

構造設計のための非線形波浪荷重解析プログラム NMRIW-II

松井 貞興*, 村上 睦尚*

Development of a Nonlinear Wave Load Analysis Program NMRIW-II for Ship Structural Design

by

Sadaoki MATSUI and Chikahisa MURAKAMI

Abstract

A practical tool for analyzing nonlinear wave loads and hull girder responses for ship structural design, NMRIW-II, has been newly developed based on a nonlinear strip method. This code can be used to estimate wave loads acting on a hull and sectional loads on hull girder in regular or irregular waves. Especially, the strong nonlinear effects that are important for the structural design such as bow-flare slamming and resulting whipping vibration are considered in this code. This article describes the system of the present program and the theoretical formulation in detail. When developing, the authors have been reviewed the basic theory and formulated the equation of motion and response in the generalized form including flexible deformation of axial, vertical bending, horizontal bending and torsional modes of hull girder. Furthermore, the authors proposed simplified calculation method of the impact force and pressure, as well as the radiation/scattering force and pressure in time domain calculation. In order to be a practical tool, the simplified method is applied in time series calculation which brings down the calculation cost. Taking advantage of the computational time, the present tool is also suitable to identify the dominant sea states which determines the load condition of the structural strength evaluation.

* 構造安全評価系

原稿受付 平成29年10月31日

審査日 平成29年12月25日

目 次

1. 緒言.....	37
2. 波浪荷重解析ツールとしての NMRIW-II.....	38
2.1 NMRIW-II の役割.....	38
2.2 計算手法.....	38
2.3 入力及び出力.....	39
2.3.1 入力.....	39
2.3.2 出力.....	40
2.4 計算手順.....	40
3. 理論的背景及び定式化.....	43
3.1 座標系.....	43
3.2 支配方程式.....	43
3.3 Galerkin 法による定式化.....	45
3.4 重力.....	46
3.5 流体力.....	47
3.5.1 波力.....	48
3.5.2 2次元流体力テーブル.....	50
3.5.3 radiation 流体力.....	52
3.5.4 scattering 流体力.....	54
3.5.5 衝撃力.....	55
3.6 運動方程式の数値計算法.....	57
3.7 断面力.....	58
3.8 水圧.....	60
3.8.1 radiation 流場による圧力.....	60
3.8.2 scattering 流場による圧力.....	62
3.8.3 波面の変動による水圧の修正.....	63
4. 結言.....	65
謝 辞.....	66
参考文献.....	66
Appendix A 支配方程式の導出.....	67
Appendix B 運動方程式の係数.....	71
Appendix C 一般化された radiation 流体力係数の導出.....	73
Appendix D 断面力の定式化.....	76

記 号

添え字の i : 外力の方向に関する添え字. =1, 2, 3, 4 のときそれぞれ x, y, z 方向の荷重, せん断中心周りのモーメントを意味する

添え字の j : 変位の方向に関する添え字. =1, 2, 3, 4 のときそれぞれ図心位置の x 方向変位, せん断中心位置の y, z 方向変位, せん断中心周りの回転角を意味する

添え字の i : 外力のモード番号に関する添え字

添え字の j : 変位のモード番号に関する添え字

($'$) (プライム) : x に関する微分 ($= \partial / \partial x$)

($\dot{\quad}$) (ドット) : t に関する微分 ($= \partial / \partial t$)

$(\hat{\quad})$ (ハット) : 複素振幅表記であることを表す記号

U : 船体の前進速度[m/s]

χ : 出会い波方位角[rad]

$\mathbf{u}(x, y, z, t)$: 変位ベクトル[m]

$u(x, t)$ または $u_1(x, t)$: 図心位置の x 方向変位[m]

$v(x, t)$ または $u_2(x, t)$: せん断中心位置の y 方向変位[m]

$w(x, t)$ または $u_3(x, t)$: せん断中心位置の z 方向変位[m]

$\theta(x, t)$ または $u_4(x, t)$: せん断中心周りの回転角[rad]

y_c, z_c : 図心位置の y, z 座標[m]

y_s, z_s : せん断中心位置の y, z 座標[m]

$\omega_n(x; y, z)$: 正規化されたそり関数[m²]

$y_g(x), z_g(x)$: 断面重心位置の y, z 座標[m]

x_G, y_G, z_G : 重心の x, y, z 座標[m]

N_j : (u_j に関するモード関数の数)-1

$u_{j,j}(x)$: モード関数[-]

$\xi_{j,j}(t)$: 一般化された運動変位[m]or[deg]

$m(x)$: 単位長さあたりの質量[kg/m]

$J_{xx}^s(x)$: 単位長さあたりのせん断中心周りの慣性モーメント[kg-m]

$m_{ij,ij}(x)$: 一般化された単位長さあたりの質量分布

$M_{ij,ij}$: 一般化された質量マトリクス

E : ヤング率[N/m²]

G : せん断弾性係数[N/m²]

η : 構造減衰係数[s⁻¹]

$A_s(x)$: 剛性を持つ領域の断面積[m²]

$I_{yy}(x)$: 水平曲げに関する断面二次モーメント[m⁴]

$I_{zz}(x)$: 縦曲げに関する断面二次モーメント[m⁴]

$I_{\omega\omega}^s(x)$: そりに関する断面定数[m⁶]

$K_s(x)$: ねじりに関する断面定数[m⁴]

$D_{ij,ij}$: 一般化された構造減衰マトリクス

$K_{ij,ij}$: 一般化された剛性マトリクス

ρ : 流体の密度[kg/m³]

g : 重力加速度[m/s²]

$\zeta_w(x, y, t)$: 入射波変位[m]

ζ_a : 入射波振幅[m]

ω : 波周波数[rad/s]

ω_e : 出会い波周波数[rad/s]

k : 波数[rad/m]

N_w : 成分波の数

ζ_{a_m} : 成分波の波振幅[m]

ω_m : 成分波の波周波数[rad/s]

ω_{e_m} : 成分波の出会い波周波数[rad/s]

k_m : 成分波の波数[rad/m]

β_m : 成分波の平均波方向と成す角[rad]

ε_m : 成分波の位相の遅れ[rad]

$u_3^{\text{rel}}(x, t)$: 船体と波面との z 方向相対変位[m]

$\phi(x, y, z, t)$: 速度ポテンシャル[m²/s]

- $\phi^W(x, y, z, t)$: 入射波速度ポテンシャル[m²/s]
 $\phi^R(x, y, z, t)$: radiation 速度ポテンシャル[m²/s]
 $\phi^S(x, y, z, t)$: scattering 速度ポテンシャル[m²/s]
 $\phi^I(x, y, z, t)$: 衝撃流場の速度ポテンシャル[m²/s]
 $\varphi^W(x, y, z, t)$: 入射波単位速度ポテンシャル[m²/s]
 $\varphi_{j,j}^R(x, y, z, t)$: j, j モードの運動による radiation 単位速度ポテンシャル[m]
 $\varphi_j^R(x, y, z, t)$: j モードの運動による 2次元 radiation 単位速度ポテンシャル[m]
 $\varphi_j^\infty(x, y, z, t)$: 周波数無限大のときの j モードの運動による 2次元 radiation 単位速度ポテンシャル[m]
 $\varphi^S(x, y, z, t)$: 2次元 scattering 単位速度ポテンシャル[m]
 $\varphi^I(x, y, z, t)$: 2次元衝撃流場の単位速度ポテンシャル[m]
 $\hat{G}(P, Q)$: Green 関数
 $G^\infty(P, Q)$: 周波数無限大のときの Green 関数
 $p(x, y, z, t)$: 圧力[N/m²]
 $p^W(x, y, z, t)$: 波圧[N/m²]
 $p^R(x, y, z, t)$: radiation 圧力[N/m²]
 $p^S(x, y, z, t)$: scattering 圧力[N/m²]
 $p^I(x, y, z, t)$: 衝撃圧力[N/m²]
 $\mathbf{n}(x, l)$: 船体の外向き法線ベクトル[-]
 $n_i(x, l)$: 一般化された船体の外向き法線ベクトル成分[-]
 $a_{ij}(x)$: 2次元付加質量[kg/m]or[kg]or[kg-m]
 $b_{ij}(x)$: 2次元減衰力係数[kg/s/m] or[kg/s]or[kg-m/s]
 $s_i(x)$: 2次元 scattering 流体力係数[N/m²]
 $a_{ij}^\infty(x)$: 周波数無限大のときの 2次元付加質量[kg/m]or[kg]or[kg-m]
 $a_{ij,ij}(x)$: 一般化された単位長さあたりの付加質量
 $b_{ij,ij}(x)$: 一般化された単位長さあたりの減衰力係数
 $c_{ij,ij}(x)$: 一般化された単位長さあたりの復原力係数
 $A_{ij,ij}$: 一般化された付加質量
 $B_{ij,ij}$: 一般化された減衰力係数
 $C_{ij,ij}$: 一般化された復原力係数
 A_{44}^G : 重心周りの roll の付加慣性モーメント[kg-m²]
 J_{xx}^G : 重心周りの慣性モーメント[kg-m²]
 B_{44}^G : 重心周りの roll の減衰力係数[kg-m²/s]
 B_{44}^{Gnl} : 重心周りの roll の非線形減衰力係数[kg-m²/s]
 T_r : roll の固有周期[s]
 $f_i(x, t)$: 単位長さあたりの外力[N/m]
 $f_i^G(x, t)$: 単位長さあたりの重力[N/m]
 $f_i^P(x, t)$: 単位長さあたりの流体力[N/m]
 $f_i^{in}(x, t)$: 単位長さあたりの慣性力[N/m]
 $f_i^W(x, t)$: 単位長さあたりの波力[N/m]
 $f_i^R(x, t)$: 単位長さあたりの radiation 流体力[N/m]
 $f_i^S(x, t)$: 単位長さあたりの scattering 流体力[N/m]
 $f_i^I(x, t)$: 単位長さあたりの衝撃力[N/m]
 $F_{i,i}(t)$: 一般化された外力[N]or[N-m]
 $F_{i,i}^G(t)$: 一般化された重力[N]or[N-m]
 $F_{i,i}^P(t)$: 一般化された流体力[N]or[N-m]
 $F_{i,i}^W(t)$: 一般化された波力[N]or[N-m]

$F_{i,i}^R(t)$: 一般化された radiation 流体力[N]or[N-m]

$F_{i,i}^S(t)$: 一般化された scattering 流体力[N]or[N-m]

$F_{i,i}^I(t)$: 一般化された衝撃力[N]or[N-m]

$F_i(x, t)$: 断面力. $i = 1\sim 6$ はそれぞれ軸力[N], 水平せん断力[N], 縦せん断力[N], せん断中心周りの振りモーメント[N-m], 水平曲げモーメント[N-m], 縦曲げモーメント[N-m]を意味する.

$\bar{F}_i(x, t)$: 船体固定座標での断面力

1. 緒言

本報告は、新たに開発した非線形ストリップ法プログラム NMRIW-II (Nonlinear Motion in Regular & Irregular Wave - Integrated Intelligence)のプログラム構成及びその理論的背景について詳述するものである。本プログラムは船体構造設計に活用することを目的に作成されたもので、大波高中の船体の非線形応答解析により、構造解析に必要な水圧分布や加速度分布、さらには縦曲げ、水平曲げ、振りモーメント等の断面力を得ることができる。

船体が生涯にわたって重大な損傷を起こすことなく船体の安全性を確保するためには、あらゆる積み付け条件並びにあらゆる海象を想定し、船体にどのような荷重が作用するかを推定した上で、それに耐えるように船体構造設計が行われなければならない。船体に作用する荷重は大きく次の二つに分けられる。即ち、静水中において浮力と船体及び積荷の重量の分布の差によって生じる静的荷重と、波浪中を航行する際に波から受ける流体力や船体が動揺することによって生じる慣性力などの波浪中変動荷重である。前者は、オペレーションの不確実性や積み下ろしの途中で想定外の荷重状態となる場合が問題になることはあるが、荷重の推定自体は至って単純である。一方後者は、海象という大きな不確定要因を持つ現象がそもそもの入力としてあり、その中で船体は動揺し、さらにそれが波を乱すといった複雑な流体-構造の連成現象を物理的に表現しなければならない。そのような複雑な現象は詳細に解析しようとするに際限がなく、目的に応じて何が支配的であるかを見極め、支配的な要因を抽出した上で、実用的な推定手法とするところが工学的な立場として重要である。コンピュータの性能が高まる昨今、詳細な3次元解析が現実的に実行可能になってきており、流場を2次元で近似するストリップ法は、すでに過去の技術となりつつある。しかしながら、ストリップ法は現象の分解並びに近似を巧妙に行った工学的に実用性を有する波浪中応答の簡易解析手法であり、波浪荷重を推定するにあたって実用上満足のいく推定精度を有する。また、簡易手法であるが故にそのハンドリングも容易で、ロバスト性が高く、かつ計算コストが低いという実設計にとって極めて重要となる要素を有しており、ストリップ法は実用的簡易計算法という立場で今後も活用され続けると考えられる。

一方で、近年生じたコンテナ船の重大な折損事故を受け、鋼船規則に非線形波浪荷重をより正しく考慮する試みがなされ、2015年にIACSによって全船級協会の統一規則としてUR S11Aが発効された。当該規則では、非線形波浪荷重プログラムを用いた検討によってバウ・フレア形状係数などの非線形荷重に影響するパラメータが導入されている。しかしながら、スラミングのような非線形性の強い現象や、それによって生じるホイッピングなどのハルガーダ応答の考慮の仕方は各船級規則に委ねることとしており、その構造設計への適用に関する扱いの難しさが伺える。このような状況の中で、構造設計のための波浪荷重解析ツールにとって重要な点は、スラミングなどの強非線形荷重が扱えることである。波浪荷重を求めるにあたって、船体が通常航行する比較的穏やかな海象下を想定した場合は、入射波高が微小という仮定の上になり立つ線形理論（波高と応答が線形関係となる理論）でも十分な推定結果が得られる。しかし、例えば船体が生涯のうちに出くわす中で最も厳しい海象を想定した場合、デッキに生じる青波や、バウ・フレアや船底に生じるスラミング、それによって生じるハルガーダレベルの弾性振動であるホイッピングといった波高に比例しない非線形荷重が顕著になり、非線形現象を扱った時間領域の過渡応答解析が必要となる。

しかしながら現状は、線形波浪荷重プログラムはすでに多くの造船所で所有され実用に供されている一方で、大波高中応答を扱う非線形波浪荷重プログラムはその必要性に反して普及、活用されているとは言いがたい。その中でも、6自由度運動、かつスラミング及びホイッピングの再現が可能なプログラムを所有する組織は一部の

研究機関や大学に限られる。荷重解析プログラムを有さなくとも、船級規則で規定された手続きに準ずれば、間接的に非線形波浪荷重を考慮した構造設計を行ったことになるわけであるが、個々の船型に対して直接的に荷重解析を行うことは、過剰な安全率を取り払った合理的な設計に繋がる。特に、規則開発時には対象としていなかったような新形式の船殻設計に対しては、直接的な荷重解析は殊更重要となる。以上のような背景のもと、著者らは、造船所における船体構造設計のための波浪荷重解析ツールの決定版となることを目指し、実用性に力点を置き本プログラム NMRIW-II の開発を行った。

著者らは、本プログラムの開発にあたって、非線形ストリップ法における種々の応答計算を支配方程式から再検討を行った。運動方程式の定式化においては、ストリップ法と梁の工学的理論を結びつけ、剛体変位に加え軸方向変位、縦曲げ、水平曲げ、振り等の **flexible mode** を考慮している。本プログラムの波浪荷重解析ツールとしてのプログラム構成や計算手法については 2 章に、また運動方程式及び応答計算の具体的な定式化については 3 章に示す。そこでは、プログラムに記述可能な式展開を行っており、その中で、いくつかの計算手法を新しく提案している。なお、本プログラムは、本プログラムの前身となる NMRIW とは、非線形ストリップ法プログラムという手法の点では同じであるが、支配方程式や流体力の考え方などが根本的に異なっており、全く別のプログラムである。

また、本プログラムの精度検証は模型実験結果との比較を通じて行っている¹⁾。

2. 波浪荷重解析ツールとしての NMRIW-II

本章では、NMRIW-II の波浪荷重解析ツールとしての役割や特徴、プログラム構成等を述べる。

2.1 NMRIW-II の役割

本ツールは、緒言でも述べたように、造船所における船体構造設計において用いられる事を想定して開発された実用的波浪荷重解析ツールである。そのため、入出力の簡便性、実用的な計算時間、計算のロバスト性などの観点から、流体力の基礎理論はいささか古典的ではあるが、実績のあるストリップ法に基づいたプログラムとなっている。構造設計においては荒天中の非線形現象を扱える事が重要であり、各流場流体力成分の非線形性に加え、スラミングやホイッピングが考慮されている。

構造解析のために必要となる外圧分布、運動加速度及び断面力については、その定式化は運動と矛盾が生じないように特に詳しく検討されている。具体的には、例えばスラミングについては、一般的によく用いられる運動量理論に基づいているが、衝撃水圧の積分値と衝撃力が一致するように定式化されている。

2.2 計算手法

本ツールで波浪中船体応答計算において考慮している力は以下の通りである。

- ・重力
- ・船体及び積荷の慣性力
- ・浮力
- ・入射波による Froude-Krylov 力
- ・船体運動及び弾性振動による流場成分に起因する **radiation** 流体力
- ・入射波が船体によって散乱された流場成分に起因する **scattering** 流体力
- ・衝撃荷重
- ・青波荷重 (デッキに作用する荷重)
- ・粘性流体力 (横揺れ減衰力のみを考慮する)

ただし、積荷は固体を前提としている。液状貨物や粉体貨物に関しては慣性力として考慮されるものの、自由水影響などの流動的な振る舞いを表現することはできない。また、各計算項目に関して採用されている計算手法を表 1 に示す。詳細な計算内容については、3 章にて記述する。

表 1 NMRIW-II の計算手法

項目	小項目	手法
運動	弾性振動	Galerkin 法によって船体梁の振動モードを考慮
	時間積分	ルンゲ・クッタ・ギル法による陽解法
	流体-構造連成	radiation 流体力は同ステップの変位を用いて計算される (強連成), 波浪外力及び衝撃力は前ステップの変位を用いて計算される (弱連成)
入射波による流場	速度ポテンシャル	Airy 波の線形重ね合せ
	流体力及び圧力計算	時々刻々変化する浸水部に対して厳密に圧力を計算
Radiation 流場及び Scattering 流場	定式化	STF 法 (End term 無し)
	2次元流体力計算	Close-fit 法 (Irregular Frequency 除去)
	大変位影響	流体力テーブルから内挿
	メモリー影響	無し (不規則波計算ではゼロクロス出会い波周波数における流体力係数を用いる)
	波面変動による補正	線形外挿
スラミング	衝撃力計算	運動量理論 (付加質量の時間変化)
	衝撃圧力計算	運動量理論 (radiation 速度ポテンシャルの時間変化)
	3次元影響	船体と波面との相対速度に算入
青波		デッキに生じる非散乱入射波圧を計算
横揺れ減衰力		入力された減減係数 a, b によって roll の角速度及びその二乗に比例する減衰力を与える

2.3 入力及び出力

NMRIW-II は、船体の各横断面における 2 次元的情報及び波情報を入力とし、構造解析に必要なとなる水圧分布や断面力を出力する。以下に、本プログラムに必要なとなる入力情報及び出力情報について説明する。

2.3.1 入力

◆船体情報

- ・垂線間長
- ・船幅
- ・A.P.及びF.P.における喫水
- ・重心高さ
- ・メタセンタ高さ
- ・roll 環動半径あるいは横揺れ固有周期
- ・オフセット (断面の数及び位置は任意)
- ・単位長さあたりの重量の長手方向分布
- ・重心高さの長手方向分布
- ・roll 環動半径の長手方向分布
- ・ヤング率
- ・2 節振動の対数減衰率
- ・船体梁の諸断面係数の長手方向分布 (断面 2 次モーメント等)
- ・振動モード関数 (入力しない場合両端自由の一樣梁の自由振動モードを用いる)
- ・せん断中心高さ

◆船速及び波条件

- ・船速
- ・横揺れ減減係数 (船速依存)
- ・出会い波方位角

- ・波高
- ・波長船長比（波長船長比の平方根，波周波数，波周期による指定も可能）

入射波は，規則波に加え，不規則波の選択が可能である．不規則波は ISSC 波スペクトルを用いる．即ち，有義波高 H_s 及びゼロクロス波周期 T_z を入力とし，次式で表される長波頂及び短波頂の波スペクトルを用いる．

$$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega) = \frac{H_s^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{T_z}\right)^4 \omega^{-5} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{T_z}\right)^4 \omega^{-4}\right\} \quad (2.1)$$

$$\Phi_{\zeta\zeta}(\omega, \beta) = \frac{H_s^2}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{T_z}\right)^4 \omega^{-5} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{T_z}\right)^4 \omega^{-4}\right\} \left(\frac{2}{\pi} \cos^2 \beta\right) \quad (2.2)$$

ここで， ω は波周波数， β は波の主方向に対する成分波の方位角である．また，ユーザー定義波によって，任意個の成分波のそれぞれの振幅，周波数，位相，方位角の定義を行うことも可能となっている．

2.3.2 出力

本プログラムでは，以下の波浪中応答時系列を得ることができ，その時系列データをフーリエ解析及びスペクトル解析することによって周波数応答関数並びに応答スペクトルを得ることができる．

- ・6自由度船体運動及び flexible mode の運動変位
- ・任意位置の上下・左右加速度
- ・断面力（軸力，水平，縦剪断力及び水平曲げ，縦曲げ，振りモーメントの長手方向分布）
- ・船体表面に作用する水圧分布

また，構造解析用の荷重形式での出力や，アニメーションの出力にも対応している．アニメーションは図 2.1 に示すように，船体運動変位，非散乱波面，各水圧成分のベクトル及び各断面力成分の分布を視認することができる．

2.4 計算手順

計算手順は以下の通りである．また，図 2.2 に計算のフローチャートを示す．

1) 入力

2.3.1 項で述べた入力データを読み込む．

2) 入力チェック及び初期計算

静水中における排水量，重心位置，メタセンタ高さや roll 環動半径の計算等を行い，それぞれ入力値と比較する．船体が静水中で平衡でない場合，重量と浮力，且つ重心と浮心の長手方向位置が一致するように自動的に重量分布を調整する．roll の固有周期 T_r が入力された場合，次式によって roll 環動半径 κ_{xx} を決定している．

$$\kappa_{xx} = \sqrt{g\overline{GM} \left(\frac{T_r}{2\pi}\right)^2 - \frac{A_{44}^G}{M}} \quad (2.3)$$

ただし， $g, M, \overline{GM}, A_{44}^G$ はそれぞれ重力加速度，船体の質量，メタセンタ高さ，重心周りの roll 付加慣性モーメントである． A_{44}^G は後述の流場解析によって求められる．逆に，roll 環動半径 κ_{xx} が入力された場合，roll の固有周期 T_r を次式で計算する．

$$T_r = 2\pi \sqrt{\frac{\kappa_{xx}^2 + A_{44}^G/M}{g\overline{GM}}} \quad (2.4)$$

この場合， A_{44}^G は roll の固有周期 T_r に依存する値であるため， T_r は陽には求められない．ここでは，収束計算を行うことで T_r の値を決定している．また，モード関数や質量マトリクス，構造減衰マトリクス及び剛性マトリクス

を定義し、静水中の縦せん断力及び縦曲げモーメントの計算や、付加質量を考慮した弾性振動の固有周期を計算する。さらに、周波数無限大のときの流場解析を、各断面について、あらゆる喫水、横傾斜角の没水形状について行い、付加質量テーブル及び速度ポテンシャルテーブルを用意する。これは弾性振動に起因する radiation 流体力及び衝撃荷重の計算で使用される。

3) 入射波の設定

不規則波中の計算を行う場合、波スペクトルを定義し、それにより各成分波の振幅、周波数、位相、進行方向を決定する。位相は一様乱数として与える。なお、ユーザー定義入力によって、成分波情報を直接設定することも可能である。

4) 流体力テーブル及び速度ポテンシャルテーブルの作成

流場解析が必要となる radiation 流場成分及び scattering 流場成分に関しては、時系列計算に先立って周波数領域の計算を行う。各断面であらゆる喫水、横傾斜角の没水形状に対して、close-fit 法によって出会い波周波数における流場を計算し、流体力テーブル及び速度ポテンシャルテーブルを作成しておく。

5) 断面流体力の計算

各時間ステップで、船体の各横断面における流体力を計算する。radiation 流体力及び scattering 流体力は、断面の波面との相対変位及び横傾斜角によって、テーブルから内挿することで決定する。Froude-Krylov 力及び浮力は、波面との相対位置を計算し、波面下の要素に関して積分することで厳密に考慮する。スラミング荷重はテーブルから内挿された付加質量の時間変化によって計算される。

6) 一般化された流体力の計算

断面流体力を長手方向に積分することで、全運動モードに対応する流体力(一般化された流体力)を計算する。このとき、radiation 流体力及び scattering 流体力に関しては、部分積分を用いることで前進速度影響項を適切に考慮している。

7) 運動方程式

運動方程式をルンゲ・クッタ・ギル法によって解き、次のステップの運動変位及び運動速度を決定する。

8) 出力計算

必要に応じて、各波浪荷重成分、各水圧成分分布、任意位置の上下左右加速度を計算し、時系列情報として出力する。また、これらを同時に目視することができるアニメーションの出力が可能である。アニメーションの例を図 2.1 に示す。さらに、FEM 解析の入力として、加速度分布及び水圧分布の出力を行う。なお、出力の時間間隔は計算ステップとは独立に指定できる。

9) フーリエ解析

時系列計算で得られたデータ配列を入力として、フーリエ解析あるいはスペクトル解析を行い、周波数応答関数あるいは応答スペクトルの出力を必要に応じて行う。各種応答の最大最小値の出力や、ハイパスフィルターを通した弾性振動成分の標準偏差を出力することも可能となっている。

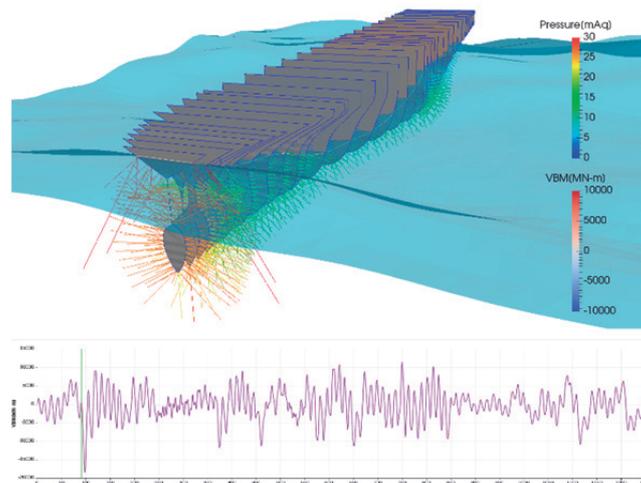


図 2.1 NMRIW-II の出力アニメーションの例

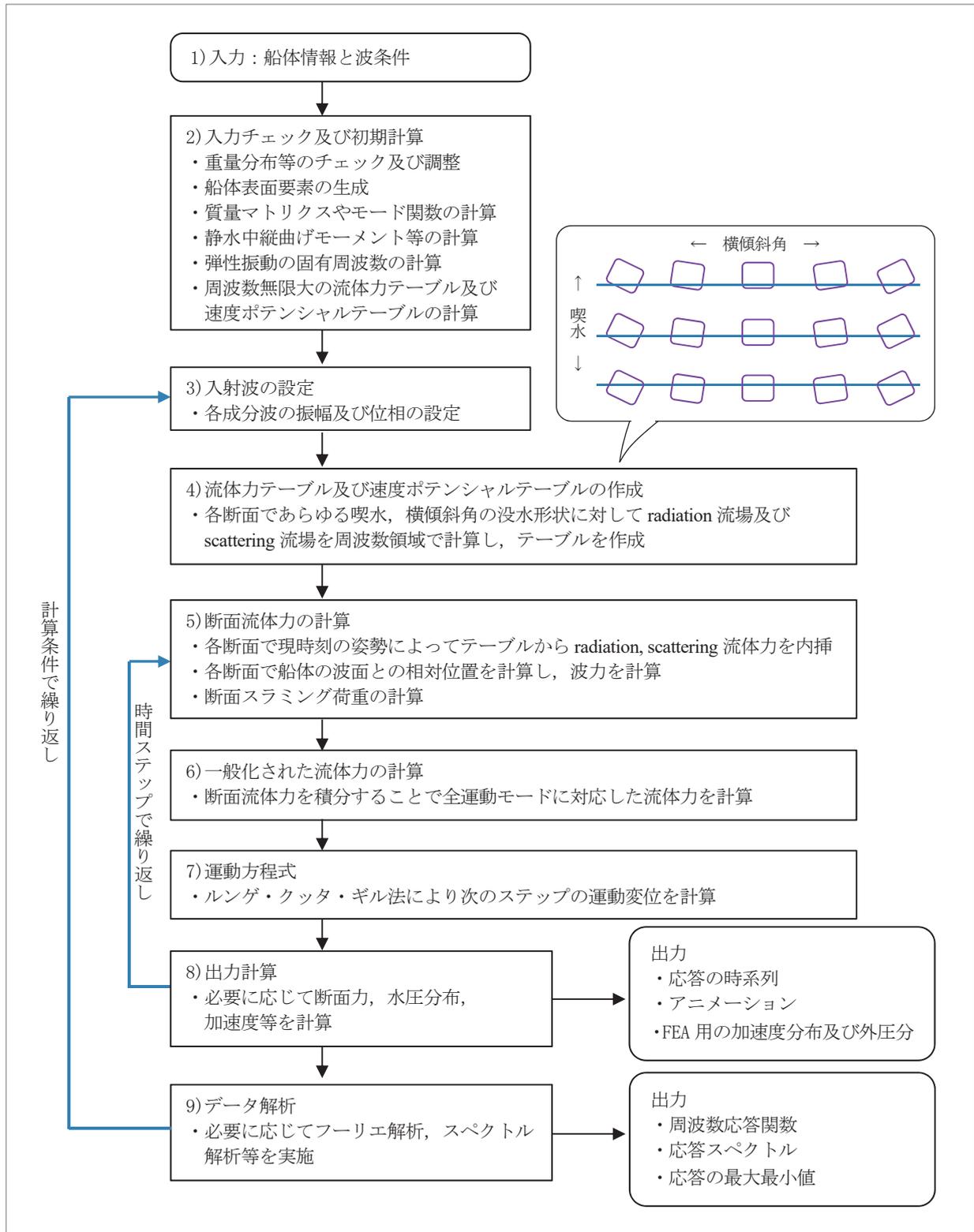


図 2.2 NMRIW-II のフローチャート

3. 理論的背景及び定式化

3.1 座標系

図 3.1 に、本プログラムで定義される空間固定座標系 $O - XYZ$ ，空間固定座標の X 軸と χ の角度をなす方向に一定の速度 U で進む等速前進座標系 $o - xyz$ ，船体固定座標系 $\bar{o} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の関係を示す。船体固定座標系の原点 \bar{o} は船体の Midship, Centerline, 静水面高さにとる。空間固定座標系 $O - XYZ$ と前進座標系 $o - xyz$ の関係は、入射波の波方位角 χ を用いて以下で表せる。

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (x + Ut) \cos \chi - y \sin \chi \\ (x + Ut) \sin \chi + y \cos \chi \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

6 自由度剛体運動モード surge, sway, heave, roll, pitch, yaw の変位及び重心周りの回転角（右ネジを正）を其々 $\xi_j^R(t)$ ($j = 1 \sim 6$) とし、これらは慣性座標系である等速前進座標系 xyz から見たときの重心の x, y, z 方向並進変位及び Euler 角とする。このとき、前進座標系 $o - xyz$ と船体固定座標系 $\bar{o} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の関係は以下で表せる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1^R + x_G \\ \xi_2^R + y_G \\ \xi_3^R + z_G \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \xi_6^R & -\sin \xi_6^R & 0 \\ \sin \xi_6^R & \cos \xi_6^R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi_5^R & 0 & \sin \xi_5^R \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi_5^R & 0 & \cos \xi_5^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_4^R & -\sin \xi_4^R \\ 0 & \sin \xi_4^R & \cos \xi_4^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} - x_G \\ \bar{y} - y_G \\ \bar{z} - z_G \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

ただし、 (x_G, y_G, z_G) は船体の重心の $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 座標とする。本プログラムでは、入射波面との相対位置の計算には式(3.2)に示す Euler 角制御による有限回転を考慮するが、運動方程式の定式化においては簡便のため運動変位を微小と仮定しており、等速前進座標系 $o - xyz$ と船体固定座標系 $\bar{o} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を厳密に区別していない。以降の定式化においては、断りの無い限り、等速前進座標系 $o - xyz$ で理論展開を行う。

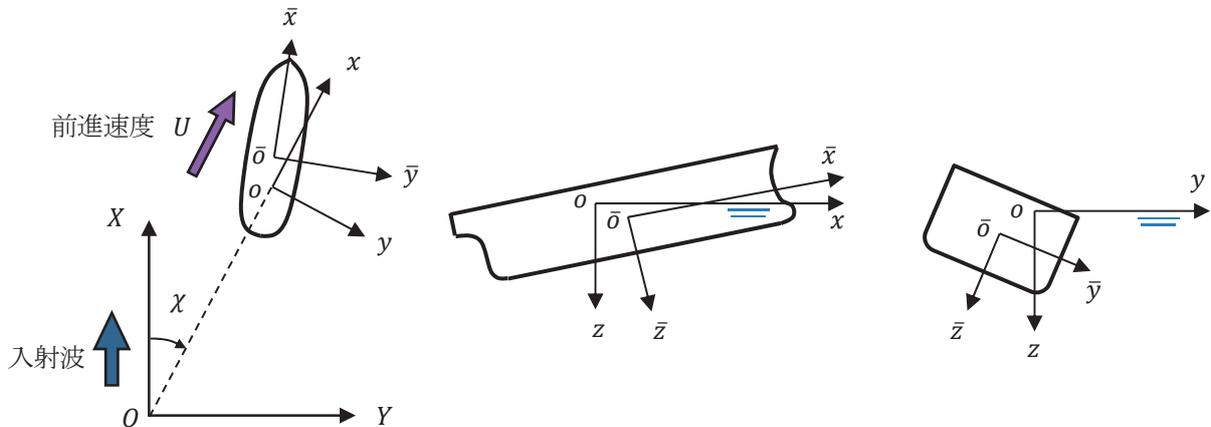


図 3.1 NMRIW-II の座標系

3.2 支配方程式

船体を弾性梁と見做し、船体の任意の長手方向位置において成り立つ変位に関する支配方程式を導出する。

梁の工学的理論によると、中立軸及びせん断中心の長さ方向の変化を無視した場合、変位ベクトル場 $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ の x, y, z 成分 $u_x(x, y, z, t), u_y(x, y, z, t), u_z(x, y, z, t)$ は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} u_x = u - (y - y_c)v' - (z - z_c)w' + \{\omega_n - (y - y_c)z_s + (z - z_c)y_s\}\theta' \\ u_y = v - (z - z_s)\theta \\ u_z = w + (y - y_s)\theta \end{cases} \quad (3.3)$$

ここで、 $u(x, t)$ は $x = x$ の断面の図心の x 方向変位、 $v(x, t), w(x, t), \theta(x, t)$ はそれぞれせん断中心の y, z 方向の変位とその周りの回転角、 $\omega_n(x; y, z)$ は断面内で積分すると0となるように正規化されたそり関数である²⁾。ただし、簡略化のために

$$\cdot = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.4)$$

と表記している。また、図心、せん断中心、重心の y, z 座標をそれぞれ $(y_c, z_c), (y_s, z_s), (y_g(x), z_g(x))$ とする。船体が左右対称の場合は、 $y_c = y_g = y_s = 0$ となる。変位を式(3.3)のように仮定した場合、Hamiltonの原理によって u, v, w, θ に関する以下の支配方程式が得られる。これらの導出はAppendix Aに示す。

$$\begin{cases} m\ddot{u} - \{EA_s(u' + \eta\dot{u}')\}' = f_x & (3.5) \\ m\ddot{v} - (z_g - z_s)m\ddot{\theta} + \{EI_y(v'' + \eta\dot{v}'')\}' = f_y & (3.6) \\ m\ddot{w} + (y_g - y_s)m\ddot{\theta} + \{EI_z(w'' + \eta\dot{w}'')\}' = f_z & (3.7) \\ J_{xx}^s\ddot{\theta} - (z_g - z_s)m\ddot{v} + (y_g - y_s)m\ddot{w} + \{EI_\omega^s(\theta'' + \eta\dot{\theta}'')\}' - \{GK_s(\theta' + \eta\dot{\theta}')\}' = f_\theta & (3.8) \end{cases}$$

同時に、船体梁の両端、即ち船尾端及び船首端($x = x_a, x_f$)において成立する以下の境界条件が得られる。

$$\begin{cases} \{EA_s(u' + \eta\dot{u}')\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \{EI_{yy}(v'' + \eta\dot{v}'')\}'|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \{EI_{yy}(v'' + \eta\dot{v}'')\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \{EI_{zz}(w'' + \eta\dot{w}'')\}'|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \{EI_{zz}(w'' + \eta\dot{w}'')\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \left[\{EI_{\omega\omega}^s(\theta'' + \eta\dot{\theta}'')\}' - GK_s(\theta' + \eta\dot{\theta}') \right]|_{x=x_a, x_f} = 0 \\ \{EI_{\omega\omega}^s(\theta'' + \eta\dot{\theta}'')\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

ただし、簡略化のために

$$\cdot = \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.10)$$

と表記している。また、 $m(x)$ は単位長さあたりの重量、 $J_{xx}^s(x)$ は単位長さあたりのせん断中心周りの慣性モーメント、 E, G, η はそれぞれヤング率、せん断弾性係数及び構造減衰係数、 $f_x(x, t), f_y(x, t), f_z(x, t), f_\theta(x, t)$ はそれぞれ単位長さあたりの x, y, z 方向の外力、せん断中心周りの外力モーメント、 $A_s(x), I_{yy}(x), I_{zz}(x), I_{\omega\omega}^s(x), K_s(x)$ はそれぞれ式(3.11)で定義される軸力、水平曲げ、縦曲げ、そり、振りに関する断面定数である。

$$\begin{cases} A_s = \iint_{A^s} dydz \\ I_{yy} = \iint_{A^s} (y - y_c)^2 dydz \\ I_{zz} = \iint_{A^s} (z - z_c)^2 dydz \\ I_{\omega\omega}^s = \iint_{A^s} \omega_n^2 dydz - z_s^2 I_{yy} - y_s^2 I_{zz} \\ K_s = \iint_{A^s} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dydz \end{cases} \quad (3.11)$$

ただし、 A^s は断面の構造的有効領域を指す。

3.3 Galerkin 法による定式化

以降は変位 $u(x, t), v(x, t), w(x, t), \theta(x, t)$ をそれぞれ $u_j(x, t)$ ($j = 1 \sim 4$)と表記する。これらの変位を、境界条件(3.9)を満足する固有関数 $u_{j,j}(x)$ ($j = 1 \sim 4, j = 0 \sim N_j$)で展開し、以下のように変数分離する。

$$u_j(x, t) = \sum_{j=0}^{N_j} u_{j,j}(x) \xi_{j,j}(t) \quad (3.12)$$

ここで、 $\xi_{j,j}(t)$ ($j = 1 \sim 4, j = 0 \sim N_j$)は固有関数 $u_{j,j}$ に対応する一般化された運動変位である。以上のような変位の変数分離は、船体が相対的に大きな構造減衰を持つ場合に誤差が大きくなるが、一般的な鋼船に対しては大きな誤差は生じない。以降は、単位長さあたりの外力 f_x, f_y, f_z, f_θ もそれぞれ f_i ($i = 1 \sim 4$)と表記する。Galerkin 法に従って、式(3.12)を支配方程式(3.5)~(3.8)に代入し、両辺にそれぞれ重み関数 $u_{j,j}(x)$ ($j = 1 \sim 4, j = 0 \sim N_j$)を乗じて長手方向に積分する。部分積分を施し、境界条件(3.9)を用いて船首尾の項を消去すると、結局以下の運動方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{22} & 0 & \mathbb{M}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{33} & \mathbb{M}_{34} \\ 0 & \mathbb{M}_{42} & \mathbb{M}_{43} & \mathbb{M}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{D}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{D}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{K}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

以上の運動方程式は、微小変位を仮定しているが、左右非対称の船体に対しても成り立つ一般的な形である。ここで、サブマトリックス及びサブベクトルの成分を次のように表す。

$$\mathbb{M}_{ij} = \{M_{ij,ij}\}, \mathbb{D}_{ij} = \{D_{ij,ij}\}, \mathbb{K}_{ij} = \{K_{ij,ij}\}, \mathbf{x}_j = \{\xi_{j,j}\}, \mathbf{F}_i = \{F_{i,i}\} \quad (3.14)$$

式(3.14)の成分の具体的な形はそれぞれ以下ようになる。

$$M_{ij,ij} = \int_L m_{ij,ij} dx \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} D_{11,ij} = \eta \int_L EA_s u'_{1,i} u'_{1,j} dx \\ D_{22,ij} = \eta \int_L EI_{yy} u''_{2,i} u''_{2,j} dx \\ D_{33,ij} = \eta \int_L EI_{zz} u''_{3,i} u''_{3,j} dx \\ D_{44,ij} = \eta \int_L (EI_{\omega\omega}^s u''_{4,i} u''_{4,j} + GK_s u'_{4,i} u'_{4,j}) dx \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} K_{11,ij} = \int_L EA_s u'_{1,i} u'_{1,j} dx \\ K_{22,ij} = \int_L EI_{yy} u''_{2,i} u''_{2,j} dx \\ K_{33,ij} = \int_L EI_{zz} u''_{3,i} u''_{3,j} dx \\ K_{44,ij} = \int_L (EI_{\omega\omega}^s u''_{4,i} u''_{4,j} + GK_s u'_{4,i} u'_{4,j}) dx \end{cases} \quad (3.17)$$

$$F_{i,i} = \int_L f_i u_{i,i} dx \quad (3.18)$$

ただし、式(3.15)の被積分関数 $m_{ij,ij}(x)$ は一般化された単位長さあたりの質量を意味し、次式で定義される。

$$\begin{cases} m_{ij,ij} = m u_{i,i} u_{j,j} & (i = j = 1 \sim 3) \\ m_{44,ij} = J_{\dot{x}x}^s u_{4,i} u_{4,j} \\ m_{24,ij} = -m(z_g - z_s) u_{2,i} u_{4,j} \\ m_{42,ij} = -m(z_g - z_s) u_{4,i} u_{2,j} \\ m_{34,ij} = m(y_g - y_s) u_{3,i} u_{4,j} \\ m_{43,ij} = m(y_g - y_s) u_{4,i} u_{3,j} \\ m_{ij,ij} = 0 & (\text{上記以外の } i, j) \end{cases} \quad (3.19)$$

以降は、単位長さあたりの外力 $f_i(x, t)$ 及び一般化された外力 $F_{i,i}(t)$ をそれぞれ

$$F_{i,i} = F_{i,i}^G + F_{i,i}^P \quad (i = 1 \sim 4, i = 0 \sim N_i) \quad (3.20)$$

$$f_i = f_i^G + f_i^P \quad (i = 1 \sim 4) \quad (3.21)$$

のように重力と流体力に分離して扱う。上付き文字のG, Pはそれぞれ重力及び流体力を意味する。これらの具体的な表示は次節以降に示す。

式(3.12)で展開した固有関数のうち、剛体変位に対応するものとして以下を定義する。

$$\begin{cases} u_{j,0} = 1 & (j = 1 \sim 4) \\ u_{3,1} = -(x - x_G) \\ u_{2,1} = x - x_G \end{cases} \quad (3.22)$$

このとき、 $\xi_{1,0}$ は点 (x_G, y_G, z_G) における surge 変位、 $\xi_{2,0}, \xi_{3,0}, \xi_{4,0}, \xi_{3,1}, \xi_{2,1}$ はそれぞれ点 (x_G, y_s, z_s) における sway, heave 変位及び roll, pitch, yaw 角を表す。式(3.2)で用いられる重心位置における剛体運動変位 ξ_j^R ($j = 1 \sim 6$)はそれぞれ

$$\xi_1^R = \xi_{1,0} - [\cos \xi_{2,1} \quad -\sin \xi_{2,1} \quad 0] \begin{bmatrix} \cos \xi_{3,1} & 0 & \sin \xi_{3,1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi_{3,1} & 0 & \cos \xi_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_{4,0} & -\sin \xi_{4,0} \\ 0 & \sin \xi_{4,0} & \cos \xi_{4,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y_c - y_G \\ z_c - z_G \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_2^R \\ \xi_3^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_{2,0} \\ \xi_{3,0} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \sin \xi_{2,1} & \cos \xi_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi_{3,1} & 0 & \sin \xi_{3,1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \xi_{3,1} & 0 & \cos \xi_{3,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_{4,0} & -\sin \xi_{4,0} \\ 0 & \sin \xi_{4,0} & \cos \xi_{4,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y_s - y_G \\ z_s - z_G \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_4^R \\ \xi_5^R \\ \xi_6^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_{4,0} \\ \xi_{3,1} \\ \xi_{2,1} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

と変換することで得られる。

3.4 重力

重力によって作用する $x = x$ 位置の断面に作用する単位長さあたりの x, y, z 方向力及びせん断中心周りのモーメント $f_i^G(x, t)$ ($i = 1 \sim 4$)は、図 3.2 よりそれぞれ

$$\begin{cases} f_1^G = 0 \\ f_2^G = 0 \\ f_3^G = mg \\ f_4^G = mg\{(y_g - y_s) \cos u_4 - (z_g - z_s) \sin u_4\} \end{cases} \quad (3.26)$$

と与えられる。ただし、 g は重力加速度を表す。以上を式(3.18)に代入することで、一般化された重力 $F_{i,i}^G$ を得る。

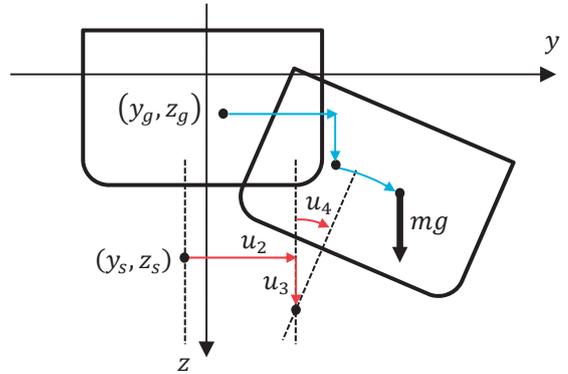


図 3.2 断面に作用する重力

3.5 流体力

流体は、非圧縮、非粘性、非回転を仮定したポテンシャル理論に基づいて扱う。考慮する流体力は、浮力、非散乱入射波成分による Froude-Krylov 力、船体の動揺あるいは弾性振動に起因する radiation 流場成分による radiation 流体力、船体が入射波を散乱することによって生じる scattering 流場成分による scattering 流体力、船体が水面に突入する際に生じる衝撃力、roll に関する粘性流体力の6種類である。このうち、浮力及び Froude-Krylov 力はまとめて波力として扱う。roll に関する粘性流体力はポテンシャル理論の枠組みから外れるため、横揺れ減減係数の形で特別に入力指定し、radiation 流体力の一部として考慮する。なお、本書で扱う流体には液状貨物は含まず、船体の外部にある流体のみを解析の対象としている。

ストリップ法では、一般に船体の各断面における2次元流体力を積分することで3次元流体力を求める。本プログラムにおいても同様であるが、船体の大変位影響を簡易的に考慮するため、2次元 radiation/scattering 流体力係数に対しては、時系列計算に先んじて各断面においてあらゆる喫水及び横傾斜角の没水形状で周波数領域の線形流場解析を行い、波面と船体断面との相対z方向変位 u_3^{rel} 及び横傾斜角 u_4 を変数に持つテーブルとして用意する。このテーブルから、時系列計算中において船体の各断面の波面との相対変位及び横傾斜角をパラメータとして内挿することで、時系列計算における時々刻々の radiation/scattering 流体力係数を決定する。また、波力に関しては、時系列計算中に波面と船体の相対位置を考慮し、船体表面上の圧力を積分することで厳密に考慮している。

本プログラムは STF 法相当と位置づけているが、前進速度影響の考慮に関しては田才、高木による NSM³⁾の考えに則って定式化している。STF 法は本来 Haskind-Newman の関係を用いて放射波から厳密に波浪強制力を導出する手法⁴⁾であり、一方本プログラムでは scattering 流体力を流場解析により直接的に求めているため、手順は STF 法とは異なるが、得られる結果としては STF 法相当である。また、STF 法では船首尾端の前進速度影響項(所謂 end term)は Tuck の定理により定義されているが、本プログラムでは船首尾端の前進速度影響は微小であると仮定し、考慮しないものとする。

さて、流体から受ける力は、圧力 $p(x, y, z, t)$ を船体表面で積分することによって得られる。今、横断面内の船体表面に沿った位置変数を l とし、船体固定座標 $\bar{o} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ における船体表面の外向き法線ベクトル $\bar{n}(x, l)$ の方向余弦を $(\bar{n}_x, \bar{n}_y, \bar{n}_z)$ とすると、前進座標系 $o - xyz$ における法線ベクトル $\mathbf{n}(x, l, t)$ の方向余弦 (n_x, n_y, n_z) は次のように書ける。

$$\begin{cases} n_x = \bar{n}_x \\ n_y = \bar{n}_y \cos u_4 - \bar{n}_z \sin u_4 \\ n_z = \bar{n}_z \cos u_4 + \bar{n}_y \sin u_4 \end{cases} \quad (3.27)$$

ただし、 u'_1, u'_2, u'_3 による変化は微小であるとして無視している。本プログラムでは、簡便のため $\bar{n}_x = 0$ として2次元的に扱っているが、以降の定式化では \bar{n}_x を考慮したまま行う。式(3.27)を用いて一般化された法線ベクトル成分 $n_i(x, l, t)$ ($i = 1 \sim 4$)を以下のように定義する。

$$\begin{cases} n_1 = n_x \\ n_2 = n_y \\ n_3 = n_z \\ n_4 = (\bar{y} - y_s)\bar{n}_z - (\bar{z} - z_s)\bar{n}_y \end{cases} \quad (3.28)$$

以上によって、 $x = x$ 位置の断面に作用する単位長さあたりの x, y, z 方向流体力及びせん断中心周りの流体モーメント $f_i^P(x, t)$ ($i = 1 \sim 4$)を次式によって表すことができる。

$$f_i^P = - \int_{S_H(x)} p n_i dl \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.29)$$

ここで、 $S_H(x)$ は $x = x$ 位置の断面における船体表面、 dl は船体表面上の線素を表す。式(3.29)の圧力 p は、速度ポテンシャル ϕ が分かれば線形化された Bernoulli の圧力方程式

$$p = -\rho \frac{D\phi}{Dt} + \rho gz \quad (3.30)$$

によって求めることが出来る。ただし、圧力は大気圧を基準としており、 ρ は流体の密度を表す。D/Dtは物質微分を意味し、本報告では基礎流場を x 軸負方向に速度 U で流れる一様流と見做すことで、スカラー場 a に対し

$$\begin{cases} \frac{Da(t, x, y, z)}{Dt} = \frac{\partial a(t, x, y, z)}{\partial t} - U \frac{\partial a(t, x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{Da(t, X, Y, Z)}{Dt} = \frac{\partial a(t, X, Y, Z)}{\partial t} \end{cases} \quad (3.31)$$

として作用する作用素であるとする。

以降は、速度ポテンシャルを線形理論に従って次のように成分分離し、それぞれを個別に扱う。

$$\phi = \phi^W + \phi^R + \phi^S + \phi^I \quad (3.32)$$

ただし、上付き文字のW, R, S, Iはそれぞれ入射波成分, radiation 流場成分, scattering 流場成分, 衝撃流場成分を意味する。なお、本書では scattering 流場は入射波による流場成分を除いた散乱流場とし、入射波による流場成分と散乱流場の和を diffraction 流場と呼んでいる。以上に対応して、水圧 p を次のように成分分離する。

$$p = p^W + p^R + p^S + p^I \quad (3.33)$$

以上のうち、静圧は p^W に含める。即ち、

$$p^W = -\rho \frac{D\phi^W}{Dt} + \rho g z \quad (3.34)$$

$$p^R = -\rho \frac{D\phi^R}{Dt} \quad (3.35)$$

$$p^S = -\rho \frac{D\phi^S}{Dt} \quad (3.36)$$

$$p^I = -\rho \frac{D\phi^I}{Dt} \quad (3.37)$$

と定義する。さらに、単位長さあたりの流体力 $f_i^P(x, t)$ ($i = 1 \sim 4$)及び一般化された流体力 $F_{i,i}^P(t)$ ($i = 1 \sim 4, i = 0 \sim N_i$)に対しても水圧の各成分に対応した波力, radiation 流体力, scattering 流体力, 衝撃力に成分分解する。

$$f_i^P = f_i^W + f_i^R + f_i^S + f_i^I \quad (3.38)$$

$$F_{i,i}^P = F_{i,i}^W + F_{i,i}^R + F_{i,i}^S + F_{i,i}^I \quad (3.39)$$

これらの成分の具体的な定式化を以下に述べる。

なお、本節では部分的に調和振動を前提として理論展開を行うため、必要に応じて複素振幅表記を用いる。以降、ハット($\hat{\quad}$)付きの記号は複素振幅を表し、ハットの無い記号と以下の関係を持つことを保証する。

$$a(t) = \Re[\hat{a}e^{i\omega_e t}] \quad (3.40)$$

ただし、 ω_e は出会い波周波数である。

3.5.1 波力

入射波面の Z 方向変位 $\zeta_w(x, y, t)$ 及び入射波の速度ポテンシャル $\phi^W(x, y, z, t)$ を、 N_w 個の成分波の重ね合せとして以下のように定義する。

$$\zeta_w = \sum_{m=1}^{N_w} \zeta_{a_m} \cos \theta_m \quad (3.41)$$

$$\phi^W = \sum_{m=1}^{N_w} \frac{g\zeta_{a_m}}{\omega_m} e^{-k_m Z} \sin \theta_m \tag{3.42}$$

ここで、 θ_m は、空間固定座標系 $O - XYZ$ 及び前進座標系 $o - xyz$ で以下のように表すことができる。

$$\theta_m(X, Y, t) = \omega_m t - k_m(X \cos \beta_m + Y \sin \beta_m) - \varepsilon_m \tag{3.43}$$

$$\theta_m(x, y, t) = \omega_{e_m} t - k_m\{x \cos(\chi - \beta_m) - y \sin(\chi - \beta_m)\} - \varepsilon_m \tag{3.44}$$

ただし、 $\zeta_{a_m}, k_m, \omega_m, \omega_{e_m}, \beta_m, \varepsilon_m$ はそれぞれ素成波の波振幅、波数、波周波数、出会い波周波数、進行方向と入射波の平均方向の成す角、位相の遅れを意味する。また、 χ は入射波の平均方位角である。入射波の平均方向と素成波の方向の関係を図 3.3 に示す。出会い波周波数 ω_{e_m} は以下のように表せる。

$$\omega_{e_m} = \omega_m - k_m U \cos(\chi - \beta_m) \tag{3.45}$$

なお、規則波の場合は $N_w = 1$ として下付き文字の m を除き、それぞれ $\zeta_a, k, \omega, \omega_e$ と表記し、また $\beta_m = 0, \varepsilon_m = 0$ とする。

波圧 p^W は式(3.34)により得られるが、本プログラムでは、大波高においても入射波面で0かつ値が不連続にならないように

$$p^W = \begin{cases} 0 & \text{in } Z \leq \zeta_w \\ -\rho \left. \frac{D\phi^W}{Dt} \right|_{z=0} + \rho g Z & \text{in } \zeta_w < Z \leq 0 \text{ (in case of } \zeta_w < 0) \\ -\rho \frac{D\phi^W}{Dt} + \rho g Z & \text{in } Z > 0 \text{ (in case of } \zeta_w < 0) \\ -\rho \left(\frac{D\phi^W}{Dt} - \left. \frac{D\phi^W}{Dt} \right|_{z=\zeta_w} \right) + \rho g(Z - \zeta_w) & \text{in } Z > \zeta_w \text{ (in case of } \zeta_w > 0) \end{cases} \tag{3.46}$$

と定義する。式(3.46)右辺の各適用領域を上から Z1, Z2, Z3, Z4 とすると、それらはそれぞれ図 3.4 に示した領域に該当する。また、

$$\frac{D\phi^W}{Dt} = \sum_m g\zeta_{a_m} e^{-k_m Z} \cos \theta_m \tag{3.47}$$

と計算される。

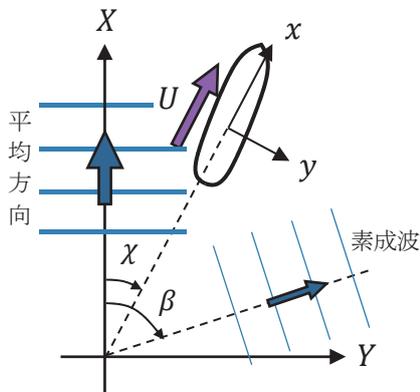


図 3.3 入射波の進行方向

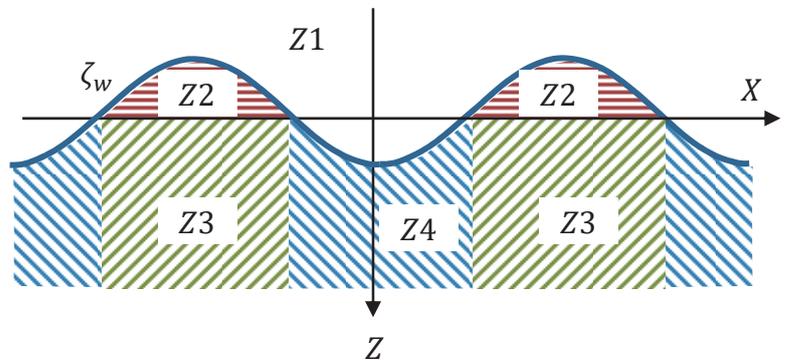


図 3.4 入射波の計算領域

以上を $x = x$ 位置の断面において船体表面上で積分することで、単位長さあたりの波力が求まる。

$$f_i^W = - \int_{S_H(x)} p^W n_i dl \quad (i = 1 \sim 4) \quad (3.48)$$

ここで、本プログラムでは、式(3.48)の積分領域即ち船体表面位置の計算には、式(3.2)及び(3.1)で定義した有限回転の座標変換を行っており、かつデッキも船体表面として考慮することで、簡易的に青波荷重を考慮している。また、本プログラムでは、 \bar{n}_x を用いずに x 方向の力 f_1^W を導出している。即ち、ガウスの発散の定理

$$\iint_{S_H} p^W n_x dx dl = \iiint_V p^{W'} dx dy dz \quad (3.49)$$

より、 x に関する被積分関数としての単位長さあたりの波力

$$f_1^W = - \iint_{S(x)} p^{W'} dy dz \quad (3.50)$$

を計算している。ただし、 $S(x)$ は $x = x$ 位置における船体の横断面領域を意味する。以上を式(3.18)に代入することで、一般化された波力 $F_{i,i}^W$ を得る。

3.5.2.2 次元流体力テーブル

本項では、天下り的にはなるが、後述する一般化された radiation 流体力、scattering 流体力、衝撃力の定義に必要なとなる2次元の radiation/scattering 流体力係数を定義し、また流体力テーブルについて説明する。以下に述べる計算手法は、所謂 close-fit 法と呼ばれる2次元境界要素法であり、任意の形状に対する流場を正確に計算することができるものである。

船体の $x = x$ 位置の断面における2次元 radiation 単位複素速度ポテンシャル $\hat{\phi}_j^R(x; y, z)$ ($j = 1 \sim 4$)は、以下の境界値問題を解くことによって求めることができる。

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi}_j^R = 0 & \text{for } z \geq 0 \\ \frac{\partial \hat{\phi}_j^R}{\partial z} + k_e \hat{\phi}_j^R = 0 & \text{on } z = 0 \\ \frac{\partial \hat{\phi}_j^R}{\partial n} = n_j & \text{on } S_H(x) \\ \hat{\phi}_j^R \rightarrow 0 & \text{as } z \rightarrow \infty \\ \hat{\phi}_j^R \rightarrow e^{\mp i k_e y} & \text{as } y \rightarrow \pm \infty \end{cases} \quad (3.51)$$

ここで、 k_e は ω_e に対応する波数である。上記を満足する $\hat{\phi}_j^R$ と2次元自由表面 Green 関数に対して Green の第二恒等式を適用することで、境界値問題(3.51)を以下の等価な積分方程式に置き換えることができる。

$$\frac{1}{2} \hat{\phi}_j^R(P) + \int_{S_H(x)} \hat{\phi}_j^R(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \hat{G}(P; Q) dl(Q) = \int_{S_H(x)} \hat{G}(P; Q) n_j(P) dl(Q) \quad (3.52)$$

ただし、 $P = (y_P, z_P)$ は場の (y, z) 座標、 $Q = (y_Q, z_Q)$ はソースの (y, z) 座標を意味し、 $\hat{G}(P; Q)$ は Q にソースを持つ2次元自由表面 Green 関数である。

$$\hat{G}(P; Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z_P+z_Q)} \cos k(y_P - y_Q)}{k - k_e} d k + i e^{-k_e(z_P+z_Q)} \cos k_e(y_P - y_Q) \quad (3.53)$$

ここで、

$$r_1 = \sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2} \quad (3.54)$$

であり, 式(3.53)の右辺第2項の積分はコーシーの主値積分を考える. 以上の積分方程式の数値解法は参考文献⁵⁾を参照されたい. なお, 積分方程式を解くにあたって, Irregular frequency を大松の方法⁶⁾によって除去している. radiation 単位速度ポテンシャルによって, 2次元付加質量 $a_{ij}(x)$ ($i, j = 1 \sim 4$)及び2次元減衰力係数 $b_{ij}(x)$ ($i, j = 1 \sim 4$)をそれぞれ以下のように定義する.

$$a_{ij} = -\rho \int_{S_H(x)} \Re[\hat{\varphi}_j^R] n_i dl \quad (3.55)$$

$$b_{ij} = \rho \omega_e \int_{S_H(x)} \Im[\hat{\varphi}_j^R] n_i dl \quad (3.56)$$

一方で, 船体の $x = x$ 位置の断面における船体表面上の2次元 scattering 単位速度ポテンシャル $\hat{\varphi}^S(x; y, z)$ は, radiation 単位速度ポテンシャルの境界条件とは船体表面条件のみが異なり, 次式で定義される入射波の単位速度ポテンシャル $\hat{\varphi}^W(x, y, z)$

$$\hat{\varphi}^W = \exp\{-kz - ik(x \cos \chi - y \sin \chi)\} \quad (3.57)$$

を用いて

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^S}{\partial n} = -\frac{\partial \hat{\varphi}^W}{\partial n} \quad \text{on } S_H(x) \quad (3.58)$$

と与えられるため, 境界値問題と等価な積分方程式は

$$\frac{1}{2} \hat{\varphi}^S(P) + \int_{S_H(x)} \hat{\varphi}^S(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \hat{G}(P; Q) dl(Q) = - \int_{S_H(x)} \hat{G}(P; Q) \frac{\partial \hat{\varphi}^W(P)}{\partial n_Q} dl(Q) \quad (3.59)$$

と表される. scattering 単位速度ポテンシャルの計算に関しては渡辺による方法⁷⁾を踏襲し, グリーン関数(3.53)の波数を, 出会い波周波数に対応する波数 k_e ではなく, 波周波数に対応する波数 k としている. scattering 単位速度ポテンシャルによって, 以下の複素振幅形式の2次元 scattering 流体力係数 $\hat{s}_i(x)$ ($i = 1 \sim 4$)を定義する.

$$\hat{s}_i = -\rho g \frac{\omega_e}{\omega} \int_{S_H(x)} \hat{\varphi}^S n_i dl \quad (3.60)$$

加えて, flexible mode に起因する radiation 流体力及び衝撃力に用いるための, 周波数無限大のときの付加質量を定義する. 周波数無限大のとき, 即ち $k_e \rightarrow \infty$ のとき, Green 関数(3.53)は

$$G^\infty(P; Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r_1} \quad (3.61)$$

と自由表面の影響を表す項が消え, 2対の湧き出しの項 (所謂ランキンソース) のみが残る. このとき, radiation 問題の積分方程式(3.52)は

$$\frac{1}{2} \varphi_j^\infty(P) + \int_{S_H(x)} \varphi_j^\infty(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G^\infty(P; Q) dl(Q) = \int_{S_H(x)} G^\infty(P; Q) n_j(P) dl(Q) \quad (3.62)$$

と, 実形式の積分方程式となる. 以上を解くことで得られる2次元 radiation 単位速度ポテンシャル $\varphi_j^\infty(x; y, z)$ ($j = 1 \sim 4$)によって, 周波数無限大の時の2次元付加質量 $a_{ij}^\infty(x)$ ($i, j = 1 \sim 4$)

$$a_{ij}^{\infty} = -\rho \int_{S_H(x)} \varphi_j^{\infty} n_i dl \quad (3.63)$$

が定義される．なお，周波数無限大の場合，速度ポテンシャルは実部のみになるので，虚部によって定義される減衰力係数は0となる．

本プログラムでは，以上の2次元の radiation/scattering 流体力係数を，船体の各断面における波面とのz方向相対変位 u_3^{rel} 及び横傾斜角 u_4 を変数に持つテーブルとして用意する．波面とのz方向相対変位 $u_3^{\text{rel}}(t, x)$ は

$$\begin{aligned} u_3^{\text{rel}} &= u_3 - \zeta_w|_{y=0} \\ &= \sum_{j=0}^{N_3} u_{3,j} \xi_{3,j} - \sum_{m=1}^{N_w} \zeta_{a_m} \cos \theta_m(x, 0, t) \end{aligned} \quad (3.64)$$

と定義する．即ち，式(3.51)~(3.60)中の積分領域である $x = x$ 位置の船体表面 $S_H(x)$ は波面との相対変位 u_3^{rel} 及び横傾斜角 u_4 に応じて変化し，それに対応した速度ポテンシャルテーブル $\hat{\varphi}_j^R(x; l; u_3^{\text{rel}}; u_4)$, $\hat{\varphi}^S(x; l; u_3^{\text{rel}}; u_4)$, $\varphi^{\infty}(x; l; u_3^{\text{rel}}; u_4)$ 及び流体力係数テーブル $a_{ij}(x; u_3^{\text{rel}}; u_4)$, $a_{ij}^{\infty}(x; u_3^{\text{rel}}; u_4)$, $b_{ij}(x; u_3^{\text{rel}}; u_4)$, $\hat{s}_i(x; u_3^{\text{rel}}; u_4)$ が定義される．このテーブルから，船体の各横断面の波面との相対変位 u_3^{rel} 及び横傾斜角 u_4 によって内挿することで，時系列計算における時々刻々の radiation/scattering 流体力係数が決定される．

3.5.3 radiation 流体力

一般化された radiation 流体力は，周波数領域では次式のように表せる．

$$\hat{F}_{i,i}^R = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} ((i\omega_e)^2 A_{ij,ij} + (i\omega_e) B_{ij,ij} + C_{ij,ij}) \hat{\xi}_{j,j} \quad (i = 1\sim 4, i = 0\sim N_i) \quad (3.65)$$

ここで， $A_{ij,ij}, B_{ij,ij}, C_{ij,ij}$ ($i = 1\sim 4, j = 1\sim 4, i = 0\sim N_i, j = 0\sim N_j$)はそれぞれ付加質量，造波減衰係数，前進速度によって生じる復原力係数であり，其々弾性振動を含む一般化された radiation 流体力係数である．radiation 流体力の時間領域における表示は，メモリー影響関数を用いる手法⁸⁾が厳密であるが，あらゆる周波数における radiation 流体力係数の計算が必要になり，また同時に船体の大変位影響を考慮することが困難になる．このため，本プログラムでは，式(3.65)の形式をそのまま非調和振動の運動に対しても用いることにする．即ち，

$$F_{i,i}^R(t) = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} (A_{ij,ij} \ddot{\xi}_{j,j} + B_{ij,ij} \dot{\xi}_{j,j} + C_{ij,ij} \xi_{j,j}) \quad (i = 1\sim 4, i = 0\sim N_i) \quad (3.66)$$

を用いる．この場合，radiation 流体力係数は波スペクトルのゼロクロス出会い波周波数における値を用いる．

一般化された radiation 流体力係数 $A_{ij,ij}, B_{ij,ij}, C_{ij,ij}$ は，3.5.2 項にて式(3.55)及び式(3.56)で定義された2次元 radiation 流体力係数 $a_{ij}(x), b_{ij}(x)$ を用いて以下のように表すことができる．

$$A_{ij,ij} = \int_L a_{ij,ij} dx \quad (3.67)$$

$$B_{ij,ij} = \int_L b_{ij,ij} dx \quad (3.68)$$

$$C_{ij,ij} = \int_L c_{ij,ij} dx \quad (3.69)$$

ただし，被積分関数 $a_{ij,ij}(x), b_{ij,ij}(x), c_{ij,ij}(x)$ ($i = 1\sim 4, j = 1\sim 4, i = 0\sim N_i, j = 0\sim N_j$)は次式で与えられる．

$$a_{ij,ij} = u_{i,i} u_{j,j} a_{ij} \quad (3.70)$$

$$b_{ij,ij} = \left(u_{i,i} u_{j,j} + \frac{U^2}{\omega_e^2} u'_{i,i} u'_{j,j} \right) b_{ij} - U(u_{i,i} u'_{j,j} - u'_{i,i} u_{j,j}) a_{ij} \quad (3.71)$$

$$c_{ij,ij} = -U^2 u'_{i,i} u'_{j,j} a_{ij} - U(u_{i,i} u'_{j,j} - u'_{i,i} u_{j,j}) b_{ij} \quad (3.72)$$

以上の流体力係数の導出は Appendix C に示す. なお, 本プログラムでは, 計算の安定性の観点から, 復原力係数の対角項が負となった場合, $1/(i\omega_e)^2$ を乗じて付加質量項に移動させている. flexible mode の振動は出会い波周波数の振動よりも高周波の自由振動が支配的となると考え, flexible mode に起因する radiation 流体力については, 式(3.63)で定義される周波数無限大における付加質量 a_{ij}^∞ を用いる. 即ち, $i = 1, i = 1 \sim N_1$ または $i = 2, i = 2 \sim N_2$ または $i = 3, i = 2 \sim N_3$ または $i = 4, i = 1 \sim N_4$ のとき

$$a_{ij,ij} = u_{i,i} u_{j,j} a_{ij}^\infty \quad (3.73)$$

$$b_{ij,ij} = -U(u_{i,i} u'_{j,j} - u'_{i,i} u_{j,j}) a_{ij}^\infty \quad (3.74)$$

$$c_{ij,ij} = -U^2 u'_{i,i} u'_{j,j} a_{ij} \quad (3.75)$$

とする.

横揺れ減衰力に関しては, 粘性や渦による影響が相対的に強くなり, ポテンシャル理論で得られる値では過小となることが知られている. 本プログラムでは, 横揺れ減衰力係数に関しては, free roll から求められる減減曲線の線形係数 a 及び 2 次の係数 $b[1/\text{deg}]$ を用いて, 以下のように定義される重心周りの線形減衰力係数 B_{44}^G 及び非線形減衰力係数 B_{44}^{Gnl} を扱う.

$$\begin{cases} B_{44}^G = \frac{4(A_{44}^G + J_{xx}^G)a}{T_r} \\ B_{44}^{Gnl} = \frac{180}{\pi} \frac{3(A_{44}^G + J_{xx}^G)b}{4} \end{cases} \quad (3.76)$$

ここで, A_{44}^G, J_{xx}^G は重心周りの roll 付加慣性モーメント及び重心を通る軸周りの roll 慣性モーメント, T_r は roll の固有周期である. 以上の導出は文献⁷⁾に詳しい. 以上の重心周りの roll 減衰力係数 B_{44}^G, B_{44}^{Gnl} 及び付加慣性モーメント A_{44}^G とせん断中心周りの量は以下の関係がある.

$$\begin{cases} A_{44}^G = A_{44,00} - l_y(A_{34,00} + A_{43,00}) + l_z(A_{24,00} + A_{42,00}) - l_y l_z(A_{23,00} + A_{32,00}) + l_y^2 A_{33,00} + l_z^2 A_{22,00} \\ B_{44}^G = B_{44,00} - l_y(B_{34,00} + B_{43,00}) + l_z(B_{24,00} + B_{42,00}) - l_y l_z(B_{23,00} + B_{32,00}) + l_y^2 B_{33,00} + l_z^2 B_{22,00} \\ B_{44}^{Gnl} = B_{44,00}^{nl} \end{cases} \quad (3.77)$$

ただし,

$$\begin{cases} l_y = y_G - y_s \\ l_z = z_G - z_s \end{cases} \quad (3.78)$$

と置いている. $B_{44,00}$ に関しては式(3.68)の代わりに式(3.77)によって B_{44}^G を変換した値を用い, $B_{44,00}^{nl}$ による非線形 radiation 流体力 $F_{4,0}^{Rnl}(t)$ は, 関しては以下のように roll 角速度の二乗に比例する形で

$$F_{4,0}^{Rnl} = -\dot{\xi}_{4,0} |\dot{\xi}_{4,0}| B_{44,00}^{nl} \quad (3.79)$$

として考慮され, roll 運動による radiation 流体力(3.66)に加えられる.

3.5.4 scattering 流体力

規則波中の scattering 速度ポテンシャル ϕ^S は, scattering 単位速度ポテンシャル $\hat{\phi}^S(x, y, z)$ を用いて次のように書ける.

$$\phi^S = \Re \left[\frac{ig\zeta_a}{\omega} \hat{\phi}^S e^{i\omega_e t} \right] \quad (3.80)$$

以上を式(3.36)に代入することで, scattering 圧力 p^S は複素振幅形式で

$$\hat{p}^S = \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \left(1 - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}^S \quad (3.81)$$

と表すことができる. これによる単位長さあたりの scattering 流体力 $\hat{f}_i^S(x)$ は, 式(3.60)で定義される2次元 scattering 流体力係数 \hat{s}_i を用いて

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^S &= - \int_{S_H(x)} \hat{p}_S n_i dl \\ &= \zeta_a \hat{s}_i + \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \frac{U}{i\omega_e} \int_{S_H(x)} \frac{\partial \hat{\phi}^S}{\partial x} n_i dl \end{aligned} \quad (3.82)$$

と表される. 式(3.82)の最右辺第2項に関して, 2次元 scattering 単位速度ポテンシャル $\hat{\phi}^S$ の x に関する導関数の正確な演算は困難になる. 一方で, 一般化された scattering 流体力 $\hat{F}_{i,i}^S$ は部分積分を用いることでこの演算を回避することができる.

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i,i}^S &= \int_L u_{i,i} \hat{f}_i^S dx \\ &= \int_L \left(u_{i,i} \zeta_a \hat{s}_i - u'_{i,i} \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \frac{U}{i\omega_e} \int_{S_H(x)} \hat{\phi}^S n_i dl \right) dx \\ &= \int_L \left(u_{i,i} + \frac{U}{i\omega_e} u'_{i,i} \right) \zeta_a \hat{s}_i dx \end{aligned} \quad (3.83)$$

ただし, 二つ目の等号において部分積分を施し, かつ船首尾端の流体力及び n_i の x 方向の変化は小さいとして無視している.

不規則波中計算の場合, 各成分波に対する scattering 流体力(3.83)を重ね合せる方法が厳密であるが, その場合全ての成分波に対する出会い波周波数における scattering 流体力係数を導出する必要があるため, 本プログラムでは簡易的手法をとる. 具体的には, 任意の不規則波中の時系列計算における scattering 流体力 $F_{i,i}^S(t)$ を, 波スペクトルのゼロクロス出会い波周波数で代表させた scattering 流体係数を入射波粒子に対応させることで定義する. 今, 式(3.83)を時間領域で表示すると, 形式上

$$F_{i,i}^S = \int_L \left(u_{i,i} \zeta_a s_i + U u'_{i,i} \int \zeta_a s_i dt \right) dx \quad (3.84)$$

と表せる. ここで, scattering 流体力係数の時間領域表示 $s_i(t)$ は

$$\begin{aligned} \zeta_a s_i &= \zeta_a \Re[\hat{s}_i e^{i\omega_e t}] \\ &= \Re[\hat{s}_i e^{ikx \cos \chi}] \zeta_a \cos(\omega_e t - kx \cos \chi) - \Im[\hat{s}_i e^{ikx \cos \chi}] \zeta_a \sin(\omega_e t - kx \cos \chi) \\ &= s_i^{\text{Re}} \zeta_a \{-\omega_e e^{-kzr} \cos(\omega_e t - kx \cos \chi)\} + s_i^{\text{Im}} \zeta_a \{-\omega_e e^{-kzr} \sin(\omega_e t - kx \cos \chi)\} \end{aligned} \quad (3.85)$$

と変形することができる. ただし, $s_i^{\text{Re}}(t, x), s_i^{\text{Im}}(t, x)$ は以下で定義される係数である.

$$\begin{cases} s_i^{\text{Re}} = -\Re \left[\frac{\hat{S}_i}{\omega \omega_e} e^{kz_r + ikx \cos \chi} \right] \\ s_i^{\text{Im}} = \Im \left[\frac{\hat{S}_i}{\omega} e^{kz_r + ikx \cos \chi} \right] \end{cases} \quad (3.86)$$

式(3.85)の最右辺第1項及び2項の下線部はそれぞれ $(y, z) = (0, z_r)$ 位置で代表された入射波粒子の z 方向加速度及び速度を表している。 $z_r(x)$ は、本プログラムではキール位置にとる。そこで、 $u_w(x, t), v_w(x, t), a_w(x, t)$ をそれぞれ入射波粒子の $(y, z) = (0, z_r)$ 位置の z 方向変位、速度及び加速度と定義し、式(3.85)を一般化して

$$\zeta_a s_i = s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w \quad (3.87)$$

と書くことにする。また、式(3.87)の時間に関する原始関数を以下のように与えることにする。

$$\begin{aligned} \int \zeta_a s_i dt &= s_i^{\text{Re}} \int a_w dt + s_i^{\text{Im}} \int v_w dt \\ &= s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w \end{aligned} \quad (3.88)$$

ここで、式(3.87)及び式(3.88)中の u_w, v_w, a_w はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{cases} u_w = \sum_{m=1}^{N_m} \zeta_{a_m} \frac{\omega_m}{\omega_{e_m}} e^{-k_m z_r} \cos \theta_m \\ v_w = - \sum_{m=1}^{N_m} \zeta_{a_m} \omega_m e^{-k_m z_r} \sin \theta_m \\ a_w = - \sum_{m=1}^{N_m} \zeta_{a_m} \omega_m \omega_{e_m} e^{-k_m z_r} \cos \theta_m \end{cases} \quad (3.89)$$

なお、上記のうち u_w 及び a_w は、正確には入射波粒子の変位及び加速度ではなく、式(3.87)と式(3.88)の関係性を保つように定義された便宜上の量である。結局、式(3.84)に式(3.87)及び式(3.88)を代入することで、時間領域の一般化された scattering 流体力は以下の式で計算することができる。

$$F_{i,i}^S = \int_L \{ u_{i,i} (s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w) + U u'_{i,i} (s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w) \} dx \quad (3.90)$$

3.5.5 衝撃力

波浪衝撃に係る流場の $x = x$ 位置における2次元単位速度ポテンシャル $\varphi^I(x; y, z, t)$ を

$$\varphi^I = \phi^I / \frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} \quad (3.91)$$

と定義する。ただし、 Du_3^{rel}/Dt は波面との相対速度を意味し、

$$\frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} = \sum_{j=0}^{N_3} (u_{3,j} \dot{\xi}_{3,j} - U u'_{3,j} \xi_{3,j}) + \sum_{m=1}^{N_m} \zeta_{a_m} \omega_m \sin \theta_m(x, 0, t) \quad (3.92)$$

と計算される。 φ^I は以下の単位速度で z 方向に落下する物体の2次元水面衝撃問題によって得られる。

$$\begin{cases} \Delta\varphi^I = 0 & \text{in fluid domain} \\ \dot{\varphi}^I + \frac{1}{2}|\nabla\varphi^I|^2 + gz = 0 & \text{on free surface} \\ \dot{F} + \nabla\varphi^I \cdot \nabla F = 0 & \text{on free surface} \\ \frac{\partial\varphi^I}{\partial n} = n_3 & \text{on } S_H \\ \varphi^I \rightarrow 0 & \text{as } (y^2 + z^2) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.93)$$

ただし，自由表面の形状は $F(y, z, t) = 0$ として与えられるものとする．以上の自由表面境界条件に対して時間に関して線形化を行い，水面衝突前の自由表面上で $\varphi^I = 0$ が成り立つとすると，以下のように単純化することができる⁹⁾．

$$\begin{cases} \Delta\varphi^I = 0 & \text{for } z \geq 0 \\ \varphi^I = 0 & \text{on } z = 0 \\ \frac{\partial\varphi^I}{\partial n} = n_3 & \text{on } S_H(x) \\ \varphi^I \rightarrow 0 & \text{as } y, z \rightarrow \pm\infty \end{cases} \quad (3.94)$$

以上の解は，物理的には自由表面を境にして水面下の物体を上部に写した物体が無限流体中を単位速度で z 方向に進むときの流場を意味するが，radiation 問題(3.51)において周波数無限大($k_e \rightarrow \infty$)としたときの境界条件とも一致することがわかる．このとき，既に3.5.2項で述べたように，Green 関数の代わりにランキンソースを用いるだけでよく，radiation 流場を求めるプログラムをそのまま流用することができる．以降は， φ^I を3.5.2項で定義した周波数無限大のときの radiation 単位速度ポテンシャル φ_3^∞ と同一視する．

衝撃圧力は式(3.37)に式(3.91)を代入することで，単位速度ポテンシャル φ_3^∞ を用いて

$$\begin{aligned} p^I &= -\rho \frac{D}{Dt} \left(\varphi_3^\infty \frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} \right) \\ &= -\rho \left(\frac{D\varphi_3^\infty}{Dt} \frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} + \varphi_3^\infty \frac{D^2 u_3^{\text{rel}}}{Dt^2} \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

と表せるが，最右辺の第2項は加速度に比例する項であり，radiation 流場の中に既に考慮されているものと考えられる．さらに，本プログラムでは簡便のために φ_3^∞ の x 方向導関数を無視することで，

$$p^I = -\rho \dot{\varphi}_3^\infty \frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} \quad (3.96)$$

を用いる．以上の圧力に対応した単位長さあたりの衝撃力 f_i^I ($i = 1 \sim 4$)は，式(3.63)で定義される周波数無限大のときの付加質量を用いて

$$f_i^I = -\dot{a}_{i3}^\infty \frac{Du_3^{\text{rel}}}{Dt} \quad (3.97)$$

として表される．式(3.97)の衝撃荷重は，物体を平板近似しない場合の Karman 型の衝撃力¹⁰⁾に相当する．また，式(3.96)及び式(3.97)は， Du_3^{rel}/Dt が正のときにみに作用するものとする．式(3.97)を式(3.18)に代入することで，一般化された衝撃力 $F_{i,i}^I$ を得る．

境界値問題(3.94)は定常問題であるが，物体表面が時々刻々変化することにより φ_3^∞ の値が変動し，その変化量によって圧力が決定される．本プログラムでは，流体力テーブルから内挿することで a_{i3}^∞ 及び φ_3^∞ の時間変化を扱い，時間に関する導関数は後退差分によって求めている．

本提案手法は，衝撃圧力を計算するにあたって，時間発展計算を必要としないため計算コストは低く，また radiation 流場の解析プログラムがそのまま使えるため，プログラムとしても簡潔になる．境界値問題(3.94)は物体表面条件に関しては近似を行わないため，横傾斜状態でのスラミングや左右非対称の物体をも扱える．しかしな

がら、水面の盛り上がりを考慮していないため、スラミング荷重としてはやや過小評価となると考えられる。なお、本プログラムでは無視している φ_3^∞ 及び α_{i3}^∞ の x 方向変化の影響、即ち衝撃力の3次元影響は、船速が大きくなるほど有意になる。この項は、長手方向の等付加質量曲線を定義することで考慮される¹¹⁾。

3.6 運動方程式の数値計算法

本プログラムでは、運動方程式を1階の非線形連立常微分方程式の初期値問題と見做し、ルンゲ・クッタ・ギル法に基づく数値積分によって解いている。数値積分される運動方程式は、式(3.13)から、流体力のうち radiation 流体力を流体力係数として左辺で考慮した次式を用いる。

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{22} & 0 & \mathbb{M}_{24} \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{33} & \mathbb{M}_{34} \\ 0 & \mathbb{M}_{42} & \mathbb{M}_{43} & \mathbb{M}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \mathbb{A}_{13} & \mathbb{A}_{14} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & \mathbb{A}_{23} & \mathbb{A}_{24} \\ \mathbb{A}_{31} & \mathbb{A}_{32} & \mathbb{A}_{33} & \mathbb{A}_{34} \\ \mathbb{A}_{41} & \mathbb{A}_{42} & \mathbb{A}_{43} & \mathbb{A}_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \\
 & + \left(\begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{D}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{D}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} & \mathbb{B}_{13} & \mathbb{B}_{14} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} & \mathbb{B}_{23} & \mathbb{B}_{24} \\ \mathbb{B}_{31} & \mathbb{B}_{32} & \mathbb{B}_{33} & \mathbb{B}_{34} \\ \mathbb{B}_{41} & \mathbb{B}_{42} & \mathbb{B}_{43} & \mathbb{B}_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{B}_{44}^{\text{nl}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 |\dot{x}_1| \\ \dot{x}_2 |\dot{x}_2| \\ \dot{x}_3 |\dot{x}_3| \\ \dot{x}_4 |\dot{x}_4| \end{pmatrix} \\
 & + \left(\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{K}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{K}_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \mathbb{C}_{13} & \mathbb{C}_{14} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \mathbb{C}_{23} & \mathbb{C}_{24} \\ \mathbb{C}_{31} & \mathbb{C}_{32} & \mathbb{C}_{33} & \mathbb{C}_{34} \\ \mathbb{C}_{41} & \mathbb{C}_{42} & \mathbb{C}_{43} & \mathbb{C}_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - F_1^{\text{R}} \\ F_2 - F_2^{\text{R}} \\ F_3 - F_3^{\text{R}} \\ F_4 - F_4^{\text{R}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

ここで、サブマトリックス \mathbb{A}_{ij} , \mathbb{B}_{ij} , \mathbb{C}_{ij} , $\mathbb{B}_{44}^{\text{nl}}$ の成分は、式(3.67)~(3.69)の radiation 流体力係数及び式(3.77)で定義される横揺れ減衰力係数によって

$$\mathbb{A}_{ij} = \{A_{ij,ij}\}, \mathbb{B}_{ij} = \{B_{ij,ij}\}, \mathbb{C}_{ij} = \{C_{ij,ij}\}, \mathbb{B}_{44}^{\text{nl}} = \{B_{44,ij}^{\text{nl}}\} \tag{3.99}$$

と表される。ただし、 $B_{44,ij}^{\text{nl}}$ の成分は、 $i = j = 0$ 以外は0とする。これらの radiation 流体力係数マトリクスは、船体が左右対称の場合は縦運動($i, j = 1, 3$)と横運動($i, j = 2, 4$)の連成項は0となるが、本プログラムでは横傾斜した状態の左右非対称断面も扱うため、一般には0とならない。また、 $(F_i - F_i^{\text{R}})$ は radiation 流体力を除いた外力サブベクトルで、

$$(F_i - F_i^{\text{R}}) = \{F_{i,i}^{\text{G}} + F_{i,i}^{\text{W}} + F_{i,i}^{\text{S}} + F_{i,i}^{\text{I}}\} \tag{3.100}$$

と表される。

以上の運動方程式(3.98)をより簡単に

$$([M] + [A])\{\dot{x}\} + ([D] + [B])\{\dot{x}\} + [B^{\text{nl}}]\{\dot{x}|\dot{x}\} + ([K] + [C])\{x\} = \{f\} \tag{3.101}$$

と表記する。 $\{x\}$ がN元のベクトルだとすると、次のような2N元の1階の非線形連立常微分方程式に置き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \\ \dot{x}_{N+1} \\ \dot{x}_{N+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_{2N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{N+1} \\ x_{N+2} \\ \vdots \\ x_{2N} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

ただし、

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix} = -([M] + [A])^{-1} \left(([D] + [B])\{\dot{x}\} + [B^{nl}]\{\dot{x}|\dot{x}\} + ([K] + [C])\{x\} - \{f\} \right) \quad (3.103)$$

である．式(3.102)をルンゲ・クッタ・ギル法によって数値積分する事で，次の時間ステップにおける変位及び速度を求める事が出来る．ルンゲ・クッタ・ギル法の解法は文献¹²⁾に譲る．計算開始時は初期変位を0とし，入射波は緩起動で徐々に設定した波振幅まで増加させていく．これにより計算開始直後のオーバーシュートを防止している．

運動方程式の右辺にある radiation 流体力を除く外力は，1ステップ前の船体の運動変位によって計算される，所謂弱連成項である．一方で radiation 流体力は，係数マトリクスとして考慮されているため，同ステップの運動変位，速度及び加速度が反映される強連成項として考慮されていることになる．本プログラムでは弱連成項に対して収束計算を行わないため，時間ステップの刻み Δt を十分細かく取っており， $\Delta t = 0.01\sqrt{L[m]}/300[s]$ 程度としている．

3.7 断面力

船体梁に作用する単位長さあたりの外力及び慣性力を積分することで，船体梁に作用するせん断力や曲げ・振りモーメント等の断面力を求めることができる．今，断面力を $\mathcal{F}_i(x, t)$ ($i = 1 \sim 6$)と表し，それぞれ図 3.5 で定義される軸力，水平せん断力，縦せん断力，せん断中心周りの振りモーメント，縦曲げモーメント，水平曲げモーメントであるとすると， $x = x_0$ 位置におけるこれらの値はそれぞれ次のように与えられる．

$$\mathcal{F}_i(x_0, t) = \begin{cases} -\int_{x_a}^{x_0} (f_i + f_i^{\text{in}}) dx & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \int_{x_a}^{x_0} (x - x_0)(f_3 + f_3^{\text{in}}) dx & (i = 5) \\ -\int_{x_a}^{x_0} (x - x_0)(f_2 + f_2^{\text{in}}) dx & (i = 6) \end{cases} \quad (3.104)$$

ただし， $f_i^{\text{in}}(x, t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)は単位長さあたりの慣性力で，次のように与えられる．

$$f_i^{\text{in}} = \begin{cases} -m\ddot{u}_1 & (i = 1) \\ -m\ddot{u}_2 + (z_g - z_s)m\ddot{u}_4 & (i = 2) \\ -m\ddot{u}_3 - (y_g - y_s)m\ddot{u}_4 & (i = 3) \\ -J_{xx}^s \ddot{u}_4 - (y_g - y_s)m\ddot{u}_3 + (z_g - z_s)m\ddot{u}_2 & (i = 4) \end{cases} \quad (3.105)$$

ここで，式(3.105)に式(3.12)を代入し，式(3.19)で定義される一般化された重量分布 $m_{ij,ij}$ を用いることで

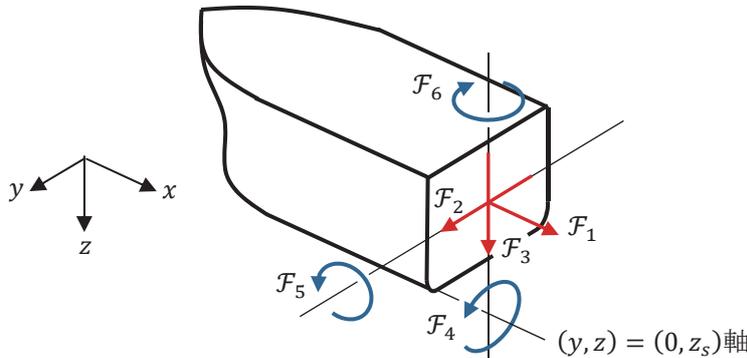


図 3.5 断面力の定義

$$f_i^{\text{in}} = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_i} m_{i,j,0j} \xi_{j,j}^{\ddot{}} \quad (3.106)$$

のように統一的に表記することができる。ただし、式(3.22)のモード関数を前提としている。ところで、式(3.105)に支配方程式(3.5)~(3.8)を適用すると、次式が導かれる。

$$f_i + f_i^{\text{in}} = \begin{cases} -\{EA_s(u_1' + \eta \dot{u}_1')\}' & (i = 1) \\ \{EI_{yy}(u_2'' + \eta \dot{u}_2'')\}'' & (i = 2) \\ \{EI_{zz}(u_3'' + \eta \dot{u}_3'')\}'' & (i = 3) \\ \{EI_{\omega\omega}^s(u_4'' + \eta \dot{u}_4'')\}'' - \{GK_s(u_4' + \eta \dot{u}_4')\}' & (i = 4) \end{cases} \quad (3.107)$$

これを式(3.104)に代入することで、次の表示が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_1(x_0, t) = \sum_{j=0}^{N_1} (\xi_{1,j} + \eta \dot{\xi}_{1,j}) (EA_s u_{1,j}') \Big|_{x=x_0} \\ \mathcal{F}_2(x_0, t) = - \sum_{j=0}^{N_2} (\xi_{2,j} + \eta \dot{\xi}_{2,j}) (EI_{yy} u_{2,j}'') \Big|_{x=x_0} \\ \mathcal{F}_3(x_0, t) = - \sum_{j=0}^{N_3} (\xi_{3,j} + \eta \dot{\xi}_{3,j}) (EI_{zz} u_{3,j}'') \Big|_{x=x_0} \\ \mathcal{F}_4(x_0, t) = - \sum_{j=0}^{N_4} (\xi_{4,j} + \eta \dot{\xi}_{4,j}) \{ (EI_{\omega\omega}^s u_{4,j}'')' - GK_s u_{4,j}' \} \Big|_{x=x_0} \\ \mathcal{F}_5(x_0, t) = - \sum_{j=0}^{N_3} (\xi_{3,j} + \eta \dot{\xi}_{3,j}) (EI_{zz} u_{3,j}'') \Big|_{x=x_0} \\ \mathcal{F}_6(x_0, t) = \sum_{j=0}^{N_2} (\xi_{2,j} + \eta \dot{\xi}_{2,j}) (EI_{yy} u_{2,j}'') \Big|_{x=x_0} \end{array} \right. \quad (3.108)$$

式(3.108)は各断面力の定義そのものであり、これらによって運動変位から断面力を直接計算することもできる。この場合、計算が簡便で、かつ必ず船首尾端で0になる(境界条件を満たす)という特長があるが、とりうる分布形状が仮定するモード関数 $u_{j,j}$ に依存し、また flexible mode を扱わない場合は x に関する導関数が0となり、値を求めることができない。このため、本プログラムでは式(3.104)に式(3.106)を代入し、外力と慣性力を積分することで断面力を求めている。

式(3.104)において、被積分関数の単位長さあたりの外力 f_i のうち、単位長さあたりの radiation 流体力及び scattering 流体力の前進速度影響項に x に関する導関数が存在する。断面力が船首尾端で0となるためには、運動方程式で用いている外力と扱いを一貫させる必要があるため、流体力の定式化と同様に、部分積分を施すことで x に関する導関数の演算を回避する。導出過程は Appendix D に記すが、最終的に以下のように定式化される。

$$\mathcal{F}_i(x_0, t) = \begin{cases} - \int_{x_a}^{x_0} f_i^{\text{all}} dx + U f_i^{\text{U}}(x_0) & (i = 1, 2, 3, 4) \\ \int_{x_a}^{x_0} \{ (x - x_0) f_3^{\text{all}} + U f_3^{\text{U}} \} dx & (i = 5) \\ - \int_{x_a}^x \{ (x - x_0) f_2^{\text{all}} + U f_2^{\text{U}} \} dx & (i = 6) \end{cases} \quad (3.109)$$

ただし、 $f_i^{\text{all}}(x)$ 及び $f_i^{\text{U}}(x)$ は以下のように定義される。

$$f_i^{\text{all}} = f_i^{\text{G}} + f_i^{\text{W}} + (s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w) + f_i^{\text{I}} - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \{ (m_{ij,0j} + a_{ij,0j}) \ddot{\xi}_{j,j} + b_{ij,0j} \dot{\xi}_{j,j} + c_{ij,0j} \xi_{j,j} \} \quad (3.110)$$

$$f_i^{\text{U}} = (s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w) - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ \left(a_{ij,0j} - \frac{1}{\omega_e^2} c_{ij,0j} \right) \ddot{\xi}_{j,j} + b_{ij,0j} \dot{\xi}_{j,j} \right\} \quad (3.111)$$

なお、以上で定義した波浪荷重は前進座標系 $o - xyz$ で定義されているが、船体固定座標系 $\bar{o} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ における波浪荷重 $\bar{F}_i(x, t)$ を求める場合は、単位長さあたりの外力及び慣性力を

$$\begin{cases} (f_2 + f_2^{\text{in}}) \rightarrow (f_2 + f_2^{\text{in}}) \cos \xi_{4,0} + (f_3 + f_3^{\text{in}}) \sin \xi_{4,0} \\ (f_3 + f_3^{\text{in}}) \rightarrow (f_3 + f_3^{\text{in}}) \cos \xi_{4,0} - (f_2 + f_2^{\text{in}}) \sin \xi_{4,0} \end{cases} \quad (3.112)$$

と変換し、式(3.104)に代入することで

$$\begin{cases} \bar{F}_1 = F_1 \\ \bar{F}_2 = F_2 \cos \xi_{4,0} + F_3 \sin \xi_{4,0} \\ \bar{F}_3 = F_3 \cos \xi_{4,0} - F_2 \sin \xi_{4,0} \\ \bar{F}_4 = F_4 \\ \bar{F}_5 = F_5 \cos \xi_{4,0} + F_6 \sin \xi_{4,0} \\ \bar{F}_6 = F_6 \cos \xi_{4,0} - F_5 \sin \xi_{4,0} \end{cases} \quad (3.113)$$

の対応が得られ、 F_i の変換によって求められることが分かる。

3.8 水圧

構造解析の観点からは、船体表面に生じる水圧及び運動加速度による慣性力は、力学的境界条件として構造応答に直接的に関与するため、その重要性は高い。水圧成分のうち、波圧、衝撃圧の計算については式(3.46)及び式(3.96)の表示式をそのまま用いればよい。ところが、ストリップ法では、radiation/scattering 流場による圧力の式(C.10)、(3.81)に見られる、前進速度影響項の中に存在する速度ポテンシャルの x 方向に関する導関数を解析的に扱う事は出来ない。一方で、運動方程式で用いる radiation/scattering 流体力に関しては、当該項は部分積分によって正しく考慮される。この水圧と流体力の前進速度影響項の扱いの相違は、水圧と運動加速度の不整合に直結するため、構造解析における解の信頼性に係る重要な事柄である。なお、速度ポテンシャルの x 方向に関する導関数を例えば差分法等によって適切に計算する事が出来れば、以上の問題は生じない。この意味では3次元手法であるグリーン関数法やランキンパネル法でも同様で、水圧の場に関する導関数は、流体力においてはタックの定理によって適切に考慮されるが、水圧の値を求めたい場合、やはり数値的に導関数を計算する必要がある¹³⁾。

本節では、radiation/scattering 流場による圧力の定式化に加え、その積分値と運動方程式で用いられる流体力との差異について論じる。さらに、radiation/scattering 流場によって入射波面が変動することによる水圧の補正法についても述べる。

3.8.1 radiation 流場による圧力

radiation 流場による圧力は、式(C.9)を式(C.10)に代入することで、次の周波数領域の表示が得られる。

$$\begin{aligned}
 \hat{p}^R &= -\rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \left(1 - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j}\right) \hat{\varphi}_j^R \\
 &= \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \left[\left\{ (i\omega_e)^2 u_{j,j} - (i\omega_e) 2U u'_{j,j} + U^2 u''_{j,j} \right\} (-\rho \Re[\hat{\varphi}_j^R]) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ (i\omega_e) \left(u_{j,j} - \frac{U^2}{\omega_e^2} u''_{j,j} \right) - 2U u'_{j,j} \right\} (\rho \omega_e \Im[\hat{\varphi}_j^R]) \right]
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

ただし、 $\hat{\varphi}_j^R$ の x 方向の変化は無視している。時系列表示では、以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
 p^R &= \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left[\left\{ u_{j,j} \ddot{\xi}_{j,j} - 2U u'_{j,j} \dot{\xi}_{j,j} + U^2 u''_{j,j} \xi_{j,j} \right\} (-\rho \Re[\hat{\varphi}_j^R]) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left(u_{j,j} - \frac{U^2}{\omega_e^2} u''_{j,j} \right) \dot{\xi}_{j,j} - 2U u'_{j,j} \xi_{j,j} \right\} (\rho \omega_e \Im[\hat{\varphi}_j^R]) \right]
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

本プログラムでは、式(3.115)によって2次元 radiation 単位速度ポテンシャルから radiation 流場による圧力を計算している。ただし、flexible mode に起因する項に関しては、 $\hat{\varphi}_j^R \rightarrow \varphi_j^\infty$ と周波数無限大の速度ポテンシャルに置き換えている。

式(3.115)は、運動変位による x 方向変化は考慮しているが、2次元 radiation 速度ポテンシャル $\hat{\varphi}_j^R$ の x 方向変化は無視している。このため、断面形状の x 方向変化の大きい船首尾付近では精度が低下すると考えられる。ここで、式(3.115)の圧力を積分することで得られる一般化された radiation 流体力は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{i,i}^R(x) &= - \int_L u_{i,i} \int_{S_H(x)} p^R n_i dl dx \\
 &= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} (\tilde{A}_{i,j,i,j} \ddot{\xi}_{j,j} + \tilde{B}_{i,j,i,j} \dot{\xi}_{j,j} + \tilde{C}_{i,j,i,j} \xi_{j,j})
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

ここで、

$$\tilde{A}_{i,j,i,j} = \int_L u_{i,i} u_{j,j} a_{i,j} dx \tag{3.117}$$

$$\tilde{B}_{i,j,i,j} = \int_L \left\{ \left(u_{i,i} u_{j,j} - \frac{U^2}{\omega_e^2} u_{i,i} u''_{j,j} \right) b_{i,j} - 2U u_{i,i} u'_{j,j} a_{i,j} \right\} dx \tag{3.118}$$

$$\tilde{C}_{i,j,i,j} = \int_L (U^2 u_{i,i} u''_{j,j} a_{i,j} - 2U u_{i,i} u'_{j,j} b_{i,j}) dx \tag{3.119}$$

と置いている。以上の流体力係数と、運動方程式に用いられる流体力係数の式(3.66)~(3.72)と差をとると、

$$\tilde{A}_{i,j,i,j} - A_{i,j,i,j} = 0 \tag{3.120}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{i,j,i,j} - B_{i,j,i,j} &= \int_L \left\{ -\frac{U^2}{\omega_e^2} (u_{i,i} u''_{j,j} + u'_{i,i} u'_{j,j}) b_{i,j} - U (u_{i,i} u'_{j,j} + u'_{i,i} u_{j,j}) a_{i,j} \right\} dx \\
 &= U \int_L u_{i,i} u_{j,j} a'_{i,j} dx
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ij,ij} - C_{ij,ij} &= \int_L \{U^2(u_{i,i}u_{j,j}'' + u_{i,i}'u_{j,j}')a_{ij} - U(u_{i,i}u_{j,j}' + u_{i,i}'u_{j,j})b_{ij}\}dx \\ &= U \int_L u_{i,i}u_{j,j}b_{ij}'dx\end{aligned}\quad (3.122)$$

となる。但し、式(3.121)及び式(3.122)の2つ目の等号では部分積分を適用し、船首尾端の項を無視している。以上の結果から、radiation 流場による水圧の積分値と運動方程式に用いられる radiation 流体力の間に生じる差異について、以下の事が言える。

- 2次元流体力係数 a_{ij}, b_{ij} の x 方向の変化によって差異が生じる。換言すれば、断面形状が一様な船舶の場合、差異は生じない。
- 差異は前進速度に比例する。
- 前後対称船の場合、 a_{ij}, b_{ij} は x に関して奇関数となるため、 $u_{i,i}u_{j,j}$ が偶関数となる対角項に差異は生じないが、 $u_{i,i}u_{j,j}$ が奇関数となる、例えば heave と pitch あるいは sway と yaw の連成項において特に大きな差異が生じる。
- 一般的な船舶に対しても、 $u_{i,i} = u_{j,j} = 1$ を代入すると分かるように、surge, sway, heave 及び roll に係る対角項に差異は生じない。

3.8.2 scattering 流場による圧力

scattering 流場による圧力は周波数領域表示では

$$\hat{p}^S = \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \left(1 - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial}{\partial x}\right) \hat{\phi}^S \quad (3.81)\text{再}$$

である。一般的なストリップ法では $\hat{\phi}^S$ の x 方向の変化は無視することが多いが、本プログラムでは、scattering 速度ポテンシャルの x に対する依存性は入射波の速度ポテンシャルと等しいと考える。即ち、式(3.57)より

$$\frac{\partial \hat{\phi}^W}{\partial x} = -ik \cos \chi \hat{\phi}^W \quad (3.123)$$

であるのと同様に

$$\frac{\partial \hat{\phi}^S}{\partial x} = -ik \cos \chi \hat{\phi}^S \quad (3.124)$$

と考え、式(3.81)に代入することで scattering 流場による圧力

$$\hat{p}^S = \rho g \zeta_a \hat{\phi}^S \quad (3.125)$$

を得る。式(3.125)は、時間領域では、scattering 流体力係数の時間領域表示(3.87)と同様の形で

$$p^S = \rho g \left(-\Re \left[\frac{\hat{\phi}^S}{\omega \omega_e} e^{kz_r + ikx \cos \chi} \right] a_w + \Im \left[\frac{\hat{\phi}^S}{\omega} e^{kz_r + ikx \cos \chi} \right] v_w \right) \quad (3.126)$$

として考慮すればよい。

式(3.124)の仮定は、式(3.58)に示されているように $\hat{\phi}^S$ の船体表面境界条件が $\hat{\phi}^W$ に対応していることに由来する。この仮定は、積分領域 $S_H(x)$ の x 方向の変化が無い箇所、即ち平行部付近においては、正しい結果が得られる。式(3.125)を積分することにより得られる一般化された scattering 流体力は、次のように表される。

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{i,i}^S &= - \int_L u_{i,i} \int_{S_H(x)} \hat{p}^S n_i dl dx \\ &= \int_L \left\{ u_{i,i} + \frac{Uk \cos \chi}{\omega_e} u_{i,i} \right\} \zeta_a \hat{s}_i dx\end{aligned}\quad (3.127)$$

運動方程式で用いられる scattering 流体力(3.83)と差をとると,

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{i,i}^S - \hat{F}_{i,i}^S &= \frac{U}{\omega_e} \int_L \{ k \cos \chi u_{i,i} + i u'_{i,i} \} \zeta_a \hat{s}_i dx \\ &= \frac{\zeta_a U}{\omega_e} \int_L u_{i,i} (k \cos \chi \hat{s}_i - i \hat{s}'_i) dx\end{aligned}\quad (3.128)$$

となる. 但し, 2つ目の等号では部分積分を適用し, 船首尾端の項を無視している. ここで, 式(3.124)の仮定と同様に, $\hat{s}'_i = -i k \cos \chi \hat{s}_i$ が成り立つ場合, 即ち断面形状が一様な船舶の場合は式(3.118)の右边が 0 となることが分かる. 以上の結果から, scattering 流場による水圧の積分値と運動方程式に用いられる scattering 流体力の間に生じる差異について, 以下の事が言える.

- ・ 断面形状が一様な船舶の場合, 差異は生じない.
- ・ 差異は前進速度に比例する.

一般的なストリップ法における scattering 流場による水圧の計算では, 前進速度影響項を考慮しないため, その場合の式(3.128)は

$$\tilde{F}_{i,i}^S - \hat{F}_{i,i}^S = \frac{\zeta_a U}{i \omega_e} \int_L u_{i,i} \hat{s}'_i dx \quad (3.129)$$

と表される. この場合, 断面形状が一様であっても右边は 0 とならない. このことから, 式(3.125)及び式(3.126)に示す提案式は, 部分的ではあるが前進速度影響を正しく考慮できていると言えよう.

3.8.3 波面の変動による水圧の修正

物理的には, 水圧は波面で 0, 即ち大気圧と一致するべきである. 各流場成分は, 波面で圧力が 0 になるように境界条件を設けた上で求められるが, 逆に圧力場が先に与えられたときは, 値が 0 になる高さが波面の定義となる. 即ち, Bernoulli の圧力方程式(3.30)より

$$0 = -\rho \left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_{z=0} + \rho g \zeta \quad (3.130)$$

を満たす $\zeta(x, y, t)$ が波変位として定義される. 式(3.40)で示した入射波の波変位 ζ_w は, 式(3.40)の入射波の速度ポテンシャル ϕ^W を式(3.130)の ϕ に代入することで, 入射波の流場成分のみに対応した波変位であることが確かめられる. 即ち, 入射波の波変位 ζ_w は船体が存在しない時の波面であり, 実際の波面は入射波を船体が乱すことで発生する radiation/scattering 流場を考慮することで初めて得られる.

さて, 波面が盛り上がると, 静水面より上 ($z < 0$) においても船体表面上に圧力が作用することになる. ところが, 各流場成分は線形化の過程において, 流体領域は $z \geq 0$ として近似されるため, 速度ポテンシャルは $z \geq 0$ の領域でしか定義されていない. このため, 静水面より上の圧力は, 静水面 ($z = 0$) 上のポテンシャルをそのまま用いることで求める. 即ち,

$$p = -\rho \left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_{z=0} + \rho g z \quad \text{for } z < 0 \quad (3.131)$$

と計算する. ここで, 右边第 1 項は式(3.30)より $z = 0$ における圧力値を意味する. 一方で, 波面より上における圧力は当然 0 であるから, これを式で表すと

$$p = 0 \quad \text{for} \quad z < \zeta \quad (3.132)$$

となるが、Bernoulli の圧力方程式(3.30)によると、圧力は形式上波面より上で必ず負となるため、プログラム上は「圧力が負値をとった場合、圧力を 0 とする」といった処理を行う方が簡単である。以上をまとめると、水圧に対して

$$p = \begin{cases} p|_{z=0} + \rho g z & \text{for } z < 0 \\ 0 & \text{when } p < 0 \end{cases} \quad (3.133)$$

といった修正を施せば、波面の変動の影響を水圧に考慮したことになる。この修正の模式図を図 3.6 に示す。式(3.133)の上の式は、 $z = 0$ における圧力から 45 度の角度で上に外挿する操作にあたる。

本プログラムでは圧力計算に関して、衝撃圧成分を除いたすべての流場成分に対して以上の処置を行っている。しかしながら、運動方程式に用いられる流体力においては、波力に関しては波圧 p^W の計算式(3.46)から判るように入射波変位が正確に考慮されるが、radiation/scattering 流体力に関しては流体力係数として考慮されているため、radiation/scattering 流場成分による波面の変動の影響は考慮されない。このため、radiation/scattering 流場成分による波面の変動に応じて、流体力と圧力の積分值の間に差異が生じる。しかしながら、波面の変動は入射波流場成分による影響が支配的であり、radiation/scattering 流場による波面の変動は相対的に小さいと考えられる。

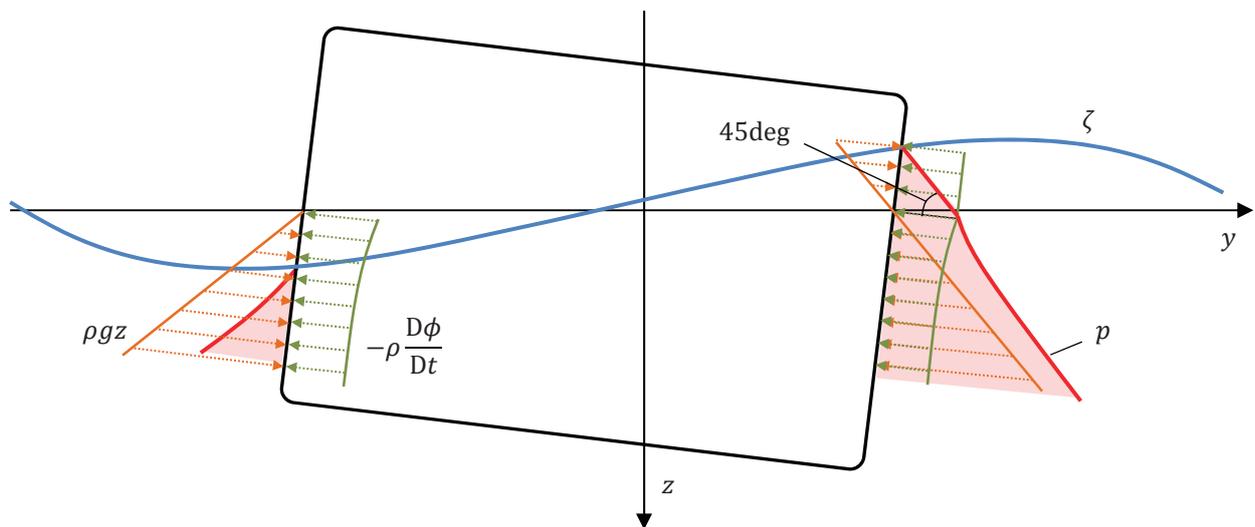


図 3.6 水圧の線形外挿

4. 結言

本報告では、新たに開発した非線形波浪荷重解析プログラム NMRIW-II の構成及びその理論的背景について詳述した。本プログラムの開発にあたって、非線形ストリップ法を支配方程式から再検討し、プログラムに直接組み込める形までの式展開を行った。船体運動及び流体力のみならず、構造解析にとって特に重要となる断面力及び水圧についても詳細に定式化を行い、構造解析の観点から水圧と流体力との非一貫性についても論じた。種々の応答計算において、新たに定式化した箇所及び提案した手法は以下の通りである。

- 梁の工学的理論による船体梁の応答計算とストリップ法による流体力の考えを結びつけ、剛体変位に加え軸方向変位、縦曲げ、水平曲げ、振りの **flexible mode** を包含した一般化された運動変位を用いて、一般化された運動方程式の定式化を行った。
- 衝撃圧力を **radiation** 速度ポテンシャルテーブルを用いて計算する手法を提案した。本手法は、任意の形状の2次元断面を扱う事ができ、圧力の積分値と衝撃力が一貫するという特長を持つ。また、時間積分計算を必要としないため、時間領域の衝撃圧力を計算する手法としては計算コストが低く済む。さらには、**radiation** 速度ポテンシャルテーブルを流用するだけでよいため、プログラム化にあたっても簡便な手法である。ただし、得られる衝撃力は **Karman** 理論相当であるため、水圧の盛り上がりを考慮しておらず、やや過小な評価を与える可能性があると考えられる。
- **radiation/scattering** 流体力の計算に関して、周波数領域の考えを時間領域に拡張し、2次元流体力テーブルを用いて波高の非線形性を簡易的に考慮する手法を提示した。また、**radiation/scattering** 流体力係数を、一般化された運動変位に対応した形式で示した。
- 船体梁に生じる断面力及び船体表面に作用する水圧の計算式を、各流体力の計算と矛盾しない形式で示した。水圧に関しては、構造解析で問題となる、圧力の積分値と流体力の間が生じる差異の要因を明示した。
- **scattering** 流場による圧力計算において、**scattering** 速度ポテンシャルの前進速度影響を簡易的に考慮する手法を提案した。本手法は、断面形状の変化のない平行部においては正しい結果を与える。

本プログラムは、微小応答を前提とした線形理論を基に、大波高中の非線形現象を扱えるように拡張させているため、微小変位と有限変位を組み合わせた理論となっている。例えば、船体梁の支配方程式の導出に関しては微小変位理論に基づいているが、**Froude-Krylov** 力並びに浮力の計算においては、船体と波面の相対位置を計算するときに船体の大変位影響を考慮している。また、線形理論に基づく **radiation/scattering** 流体力係数テーブルを用いて簡易的に **radiation/scattering** 流体力の非線形性を扱っている。理論上の一貫性は欠くものの、実用的な船体構造設計ツールという立場から、構造解析にとって重要となる波浪荷重に対して支配的な要素は厳密に計算し、そうでない要素に対しては簡易手法を採用することで計算コストを低減させるという考えに基づいている。そのため、本プログラムでは、時間領域の波浪中解析プログラムとしては非常に計算時間が短く、一回の規則波中計算を数秒～数十秒程度で実行することができる。また、本プログラムは、構造設計のための荷重解析に対してだけでなく、その計算速度を活かし、降伏、座屈あるいは最終強度評価において支配的となる最悪海象の選定や、船殻形状や積み付け条件などの波浪荷重に対する影響調査の実施にも活用することができる。

謝 辞

本報告を執筆するにあたり、丁寧かつ熱心なご助言を戴いた海上技術安全研究所フェローの深沢塔一博士に、深謝いたします。また、本プログラムの作成当初より、流体及び運動に関して非常に丁寧にご指導いただきました大松重雄博士に心より感謝申し上げます。最後に、本プログラムの実用性の検証へのご協力、また、日ごろより研究を陰で支えていただきました大橋みどりさん、千須和佳代さん、原田泰子さんに、謝意を表します。

参考文献

- 1) 松井貞興, 村上睦尚, 岡正義: 実験との比較による非線形波浪荷重解析プログラム NMRIW-II の適用性の検証—規則波中船体応答—, 海上技術安全研究所報告第 17 巻第 3 号 (2018)
- 2) 藤谷義信: コンピュータによる極限解析法シリーズ 薄肉はり構造解析, 培風館 (1990)
- 3) 田才福造, 高木又男: 規則波中の応答理論および計算法, 日本造船学会, 耐航性に関するシンポジウム (1969), pp. 1~52
- 4) Nils Salvesen, E. O. Tuck, Odd Faltinsen: Ship Motions and Sea Loads, The society of naval architects and marine engineers 74 Trinity (1971)
- 5) 実践 浮体の流体力学 前編・動揺問題の数値計算法, (社) 日本造船学会 海洋工学委員会性能部会編, 成山堂書店 (2003)
- 6) 原口富博, 大松重雄: 水面と直交しない浮体の動揺問題の解法と Irregular Frequency の簡易な除去法, 西部造船会会報第 66 号 (1983)
- 7) 渡辺巖: 斜め波中を航走する船体に働く Diffraction Pressure の実用的計算法, 関西造船協会誌第 221 号 (1994), pp. 83~89
- 8) T. Mikami, M. Kashiwagi: Time-domain strip method with memory-effect function considering the body nonlinearity of ships in large waves (second report), Journal of Marine Science and Technology, vol. 14 (2009), pp. 185-199
- 9) 平野陽一: 着水衝撃について, 日本航空宇宙学会誌第 19 巻第 214 号 (1971), pp. 520~530
- 10) Von Karman: The Impact on Seaplane Floats During Landing, Technical notes - National Advisory Committee for Aeronautics, No. 321 (1929)
- 11) 竹本博安: スラミングを考慮した高速船の波浪中船体応答計算法について, 日本造船学会論文集第 188 号 (2000), pp. 143~154
- 12) 大野豊, 磯田和男: 新版数値計算ハンドブック, オーム社 (1990)
- 13) 伊藤章雄, 岩下英嗣, 岡田哲男: 斜波中を航走する肥大船に働く波力について(第 4 報), 日本造船学会論文集第 178 号 (1995), pp. 161~168
- 14) 深沢塔一: スラミングを考慮した波浪中船舶の動的応答—強度計算・荒天航行法への応用—, 東京大学大学院工学系研究科船舶工学専門課程博士論文 (1980)

Appendix A 支配方程式の導出

梁の工学的理論に基づいて、船体梁の変位に関する支配方程式を導出する。本章は深沢¹⁴⁾による定式化を参考にしているが、深沢による定式化では積荷を含めない船体梁について考え、積荷の影響は外力として慣性力に含めている一方で、本書では積荷も含めて船体として扱い、運動エネルギーに包含させている。

弾性体に生じる歪成分は、変位場を用いて以下のように表される。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

以上に式(3.3)を代入すると、以下の歪成分が得られる。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u' - (y - y_c)v'' - (z - z_c)w'' + (\omega_n - (y - y_c)z_s + (z - z_c)y_s)\theta'' \\ \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} - z\right)\theta' \\ \gamma_{zx} = \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial z} + y\right)\theta' \\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

ここで、 ω_n は断面に固有の正規化されたそり関数を意味し、その導出は文献²⁾に詳しい。一方で、応力成分は以下のように計算する。

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

ここで、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数である。即ち、梁の工学的理論では、変位関数に対して断面保持の仮定、応力 - 歪関係に対して断面内無応力の仮定をおいている。

さて、これらを用いて船体梁にたくわえられる歪エネルギー \mathcal{U} 及び運動エネルギー \mathcal{K} は次のように表すことができる。

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \iiint_{V^s} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (\text{A.4})$$

ここで、積分領域 V^s は構造的有効領域を指す。式(A.2)及び式(A.3)を式(A.4)に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \frac{1}{2} \iiint_{V^s} \left[E \{ u' - (y - y_c)v'' - (z - z_c)w'' + (\omega_n - (y - y_c)z_s + (z - z_c)y_s)\theta'' \}^2 \right. \\ \left. + G \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} - z \right)^2 \theta'^2 + G \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial z} + y \right)^2 \theta'^2 \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iiint_{V^s} \left[E \left\{ u'^2 - (y - y_c)^2 v''^2 - (z - z_c)^2 w''^2 \right. \right. \\
&\quad + \left(\omega_n^2 + (y - y_c)^2 z_s^2 + (z - z_c)^2 y_s^2 - 2(y - y_c)\omega_n z_s + 2(z - z_c)\omega_n y_s \right. \\
&\quad - 2\underline{(y - y_c)(z - z_c)z_s y_s} \theta''^2 - 2\underline{(y - y_c)u'v''} - 2\underline{(z - z_c)u'w''} \\
&\quad + 2(\underline{\omega_n - (y - y_c)z_s + (z - z_c)y_s}) u'\theta'' + 2\underline{(y - y_c)(z - z_c)v''w''} \\
&\quad - 2(y - y_c)(\omega_n - (y - y_c)z_s + \underline{(z - z_c)y_s}) v''\theta'' \\
&\quad \left. \left. - 2(z - z_c)(\omega_n - \underline{(y - y_c)z_s + (z - z_c)y_s}) w''\theta'' \right\} \right. \\
&\quad \left. + G \left\{ \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial z} + y \right)^2 \right\} \theta'^2 \right] dx dy dz
\end{aligned}$$

となる．ここで，図心位置 (y_c, z_c) 及び正規化されたそり関数 ω_n の定義上，また y, z 軸が断面主軸方向に一致するとの仮定により

$$\left\{ \begin{aligned}
&\iint_{A^s} \omega_n dy dz = 0 \\
&\iint_{A^s} (y - y_c) dy dz = 0 \\
&\iint_{A^s} (z - z_c) dy dz = 0 \\
&\iint_{A^s} (y - y_c)(z - z_c) dy dz = 0
\end{aligned} \right. \quad (\text{A.6})$$

が成り立つため，式(A.5)の下線の項は0となる．ただし，積分領域 A^s は $x = x$ 位置の断面における構造的有効領域を指す．また，剛性に関する諸断面定数として以下を定義する．

$$\left\{ \begin{aligned}
A_s &= \iint_{A^s} dy dz \\
I_{yy} &= \iint_{A^s} (y - y_c)^2 dy dz \\
I_{zz} &= \iint_{A^s} (z - z_c)^2 dy dz \\
I_{\omega y} &= \iint_{A^s} \omega_n (y - y_c) dy dz \\
I_{\omega z} &= \iint_{A^s} \omega_n (z - z_c) dy dz \\
I_{\omega \omega} &= \iint_{A^s} \omega_n^2 dy dz \\
I_{\omega \omega}^s &= I_{\omega \omega} - z_s^2 I_{yy} - y_s^2 I_{zz} \\
K_s &= \iint_{A^s} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dy dz
\end{aligned} \right. \quad (\text{A.7})$$

このとき，ひずみエネルギーは以下のように書ける．

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \int_L \left[E \{ A_s u'^2 + I_{yy} v''^2 + I_{zz} w''^2 + (I_{\omega\omega}^s + 2z_s^2 I_{yy} + 2y_s^2 I_{zz} - 2z_s I_{\omega y} + 2y_s I_{\omega z}) \theta''^2 - 2(I_{\omega y} - z_s I_{yy}) v'' \theta'' - 2(I_{\omega z} + y_s I_{zz}) w'' \theta'' \} + GK_s \theta'^2 \right] dx \quad (\text{A.8})$$

ここで、せん断中心の定義式

$$y_s = -\frac{I_{\omega z}}{I_{zz}}, \quad z_s = \frac{I_{\omega y}}{I_{yy}} \quad (\text{A.9})$$

を考慮すると、最終的に以下のひずみエネルギーの表示式を得る.

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2} \int_L (EA_s u'^2 + EI_{yy} v''^2 + EI_{zz} w''^2 + EI_{\omega\omega}^s \theta''^2 + GK_s \theta'^2) dx \quad (\text{A.10})$$

一方で、運動エネルギーは

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \iiint_{V^m} \rho_m (\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) dx dy dz \quad (\text{A.11})$$

と表現できる. ただし, $\rho_m(x, y, z)$ は船体及び積荷の密度分布, 積分領域 V^m は積荷を含めた質量を有する領域を指す. 式(3.3)を式(A.11)に代入すると,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \iiint_{V^m} \rho_m \left[\dot{u}^2 + \{ \dot{v} - (z - z_s) \dot{\theta} \}^2 + \{ \dot{w} + (y - y_s) \dot{\theta} \}^2 \right] dx dy dz \quad (\text{A.12})$$

を得る. ただし, 船体を細長体と見て, v', w', θ' による x 方向運動の寄与は小さいと考え, 無視している. 今, 質量に関する諸断面定数として以下を定義する.

$$\left\{ \begin{aligned} m &= \iint_{A^m} \rho_m dy dz \\ J_{xx}^s &= \iint_{A^m} \rho_m \{ (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \} dy dz \end{aligned} \right. \quad (\text{A.13})$$

ただし, 積分領域 A^m は $x = x$ 位置の断面における質量をもつ領域を指す. このとき, 運動エネルギーは以下のようになる.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_L \left\{ m \dot{u}^2 + m \dot{v}^2 + m \dot{w}^2 + J_{xx}^s \dot{\theta}^2 - 2 \left(\iint_{A^m} \rho_m (y - y_s) dy dz \right) \dot{v} \dot{\theta} + 2 \left(\iint_{A^m} \rho_m (z - z_s) dy dz \right) \dot{w} \dot{\theta} \right\} dx \quad (\text{A.14})$$

ここで, $x = x$ 位置の断面における重心 y, z 座標位置($y_g(x), z_g(x)$)の定義式

$$\begin{aligned} y_g &= \left(\iint_{A^m} \rho_m y dy dz \right) / m \\ z_g &= \left(\iint_{A^m} \rho_m z dy dz \right) / m \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

より, 最終的に以下の運動エネルギーの表示式を得る.

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \int_L [m\dot{u}^2 + m\dot{v}^2 + m\dot{w}^2 + J_{xx}^s \dot{\theta}^2 - 2(z_g - z_s)m\dot{v}\dot{\theta} + 2(y_g - y_s)m\dot{w}\dot{\theta}] dx \quad (\text{A.16})$$

次に、減衰力及び外力の仮想仕事 $\delta\mathfrak{W}$ を考える。

$$\delta\mathfrak{W} = - \iiint \eta(E\dot{\varepsilon}_x \delta\varepsilon_x + G\dot{\tau}_{xy} \delta\tau_{xy}) dx dy dz + \int_L \{f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w + f_\theta \delta \theta\} dx \quad (\text{A.17})$$

第1項は垂直歪速度に比例する内部粘性による構造減衰力、第2項は外力による仮想仕事である。なお、 η は構造減衰係数、 f_x, f_y, f_z, f_θ はそれぞれ単位長さあたりの x, y, z 方向の外力、せん断中心周りの外力モーメントである。

以上を Hamilton の原理

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathfrak{I} - \mathfrak{U}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathfrak{W} dt = 0 \quad (\text{A.18})$$

に代入する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \delta \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_L \{ (m\dot{u}^2 - EA_s u'^2) + (m\dot{v}^2 - EI_{yy} v''^2) + (m\dot{w}^2 - EI_{zz} w''^2) \\ &\quad + (J_{xx}^s \dot{\theta}^2 - EI_{\omega\omega}^s \theta''^2 - GK_s \theta'^2) - 2(z_g - z_s)m\dot{v}\dot{\theta} + 2(y_g - y_s)m\dot{w}\dot{\theta} \} dx dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_L [\eta E (A_s \dot{u}' \delta u' + I_{yy} \dot{v}'' \delta v'' + I_{zz} \dot{w}'' \delta w'' + I_{\omega\omega}^s \dot{\theta}'' \delta \theta'') + \eta G (K_s \dot{\theta}' \delta \theta')] \\ &\quad + \{ f_x \delta u + f_y \delta v + f_z \delta w + f_\theta \delta \theta \}] dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_L [f_x \delta u + m\dot{u} \delta \dot{u} - EA_s (u' + \eta \dot{u}') \delta u' + f_y \delta v + \{ m\dot{v} - (z_g - z_s)m\dot{\theta} \} \delta v \\ &\quad - EI_{yy} (v'' + \eta \dot{v}'') \delta v'' + f_z \delta w + \{ m\dot{w} + (y_g - y_s)m\dot{\theta} \} \delta w \\ &\quad - EI_{zz} (w'' + \eta \dot{w}'') \delta w'' + f_\theta \delta \theta + \{ J_{xx}^s \dot{\theta} - (z_g - z_s)m\dot{v} + (y_g - y_s)m\dot{w} \} \delta \theta \\ &\quad - GK_s (\theta' + \eta \dot{\theta}') \delta \theta' - EI_{\omega\omega}^s (\theta'' + \eta \dot{\theta}'') \delta \theta''] dx dt \\ &= \int_L [m\dot{u} \delta u + \{ m\dot{v} - (z_g - z_s)m\dot{\theta} \} \delta v + \{ m\dot{w} + (y_g - y_s)m\dot{\theta} \} \delta w \\ &\quad + \{ J_{xx}^s \dot{\theta} - (z_g - z_s)m\dot{v} + (y_g - y_s)m\dot{w} \} \delta \theta]_{t_0}^{t_1} dx \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} [-EA_s (u' + \eta \dot{u}') \delta u - (EI_{yy} (v'' + \eta \dot{v}'')) \delta v' + (EI_{yy} (v'' + \eta \dot{v}''))' \delta v \\ &\quad - (EI_{zz} (w'' + \eta \dot{w}'')) \delta w' + (EI_{zz} (w'' + \eta \dot{w}''))' \delta w \\ &\quad + \{ (EI_{\omega\omega}^s (\theta'' + \eta \dot{\theta}''))' - GK_s (\theta' + \eta \dot{\theta}') \} \delta \theta - EI_{\omega\omega}^s (\theta'' + \eta \dot{\theta}'') \delta \theta']_{x_a}^{x_f} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_L \{ \{ f_x - m\ddot{u} + (EA_s (u' + \eta \dot{u}'))' \} \delta u \\ &\quad + \{ f_y - (m\ddot{v} - (z_g - z_s)m\ddot{\theta}) - (EI_{yy} (v'' + \eta \dot{v}''))'' \} \delta v \\ &\quad + \{ f_z - (m\ddot{w} + (y_g - y_s)m\ddot{\theta}) - (EI_{zz} (w'' + \eta \dot{w}''))'' \} \delta w \\ &\quad + \{ f_\theta - (J_{xx}^s \ddot{\theta} - (z_g - z_s)m\ddot{v} + (y_g - y_s)m\ddot{w}) + (GK_s (\theta' + \eta \dot{\theta}'))' \\ &\quad - (EI_{\omega\omega}^s (\theta'' + \eta \dot{\theta}''))'' \} \delta \theta \} dx dt \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

ただし、最後の等号では任意の関数 $a(t, x)$ に対して成り立つ以下の関係式を用いている。

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \int_L a \delta \dot{u} dx dt &= \int_L [a \delta u]_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_L \dot{a} \delta u dx dt \\
 \int_{t_0}^{t_1} \int_L a \delta u' dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} [a \delta u]_{x_a}^{x_f} dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_L a' \delta u dx dt \\
 \int_{t_0}^{t_1} \int_L a \delta u'' dx dt &= \int_{t_0}^{t_1} [a \delta u' - a' \delta u]_{x_a}^{x_f} dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_L a'' \delta u dx dt
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

式(A.19)が仮想変位 $\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta$ に対して恒等的に0になる条件を考えることで、任意の時刻及び任意の x 位置において成り立つ支配方程式が式(3.3)~(3.8)のように、また任意の時刻において船尾及び船首で成り立つ境界条件が式(3.9)のように得られる。

Appendix B 運動方程式の係数

式(3.12)を式(3.9)に代入することで、変位関数 $u_{j,j}$ が船首尾端で満たすべき境界条件

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (EA_s u'_{1,j})|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 \{(EI_{yy} u''_{2,j})'\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 (EI_{yy} u''_{2,j})|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 \{(EI_{zz} u''_{3,j})'\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 (EI_{zz} u''_{3,j})|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 \{(EI_{\omega\omega}^s u''_{4,j})' - GK_s u'_{4,j}\}|_{x=x_a, x_f} = 0 \\
 (EI_{\omega\omega}^s u''_{4,j})|_{x=x_a, x_f} = 0
 \end{array} \right. \tag{B.1}$$

が得られる。

式(3.5)に式(3.12)を代入し、両辺に変位関数 $u_{1,i}$ ($i = 0 \sim N_1$)を乗じて長手方向に積分すると、以下の方程式が得られる。

$$\int_L \sum_{j=0}^{N_1} \{m u_{1,i} u_{1,j} \xi_{1,j} - u_i (EA_s u'_{1,j})' (\xi_{1,j} + \eta \xi_{1,j})\} dx = \int_L f_1 u_{1,i} dx \quad (i = 0 \sim N_1) \tag{B.2}$$

ここで、部分積分を施すことで

$$\int_L u_{1,i} (EA_s u'_{1,j})' dx = [u_{1,i} (EA_s u'_{1,j})]_{x_a}^{x_f} - \int_L u'_{1,i} (EA_s u'_{1,j}) dx \tag{B.3}$$

と変形でき、境界条件(B.1)を適用することで

$$\sum_{j=0}^{N_1} \int_L m u_{1,i} u_{1,j} dx \xi_{1,j} + \sum_{j=0}^{N_1} \int_L EA_s u'_{1,i} u'_{1,j} dx (\xi_{1,j} + \eta \xi_{1,j}) = \int_L f_1 u_{1,i} dx \quad (i = 0 \sim N_1) \tag{B.4}$$

を得る。

式(3.6)に式(3.12)を代入し、両辺に変位関数 $u_{2,i}$ ($i = 0 \sim N_2$)を乗じて長手方向に積分すると、以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_L \sum_{j=0}^{N_2} \{ m u_{2,i} u_{2,j} \ddot{\xi}_{2,j} + u_{2,i} (EI_{yy} u_{2,j}'')' (\xi_{2,j} + \eta \dot{\xi}_{2,j}) \} dx - \int_L \sum_{j=0}^{N_4} \{ m (z_g - z_s) u_{2,i} u_{4,j} \ddot{\xi}_{4,j} \} dx \\ = \int_L f_2 u_{2,i} dx \quad (i = 0 \sim N_2) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで、部分積分を施すことで

$$\int_L u_{2,i} (EI_{yy} u_{2,j}'')' dx = [u_{2,i} (EI_{yy} u_{2,j}') - u_{2,i}' (EI_{yy} u_{2,j}'')]_{x_a}^{x_f} + \int_L u_{2,i}' (EI_{yy} u_{2,j}'') dx \quad (\text{B.6})$$

と変形でき、境界条件(B.1)を適用することで

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_2} \int_L m u_{2,i} u_{2,j} dx \ddot{\xi}_{2,j} - \sum_{j=0}^{N_4} \int_L m (z_g - z_s) u_{2,i} u_{4,j} dx \ddot{\xi}_{4,j} + \sum_{j=0}^{N_2} \int_L EI_{yy} u_{2,i}' u_{2,j}'' dx (\xi_{2,j} + \eta \dot{\xi}_{2,j}) \\ = \int_L f_2 u_{2,i} dx \quad (i = 0 \sim N_2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

を得る。

式(3.7)に式(3.12)を代入し、両辺に変位関数 $u_{3,i}$ ($i = 0 \sim N_3$)を乗じて長手方向に積分すると、以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_L \sum_{j=0}^{N_3} \{ m u_{3,i} u_{3,j} \ddot{\xi}_{3,j} + u_{3,i} (EI_{zz} u_{3,j}'')' (\xi_{3,j} + \eta \dot{\xi}_{3,j}) \} dx + \int_L \sum_{j=0}^{N_4} \{ m (y_g - y_s) u_{3,i} u_{4,j} \ddot{\xi}_{4,j} \} dx \\ = \int_L f_3 u_{3,i} dx \quad (i = 0 \sim N_3) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ここで、(B.6)と同様の部分積分を施し境界条件(B.1)を適用することで

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N_3} \int_L m u_{3,i} u_{3,j} dx \ddot{\xi}_{3,j} + \sum_{j=0}^{N_4} \int_L m (y_g - y_s) u_{3,i} u_{4,j} dx \ddot{\xi}_{4,j} + \sum_{j=0}^{N_3} \int_L EI_{zz} u_{3,i}' u_{3,j}'' dx (\xi_{3,j} + \eta \dot{\xi}_{3,j}) \\ = \int_L f_3 u_{3,i} dx \quad (i = 0 \sim N_3) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

を得る。

式(3.8)に式(3.12)を代入し、両辺に変位関数 $u_{4,i}$ ($i = 0 \sim N_4$)を乗じて長手方向に積分すると、以下の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \int_L \sum_{j=0}^{N_4} \left\{ J_{xx}^S u_{4,i} u_{4,j} \ddot{\xi}_{4,j} + u_{4,i} (EI_{\omega\omega}^S u_{4,j}'')' (\xi_{4,j} + \eta \dot{\xi}_{4,j}) - u_{4,i} (GK_S u_{4,j}')' \xi_{4,j} \right\} dx \\
 & - \int_L \sum_{j=0}^{N_2} \{ m(z_g - z_s) u_{4,i} u_{2,j} \ddot{\xi}_{2,j} \} dx + \int_L \sum_{j=0}^{N_3} \{ m(y_g - y_s) u_{4,i} u_{3,j} \ddot{\xi}_{2,j} \} dx \\
 & = \int_L f_4 u_{4,i} dx \quad (i = 0 \sim N_4)
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

ここで、部分積分を施すことで

$$\begin{aligned}
 & \int_L u_{4,i} (EI_{\omega\omega}^S u_{4,j}'')' dx = \left[u_{4,i} (EI_{\omega\omega}^S u_{4,j}') - u_{4,i}' (EI_{\omega\omega}^S u_{4,j}'') \right]_{x_a}^{x_f} + \int_L u_{4,i}' (EI_{\omega\omega}^S u_{4,j}'') dx \\
 & \int_L u_{4,i} (GK_S u_{4,j}')' dx = \left[u_{4,i} (GK_S u_{4,j}') \right]_{x_a}^{x_f} - \int_L u_{4,i}' (GK_S u_{4,j}') dx
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

と変形でき、境界条件(B.1)を適用することで

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{N_4} \int_L J_{xx}^S u_{4,i} u_{4,j} dx \ddot{\xi}_{4,j} - \sum_{j=0}^{N_2} \int_L m(z_g - z_s) u_{4,i} u_{2,j} dx \ddot{\xi}_{2,j} + \sum_{j=0}^{N_3} \int_L m(y_g - y_s) u_{4,i} u_{3,j} dx \ddot{\xi}_{3,j} \\
 & + \sum_{j=0}^{N_4} \int_L EI_{\omega\omega}^S u_{4,i}' u_{4,j}'' dx (\xi_{4,j} + \eta \dot{\xi}_{4,j}) + \sum_{j=0}^{N_4} \int_L GK_S u_{4,i}' u_{4,j}' dx \xi_{4,j} \\
 & = \int_L f_4 u_{4,i} dx \quad (i = 0 \sim N_4)
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

を得る。式(B.4)(B.7),(B.9),(B.12)をマトリクスに纏めることで、式(3.13)～式(3.18)が得られる。

Appendix C 一般化された radiation 流体力係数の導出

船体動揺によって生じる 3 次元の radiation 流場の速度ポテンシャル $\phi^R(x, y, z, t)$ は、以下の境界値問題を解くことによって求められる。

$$\begin{cases} \Delta \phi^R = 0 & \text{for } z \geq 0 \\ \frac{\partial \phi^R}{\partial n} = \frac{D}{Dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) & \text{on } S_H \\ \ddot{\phi}^R + g \frac{\partial \phi^R}{\partial z} = 0 & \text{on } z = 0 \\ \phi^R = 0 & \text{as } z \rightarrow \infty, x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{cases} \tag{C.1}$$

ここで、船体表面境界条件の右辺は、式(3.3)、式(3.12)及び式(3.28)を用いて、 u_2', u_3', u_4' による x 方向変位を無視すると

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) &= \frac{D}{Dt} \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} u_{j,j} n_j \\ &= \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} (\dot{\xi}_{j,j} u_{j,j} - U \xi_{j,j} u'_{j,j}) n_j\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

と与えられる. ただし, ここでは船体の大変位影響は考慮せず $\mathbf{n} \cong \bar{\mathbf{n}}$ と見做しており, また n_j の x 方向の変化は無視している.

ここで, 船体動揺及びそれによる流場は出会い波周波数 ω_e で調和振動していると仮定すると, 境界値問題(C.1)は複素振幅形式で

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi}^R = 0 & \text{for } z \geq 0 \\ \frac{\partial \hat{\phi}^R}{\partial n} = i\omega_e \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) n_j & \text{on } S_H \\ \frac{\partial \hat{\phi}^R}{\partial z} + k_e \hat{\phi}^R = 0 & \text{on } z = 0 \\ \hat{\phi}^R = 0 & \text{as } z \rightarrow \infty \end{cases}\quad (\text{C.3})$$

と書きなおすことができる. 但し, 自由表面条件において, 波数と周波数の間に成り立つ以下の分散関係を用いている.

$$k_e = \omega_e^2 / g \quad (\text{C.4})$$

ここで, 式(C.3)の船体表面条件に対応して, $\hat{\phi}^R$ を $\xi_{j,j}$ の運動に起因する流場成分に分解する. 即ち, 船体表面境界条件

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{j,j}^R}{\partial n} = \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) n_j \quad \text{on } S_H \quad (\text{C.5})$$

を満足する $\xi_{j,j}$ の運動に起因する radiation 単位複素速度ポテンシャル $\hat{\phi}_{j,j}^R(x, y, z)$ を定義すると, $\hat{\phi}^R$ はその線形結合として次式によって表すことができる.

$$\hat{\phi}^R = i\omega_e \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \hat{\phi}_{j,j}^R \quad (\text{C.6})$$

今, radiation 単位複素速度ポテンシャル $\hat{\phi}_{j,j}^R(x, y, z)$ の変数 x を, 船体の長手方向の位置を表すパラメータとして考え, 2次元流場 $\hat{\phi}_{j,j}^R(x; y, z)$ として扱う. この時, 船体表面条件(C.5)は $x = x$ の断面における2次元流場の船体表面条件として

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{j,j}^R}{\partial n} = \left\{ \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) n_j \right\}_{x=x} \quad \text{on } S_H(x) \quad (\text{C.7})$$

と書かれる. 式(C.7)の右辺の $\left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right)$ は $x = x$ における値であり, 定数と見做される. ところで, 3.5.2 項で定義される2次元 radiation 単位速度ポテンシャル $\hat{\phi}_j^R(x; y, z)$ ($j = 1 \sim 4$) の船体表面境界条件は

$$\frac{\partial \hat{\phi}_j^R}{\partial n} = n_j \quad \text{on } S_H(x) \quad (\text{C.8})$$

であった。線形の境界値問題にける非斉次境界条件と解は線形に対応することから、式(C.7)と(C.8)を比べることで、 $\hat{\phi}_{j,j}^R$ と $\hat{\phi}_j^R$ の関係は

$$\hat{\phi}_{j,j}^R = \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) \hat{\phi}_j^R \quad (\text{C.9})$$

と与えられることが分かる。

radiation 流場による圧力 $\hat{p}^R(x, y, z)$ は、式(3.35)より

$$\begin{aligned} \hat{p}^R &= -\rho(i\omega_e) \left(1 - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}^R \\ &= -\rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \left(1 - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}_{j,j}^R \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

と表せるから、単位長さあたりの radiation 流体力 $\hat{f}_i^R(x)$ ($i = 1 \sim 4$)は

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^R &= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \int_{S_H} \hat{p}_{j,j}^R n_i dl \\ &= \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \int_{S_H} \left(\hat{\phi}_{j,j}^R - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial \hat{\phi}_{j,j}^R}{\partial x} \right) n_i dl \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

と表すことができる。式(C.11)の最右辺の第2項に関して、2次元 radiation 速度ポテンシャル $\hat{\phi}_{j,j}^R$ の x に関する導関数の正確な演算は困難になる。一方で、一般化された radiation 流体力 $\hat{F}_{i,i}^R$ ($i = 1 \sim 4, i = 0 \sim N_i$)は部分積分を用いることでこの演算を回避することができる。具体的には、以下のような表現が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i,i}^R &= - \int_L \hat{f}_i^R u_{i,i} dx \\ &= \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \int_L \int_{S_H} \left(\hat{\phi}_{j,j}^R - \frac{U}{i\omega_e} \frac{\partial \hat{\phi}_{j,j}^R}{\partial x} \right) u_{i,i} n_i dl dx \\ &= \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \int_L \left(u_{i,i} + \frac{U}{i\omega_e} u'_{i,i} \right) \int_{S_H} \hat{\phi}_{j,j}^R n_i dl dx \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

ここで、3つ目の等号においては部分積分を施した上で、船首尾端における流体力は微小であるとして無視している。式(C.12)に式(C.9)を代入することで、

$$\hat{F}_{i,i}^R = \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \xi_{j,j} \int_L \left(u_{i,i} + \frac{U}{i\omega_e} u'_{i,i} \right) \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) \int_{S_H} \hat{\phi}_j^R n_i dl dx \quad (\text{C.13})$$

を得る。ここで、

$$\hat{F}_{i,i}^R = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \{ (i\omega_e)^2 A_{ij,ij} + (i\omega_e) B_{ij,ij} + C_{ij,ij} \} \hat{\xi}_{j,j} \quad (C.14)$$

を満たすような実係数 $A_{ij,ij}$, $B_{ij,ij}$ 及び $C_{ij,ij}$ を求める。これらの係数は、式(C.14)を実部と虚部に分離することによって、以下のように決まる。

$$\begin{aligned} A_{ij,ij} &= \int_L u_{i,i} u_{j,j} a_{ij} dx \\ B_{ij,ij} &= \int_L \left\{ \left(u_{i,i} u_{j,j} + \frac{U^2}{\omega_e^2} u'_{i,i} u'_{j,j} \right) b_{ij} - U (u_{i,i} u'_{j,j} - u'_{i,i} u_{j,j}) a_{ij} \right\} dx \\ C_{ij,ij} &= \int_L \left\{ -U^2 u'_{i,i} u'_{j,j} a_{ij} - U (u_{i,i} u'_{j,j} - u'_{i,i} u_{j,j}) b_{ij} \right\} dx \end{aligned} \quad (C.15)$$

ただし、 $a_{ij}(x)$ 及び $b_{ij}(x)$ は式(3.55),(3.56)で定義される2次元付加質量及び2次元減衰力係数である。これらの係数は原則的に添え字に関して対称性を持つ。また、式(C.15)は、弾性モードも含め、前進速度に比例する項は反対称、前進速度に依存しない項及び前進速度の2乗に比例する項は対称になっており、Timman-Newmanの関係が成り立っていることが判る。一般に、左右対称の船体では、radiation 流体力係数のうち縦運動($i, j = 1, 3$)と横運動($i, j = 2, 4$)の連成項は0となるが、左右非対称の船体や本プログラムのように横傾斜した状態で radiation 流体力係数を求める場合についてはその限りではなくなる。

Appendix D 断面力の定式化

調和振動を前提とした場合、単位長さあたりの scattering 流体力による断面力 $\hat{F}_i^S(x_0)$ はそれぞれ次式のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{F}_i^S(x_0) &= - \int_{x_a}^{x_0} \hat{f}_i^S dx \\ &= - \int_{x_a}^{x_0} \zeta_a \hat{s}_i dx - \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \frac{U}{i\omega_e} \left[\int_{S_H(x)} \hat{\varphi}^S n_i dl \right]_{x_a}^{x_0} \\ &= - \int_{x_a}^{x_0} \zeta_a \hat{s}_i dx + \frac{U}{i\omega_e} \zeta_a \hat{s}_i(x_0) \quad (i = 1 \sim 4) \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_5^S(x_0) &= \int_{x_a}^{x_0} (x - x_0) \hat{f}_3^S dx \\ &= \int_{x_a}^{x_0} (x - x_0) \zeta_a \hat{s}_3 dx - \rho g \zeta_a \frac{\omega_e}{\omega} \frac{U}{i\omega_e} \left\{ \left[\int_{S_H(x)} (x - x_0) \hat{\varphi}^S n_3 dl \right]_{x_a}^{x_0} - \int_{x_a}^{x_0} \int_{S_H(x)} \hat{\varphi}^S n_3 dl dx \right\} \\ &= \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) \zeta_a \hat{s}_3 + \frac{U}{i\omega_e} \zeta_a \hat{s}_3 \right\} dx \end{aligned} \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_6^S(x_0) &= - \int_{x_a}^{x_0} (x - x_0) \hat{f}_2^S dx \\ &= - \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) \zeta_a \hat{s}_2 + \frac{U}{i\omega_e} \zeta_a \hat{s}_2 \right\} dx \end{aligned} \quad (D.3)$$

ただし, $x = x_a$ 位置の scattering 流体力及び法線ベクトルの x 方向の変化は無視できるほど小さいとしている. 時間領域表示する場合, 下線部の項は時間に関する積分を意味する. 3.5.4 項と同様に, 下線部の項に式(3.88)を適用することで次のように表すことができる.

$$\mathcal{F}_i^S(x_0) = - \int_{x_a}^{x_0} (s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w) dx + U(s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w) \Big|_{x=x_0} \quad (i = 1 \sim 4) \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{F}_5^S(x_0) = \int_{x_a}^{x_0} \{ (x - x_0)(s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w) + U(s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w) \} dx \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{F}_6^S(x_0) = - \int_{x_a}^{x_0} \{ (x - x_0)(s_i^{\text{Re}} a_w + s_i^{\text{Im}} v_w) + U(s_i^{\text{Re}} v_w + s_i^{\text{Im}} u_w) \} dx \quad (\text{D.6})$$

次に, radiation 流体力による断面力 $\hat{\mathcal{F}}_i^R$ を考える. 調和振動を前提とした場合, 単位長さあたりの radiation 流体力 $f_i^R(x)$ は(C.10)で定義される圧力を用いて, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \hat{f}_i^R &= - \int_{S_H} \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{p}_{j,j}^R n_i dl \\ &= \hat{f}_{ij}^{\text{R0}} + \frac{U}{i\omega_e} \left\{ \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \int_{S_H} \frac{\partial \hat{\phi}_{j,j}^R}{\partial x} n_i dl \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

ここで,

$$\hat{f}_i^{\text{R0}} = \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \int_{S_H} \hat{\phi}_{j,j}^R n_i dl \quad (\text{D.8})$$

と置いている. これにより, scattering 流体力の場合と全く同様の手順で以下の表示が得られる.

$$\hat{\mathcal{F}}_i^R(x_0) = - \int_{x_a}^{x_0} \hat{f}_i^{\text{R0}} dx + \frac{U}{i\omega_e} \hat{f}_i^{\text{R0}}(x_0) \quad (i = 1 \sim 4) \quad (\text{D.9})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_5^R(x_0) = \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) \hat{f}_3^{\text{R0}} + \frac{U}{i\omega_e} \hat{f}_3^{\text{R0}} \right\} dx \quad (\text{D.10})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_6^R(x_0) = - \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) \hat{f}_2^{\text{R0}} + \frac{U}{i\omega_e} \hat{f}_2^{\text{R0}} \right\} dx \quad (\text{D.11})$$

なお, \hat{f}_i^{R0} は式(3.70)~(3.72)で定義される一般化された単位長さあたりの radiation 流体力係数 $a_{ij,ij}$, $b_{ij,ij}$, $c_{ij,ij}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\hat{f}_i^{\text{RO}} &= \rho(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) \int_{S_H} \hat{\phi}_j^{\text{R}} n_i dl \\
&= -(i\omega_e)^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \hat{\xi}_{j,j} \left(u_{j,j} - \frac{U}{i\omega_e} u'_{j,j} \right) \left(a_{ij} + \frac{b_{ij}}{i\omega_e} \right) \\
&= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ (i\omega_e)^2 u_{j,j} a_{ij} + (i\omega_e) (u_{j,j} b_{ij} - U u'_{j,j} a_{ij}) - U u'_{j,j} b_{ij} \right\} \hat{\xi}_{j,j} \\
&= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ (i\omega_e)^2 a_{ij,0j} + (i\omega_e) \mathcal{B}_{ij,0j} + c_{ij,0j} \right\} \hat{\xi}_{j,j}
\end{aligned} \tag{D.12}$$

と表される。ただし、最後の式変形においては式(3.22)のモード関数を前提としている。時間領域で表示した場合、 $f_i^{\text{RO}}(x, t)$ は

$$f_i^{\text{RO}} = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} (a_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j} + \mathcal{B}_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j} + c_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j}) \tag{D.13}$$

と表すことができる。また、(D.9)~(D.11)の下線部の項は時間に関する原始関数を意味するが、運動方程式で用いる radiation 流体力と矛盾しないように

$$\int f_i^{\text{RO}} dt = - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left(a_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j} + \mathcal{B}_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j} - \frac{1}{\omega_e^2} c_{ij,0j} \hat{\xi}_{j,j} \right) \tag{D.14}$$

と与える。なぜならば、以上の定義を行うと、一般化された radiation 流体力(C.14)は、式(D.8)を適用することで

$$\hat{F}_{i,i}^{\text{R}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \int_L \left(u_{i,i} + \frac{U}{i\omega_e} u'_{i,i} \right) \hat{f}_i^{\text{RO}} dx \tag{D.15}$$

と書けるが、時間領域表示では式(D.13)及び式(D.14)を用いて

$$\begin{aligned}
F_{i,i}^{\text{R}} &= \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \int_L \left(u_{i,i} f_i^{\text{RO}} + U u'_{i,i} \int f_i^{\text{RO}} dt \right) dx \\
&= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \int_L \left[u_{i,i} (u_{j,j} a_{ij}) \hat{\xi}_{j,j} \right. \\
&\quad + \left\{ u_{i,i} (u_{j,j} b_{ij} - U u'_{j,j} a_{ij}) + U u'_{i,i} (u_{j,j} a_{ij}) - \frac{U}{\omega_e^2} u'_{i,i} (-U u'_{j,j} b_{ij}) \right\} \hat{\xi}_{j,j} \\
&\quad \left. + (u_{i,i} (-U u'_{j,j} b_{ij}) + U u'_{i,i} (u_{j,j} b_{ij} - U u'_{j,j} a_{ij})) \hat{\xi}_{j,j} \right] dx \\
&= - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \int_L (a_{ij,ij} \hat{\xi}_{j,j} + \mathcal{B}_{ij,ij} \hat{\xi}_{j,j} + c_{ij,ij} \hat{\xi}_{j,j}) dx
\end{aligned} \tag{D.16}$$

と、一般化された radiation 流体力の定義式に一致するからである。結局 radiation 流体力による断面力 $\hat{F}_i^{\text{R}}(x_0)$ は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_i^R(x_0) = & \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ \int_{x_a}^{x_0} (a_{i,j,0j} \ddot{\xi}_{j,j} + b_{i,j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + c_{i,j,0j} \xi_{j,j}) dx \right. \\
 & \left. + U \left(a_{i,j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + b_{i,j,0j} \xi_{j,j} - \frac{1}{\omega_e^2} c_{i,j,0j} \xi_{j,j} \right) \right\} \quad (i = 1 \sim 4)
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_5^R(x_0) = & - \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) (a_{3j,0j} \ddot{\xi}_{j,j} + b_{3j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + c_{3j,0j} \xi_{j,j}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + U \left(a_{3j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + b_{3j,0j} \xi_{j,j} - \frac{1}{\omega_e^2} c_{3j,0j} \xi_{j,j} \right) \right\} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_6^R(x_0) = & \sum_{j=1}^4 \sum_{j=0}^{N_j} \left\{ \int_{x_a}^{x_0} \left\{ (x - x_0) (a_{2j,0j} \ddot{\xi}_{j,j} + b_{2j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + c_{2j,0j} \xi_{j,j}) \right. \right. \\
 & \left. \left. + U \left(a_{2j,0j} \dot{\xi}_{j,j} + b_{2j,0j} \xi_{j,j} - \frac{1}{\omega_e^2} c_{2j,0j} \xi_{j,j} \right) \right\} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

と書くことができる。

式(D.7)~(D.9)及び式(D.17)~(D.19)を纏めることで、式(3.109)~(3.111)の表示を得る。