega)\frac{iK}{2}e^{K(z+\zeta)}J_0(KR)
\tag{f1.25}
$$

となる．これを(f1.15)式に代入すると，最終的に時間領域の Green 関数の Fourier 変換が以下のように得られる．

$$
G^*(P;Q;\omega) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) - \frac{K}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)}J_0(kR)}{k-K}dk + \mathrm{sgn}(\omega)\frac{iK}{2}e^{K(z+\zeta)}J_0(KR)
\tag{f1.26}
$$

これは周波数領域の Green 関数にほかならない．

付録 2　速度ポテンシャル等の一覧表

速度ポテンシャルや圧力の表示式をまとめて示しておく．下表において，左と右は Fourier 変換，逆変換の関係にある．

時間領域

単位インパルス応答の速度ポテンシャル $\phi_j(t)$

物体表面上の境界条件 $\dfrac{\partial \phi_j(t)}{\partial n} = n_j \cdot \delta(t)$

$$\phi_j(t) = \Omega_j \cdot \delta(t) + \Gamma_j(t)$$

速度 $\dot{\xi}_j(t)$ の場合の速度ポテンシャル $\Phi_j(t)$

$$\begin{aligned}\Phi_j(t) &= \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\phi_j(t-\tau)d\tau \\ &= \dot{\xi}_j(t)\Omega_j + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\Gamma_j(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

$\phi_j(t)$ による変動水圧

$$p_j(t) = -\rho\frac{\partial \phi_j(t)}{\partial t} = -\rho\left[\Omega_j \dot{\delta}(t) + \dot{\Gamma}_j(t)\right]$$

$\Phi_j(t)$ による変動水圧

$$\begin{aligned}P_j(t) &= -\rho\frac{\partial \Phi_j(t)}{\partial t} \\ &= -\rho\left[\ddot{\xi}_j(t)\Omega_j + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j(t-\tau)d\tau\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_j(t) &= \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)p_j(t-\tau)d\tau \\ &= -\rho\int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\left[\Omega_j \dot{\delta}(t-\tau) + \dot{\Gamma}_j(t-\tau)\right]d\tau \\ &= -\rho\left[\ddot{\xi}_j(t)\Omega_j + \int_0^t \dot{\xi}_j(\tau)\dot{\Gamma}_j(t-\tau)d\tau\right]\end{aligned}$$

周波数領域

単位速度に対する速度ポテンシャル $\phi^*{}_j(\omega)$

物体表面上の境界条件 $\dfrac{\partial \phi^*{}_j(\omega)}{\partial n} = n_j$

$$\Omega_j + \Gamma^*{}_j(\omega) = \phi^*{}_j(\omega)$$

速度 $i\omega\xi^*{}_j(\omega)$ の場合の速度ポテンシャル $\Phi^*{}_j(\omega)$

$$\Phi^*{}_j(\omega) = i\omega\xi^*{}_j \cdot \phi^*{}_j(\omega)$$

$\phi^*{}_j(\omega)$ による変動水圧

$$p^*{}_j(\omega) = -\rho i\omega\phi^*{}_j(\omega)$$

$\Phi^*{}_j(\omega)$ による変動水圧

$$\begin{aligned}P^*{}_j(\omega) &= -\rho i\omega\Phi^*{}_j(\omega) \\ &= -\rho i\omega\left[i\omega\xi^*{}_j\phi^*{}_j(\omega)\right] \\ &= \rho\omega^2\xi^*{}_j\phi^*{}_j(\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^*{}_j(\omega) &= i\omega\xi^*{}_j p^*{}_j(\omega) \\ &= i\omega\xi^*{}_j\left[-\rho i\omega\phi^*{}_j(\omega)\right] \\ &= \rho\omega^2\xi^*{}_j\phi^*{}_j(\omega)\end{aligned}$$

空気室の自由表面条件	空気室の自由表面条件
$$\frac{\partial \phi_j(t)}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi_j(t)}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \phi_j(t)}{\partial t^2}dS+\Lambda q_j\cdot\delta(t)$$	$$\frac{\partial \phi^*{}_j(\omega)}{\partial z}=K\phi^*{}_j(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \phi^*{}_j(\omega)dS+\Lambda q_j$$
$$\frac{\partial \Phi_j(t)}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_j(t)}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \Phi_j(t)}{\partial t^2}dS+\Lambda q_j\cdot\dot{\xi}_j(t)$$	$$\frac{\partial \Phi^*{}_j(\omega)}{\partial z}=K\Phi^*{}_j(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \Phi^*{}_j(\omega)dS+\Lambda q_j i\omega\xi^*{}_j$$
Diffraction $\Phi_S(t)=\Phi_0(t)+\Phi_d(t)$	Diffraction $\Phi^*{}_S(\omega)=\Phi^*{}_0(\omega)+\Phi^*{}_d(\omega)$
$$\frac{\partial \Phi_S(t)}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_S(t)}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2 \Phi_S(t)}{\partial t^2}dS$$	$$\frac{\partial \Phi^*{}_S(\omega)}{\partial z}=K\Phi^*{}_S(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \Phi^*{}_S(\omega)dS$$
$$\frac{\partial \Phi_d(t)}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi_d(t)}{\partial t^2}+\frac{1}{g}\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial^2\left(\Phi_0(t)+\Phi_d(t)\right)}{\partial t^2}dS$$	$$\frac{\partial \Phi^*{}_d(\omega)}{\partial z}=K\Phi^*{}_d(\omega)-K\frac{\Lambda}{A}\iint_A \left(\Phi^*{}_0(\omega)+\Phi^*{}_d(\omega)\right)dS$$
空気室の変動圧	空気室の変動圧
$$p_j{}^A(t)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial \phi_j(t)}{\partial t}dS-\rho g\Lambda q_j\cdot H(t)$$	$$p^{*A}{}_j(\omega)=-\rho i\omega\frac{\Lambda}{A}\iint_A \phi^*{}_j(\omega)dS-\rho g\Lambda q_j\cdot\frac{1}{i\omega}$$
$$P_j{}^A(t)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial \Phi_j(t)}{\partial t}dS-\rho g\Lambda q_j\cdot\xi_j(t)$$	$$P^{*A}{}_j(\omega)=-\rho i\omega\frac{\Lambda}{A}\iint_A \Phi^*{}_j(\omega)dS-\rho g\Lambda q_j\cdot\xi^*{}_j$$
Diffraction	Diffraction
$$P_S{}^A(t)=-\rho\frac{\Lambda}{A}\iint_A \frac{\partial \Phi_S(t)}{\partial t}dS$$	$$P^{*A}{}_S(\omega)=-\rho i\omega\frac{\Lambda}{A}\iint_A \Phi^*{}_S(\omega)dS$$

ここで

$$K=\omega^2/g\quad,\qquad \Lambda=C/(1+C)\quad,\ \left(C=\alpha\gamma P_0A/(\rho gV_0)\right)$$

$$q_1=0,\quad q_2=0,\quad q_3=1,\quad q_4=(y_F-y_G),\quad q_5=-(x_F-x_G),\quad q_6=0$$