

二目的最短路問題の非劣解の生成法

小林 和博*

Survey of the enumeration methods of nondominated solutions of biobjective shortest path problem

by

Kazuhiro KOBAYASHI

Abstract

We consider the biobjective shortest path problem. It is an extension of the single-objective shortest path problem. The biobjective shortest path problem is a good mathematical model for ship navigation planning problem. Practical instances of the biobjective shortest path problem arising in the ship navigation planning problem are moderated-sized. Theoretically, enumeration of nondominated solutions to a biobjective shortest path problem is intractable. However, the enumeration to the moderated-sized instances is practically tractable by existing fast solution techniques. In this paper, we explain the solution techniques for enumerating the set of nondominated solutions.

* 運航・物流系

原稿受付 平成24年10月1日

審査日 平成24年11月19日

目 次

1. まえがき	68
2. 二目的最短路問題	68
2.1 非劣解	69
2.2 本稿の目的	70
3. 数理最適化問題としての定式化	70
3.1 2 フェーズアルゴリズム	70
3.2 第一フェーズ	70
3.3 第二フェーズ	71
4. 数値計算	72
5. まとめ	73
参考文献	73

記 号

v_i : 経路上の i 番目の頂点

P : 経路の集合

Z_1 : 経路の第一の費用

Z_2 : 経路の第二の費用

$\hat{Z}$: 経路の重み付き和

(w_1, w_2) : 重み付き和を定義するための 2 つの重みから定義される 2 次元ベクトル

H^+ : 非劣解集合を含む平面

H^- : 非劣解集合を含まない平面

α, β : 隣り合う 2 つの支持非劣解

m, n : ネットワークのサイズを表すパラメータ

1. まえがき

二目的最短路問題は、枝上に二つの費用を持たせた最短路問題である。この問題は、船舶の運航計画策定の数理モデルとして有用である。それは、費用として移動時間と移動コストを持たせることによって、航行時間の上限を適切に表現できるからである。二目的最短路問題の解を列挙することは、計算量の観点からは大変難しい。

しかし、船舶の運航計画策定を前提とすると、ネットワークのサイズを小さく保つことができるため、適切な手法を用いれば現実的な計算時間で行うことができる。本稿では、既存の研究成果に基づき、二目的最短路問題の非劣解を列挙する手法を解説する。

2. 二目的最短路問題

最短路問題は、最もよく知られた組合せ最適化問題のひとつである。最短路問題にはさまざまなバリエーションが提案されている。その中で最も基本的な問題として、単一目的で非負の費用をもつ最短路問題が挙げられる。これは大学初年度の情報関連の講義や情報処理技術者試験で取り上げられることが多く、広く知られている。組合せ最適化問題の中でも大変よい性質をもつこの問題は、解くためのアルゴリズムも洗練されている。例えば、ダイクストラ法がよく知られている。

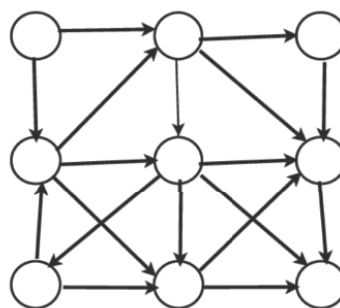


図-1 ネットワークの例

最短路問題にはさまざまな拡張が研究されているが、その内容は意外に知られていない。例えば、枝が負の費用をもつとダイクストラ法では解けないが、その場合にはどうしたらよいだろうか？あるいは、ネットワークの各点に訪問時間の制限がついていたら、どうすればよいだろうか？このような拡張に対しても、さまざまな研究成果が得られている。

最短路問題は、船舶運航のモデルとして用いやすい。そのためには、まず、航海する海域上に「点」を設定する。これは、物理的には等間隔でもよいし、そうでなくてもよい。この点は船舶が航行する可能性のある場所に設定する。つぎに、あるひとつの点から他の点に航行する可能性のあるときに、「枝」を定義する。この枝は、その始点に対応する場所から、その終点に対応する場所に船舶が航行することをモデル化している(図-1)。それぞれの枝には「費用」を定義する。費用には用途に応じた値を設定する。例えば、2点間の航行時間に注目するならば、費用は2点間の移動時間を設定すればよい。また、航行費用に注目するならば、費用は2点間の移動費用に設定すればよい。こうして船舶の航行を表すネットワークが得られる。このネットワーク上で、出発港に対応する点から、目的港に対応する点への最短路を求めれば、費用が最小の運航経路が求まる。運航経路は、海域上

の点の列としてあらわされる。

グラフ上の点の列を経路とよぶ。経路に含まれる点の数を k とすると、経路は

$$(v_1, v_2, \dots, v_k)$$

と表される。経路の最初の点を経路の始点、最後の点を経路の終点とよぶ。上の例では、 v_1 が始点、 v_k が終点である。このとき、 v_1 から v_k への移動は、隣り合う点を結ぶ枝 $(v_i, v_{i+1}), i=1, 2, \dots, k-1$ を順に航行することで実現することができる。経路の「費用」は、その経路に含まれる枝の費用の和として定義される。

実際の船舶の運航を想定すると、このモデルには表現能力が足りない。例えば、枝の費用を2点間の燃料消費量として定義したとする。これは、単一目的をもつネットワークを定義した状態である。ある場所から他の場所への燃料消費量を最小とする経路は、このネットワーク上で最短路問題を解くことで求まる。しかし、船舶の実際の運航では、燃料消費量だけではなく、航行時間(=到着時間)も考慮に入れなければならない。そこで、単一目的の最短路ではなく、二目的の最短路を用いたモデルを導入する。

二目的の最短路問題では、枝に二つの費用を定義する。例えば、燃料消費量と移動時間を同時に考慮したければ、(燃料消費量、移動時間)の二つの費用を与える(図-2)。たったこれだけの変更であるが、問題の性質が大きく変わる。もうダイクストラ法は使えないし、経路の「最適性」も変わってしまう。この二目的の最短路問題は単一目的の最短路問題よりもずっと扱いが難しく、多くの研究者によって研究が進められている。これらの成果を適切に用いることで、船舶の運航モデルに用いる程度の十分小さな問題では、二目的の最短路問題は解くことができるのである。

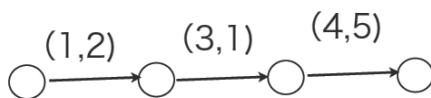


図-2 2つの費用をもつ経路の例

2.1 非劣解

単一目的の最短路問題では、最適解はひとつに定まる。すなわち、始点から終点までの経路のな

かで、その費用がもっとも小さなものが最適解である。ただし、この最適解に対応する経路(これを最短路とよぶ)は複数あるかもしれない。すなわち、ある最適値を実現する経路が二つある場合は、その両方が最短路である。

二目的の最短路問題では、ある経路の費用は、その経路に含まれる枝の2つの費用をそれぞれ別々に足して得られる2次元のベクトルとして定義される。例えば、図-2の経路の費用は、 $(1+3+4, 2+1+5)=(8,8)$ である。

二目的の最短路問題の場合は、最小の費用はひとつには定まらない。最小の費用を定義するには、2つの経路の「大小」を定義する必要がある。いま、第一の目的が経費、第二の目的が時間だったとしよう。このとき、(10万円、1時間)の経路と、(5万、2時間)の経路のどちらが“小さい”だろうか。

この二つの経路の目的関数値には、大小がつけられない。できることは、この両方の経路を示して、利用者の選択に委ねることだろう。

いま、ネットワーク上の経路が複数得られるとする。この経路の集合を P と表す。この中から一つの経路 p を取り出す。この経路と、それ以外の経路 $p' \in P$ とを比べる。経路 p の第一の費用を $c^{(1)}(p)$ 、第二の費用を $c^{(2)}(p)$ と表す。いま、 P のなかの経路 p' で、 p よりも第一の費用と第二の費用が共に小さいものが存在するとき、すなわち

$$p' \in P \text{ such that } c^{(1)}(p') < c^{(1)}(p) \text{ and } c^{(2)}(p') < c^{(2)}(p)$$

が成立するとき、 p' は p を支配する(dominate)という。

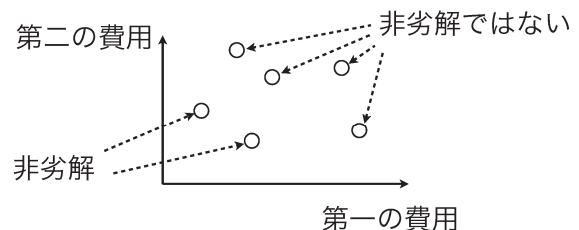


図-3 非劣解

経路の集合 P の中に、経路 p を支配する経路が存在しないとき、この p を“非劣解(nondominated solution)”とよぶ。第一の重み Z_1 を横軸に、第二の重み Z_2 を縦軸にとり、非劣解の概念を Z_1-Z_2 平面上に図示したの

が図-3である。自分の「左下」の領域に他の点がない点が非劣解である。

非劣解には、支持解 (supported solution) と非支持解 (unsupported solution) の二種類がある。 Z_1-Z_2 平面において、解 x を通る直線で、非劣解集合を含む平面 H^+ と、含まない平面 H^- とに分けることができるものが存在するとき、 x を支持解という。図-4に支持解と非支持解の例を示した。図中の支持解 x は、図に示された直線によって、 Z_1-Z_2 平面を H^+ と H^- に分けるが、非劣解は全て H^+ に含まれるようにできる。これに対して、非支持解 y を通る直線では、どのような方向でも、一方のみに非劣解を含むようにはできない。

2.2 本稿の目的

二目的最短路問題を「解く」というのは、単一目的の最短路問題を解く場合と異なり、最小の費用をもつ経路をひとつ求めるのではなく、非劣解の集合を求めることである。計算量の観点からは、二目的を含む多目的最短路問題は、NP-Completeであることがわかっている。しかし、二目的最短路問題であれば、非劣解を列挙することは、適切な手続きを用いれば可能である。本稿では、既存研究¹⁾³⁾に基づき、二目的最短路問題の解を求める方法を解説する。

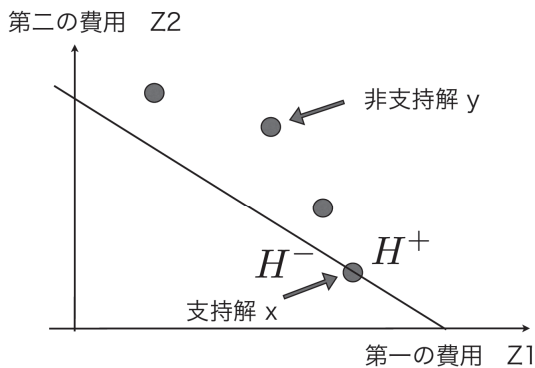


図-4 支持解と不支持解

3. 数理最適化問題としての定式化

二目的最短路問題は、下記の数理計画問題として定式化される。

$$\min \quad \hat{Z} = w_1 Z_1 + w_2 Z_2 \quad (1)$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} X_{1j} &= 1 \\ \sum_{i \in N} X_{ij} - \sum_{k \in N} X_{jk} &= 0 \\ &\text{for all } j \in N \text{ such that } j \neq 1, n \\ \sum_{i \in N} X_{in} &= 1, \\ X_{ij} &\in \{0, 1\}, \text{ for all } i, j \text{ pairs} \end{aligned}$$

ただし、

$$Z_1 = \sum_{i,j \in N} c_{ij}^{(1)} X_{ij}, Z_2 = \sum_{i,j \in N} c_{ij}^{(2)} X_{ij}$$

$$w_1 = \left| \frac{Z_{2\alpha} - Z_{2\beta}}{Z_{1\alpha} - Z_{1\beta}} \right|, w_2 = 1$$

$$\begin{aligned} X_{ij} &= 1 && \text{枝}(i, j) \text{を航行するとき} \\ &= 0 && \text{それ以外のとき} \end{aligned}$$

$c_{ij}^{(1)}$: 枝 (i, j) の第一移動費用

$c_{ij}^{(2)}$: 枝 (i, j) の第二移動費用

N : ノードの集合

ここで、この二目的最短路問題の目的は、ノード 1 を始点、ノード n を終点とする非劣解を列挙することである。さらに、 α, β はそれぞれ支持非劣解を表す。

3.1 2フェーズアルゴリズム

二目的最短路問題の非劣解を生成するためには、2つのフェーズからなるアルゴリズムを用いることができる³⁾。まず、第一フェーズでは、非劣解のうち、支持非劣解を生成する。続いて第二フェーズでは、第一フェーズで生成した支持非劣解を用いて、支持非劣解ではない非劣解を生成する。

3.2 第一フェーズ

第一フェーズでは、支持非劣解をすべて求める。このためには、二つの目的関数の重み付き和 $\hat{Z}(1)$ を単一の目的関数とする最短路問題を、重みを変えながら、繰り返し解く。ひとつの重み (w_1, w_2) に対して、その重み付き和 $\hat{Z}(1)$ を最小とする最短路が得られる。この最短路を p と表す。この最短路に含まれる枝の第一の費用の和を Z_{1p} 、第二の費用の和を Z_{2p} と表す。すると、これらをそれぞれ第一要素、第

二要素とする二次元のベクトル (Z_{1p}, Z_{2p}) が得られる。この (Z_{1p}, Z_{2p}) が非劣解であれば、支持非劣解の集合に加える。

全ての支持非劣解を生成するには、目的関数(1)を定める重み (w_1, w_2) は自由に決めていいわけではない。支持非劣解が求まるルールに従って決め、更新する必要がある。そのために **Dichotomic Method** を用いる³⁾。この方法では、すでに得られた隣り合う支持非劣解二つを使って、次に用いる重みを決める。そして、この重みによる重み付き和 $\hat{Z}(1)$ を最小にする経路を求める。

いま二つの隣り合う支持非劣解 α, β が有るとする。これらの経路の費用は、それぞれ $(Z_{1\alpha}, Z_{2\alpha}), (Z_{1\beta}, Z_{2\beta})$ である。この二つのベクトルから、次の公式によって重みを定める。

$$w_1 = \frac{|Z_{2\alpha} - Z_{2\beta}|}{|Z_{1\alpha} - Z_{1\beta}|}, w_2 = 1.$$

こうして定めた重み (w_1, w_2) を用いた重み付き和 $\hat{Z}(1)$ は、 $Z_1 - Z_2$ 平面上で α と β とを結ぶ直線と同じ傾きをもつ (図-5)。この重み付き和を最小化するということは、 $Z_1 - Z_2$ 平面上で直線 $\alpha\beta$ と同じ傾きをもつ直線の中で、直線 $\alpha\beta$ から「左下」方向に最も遠いものを求めることになる。

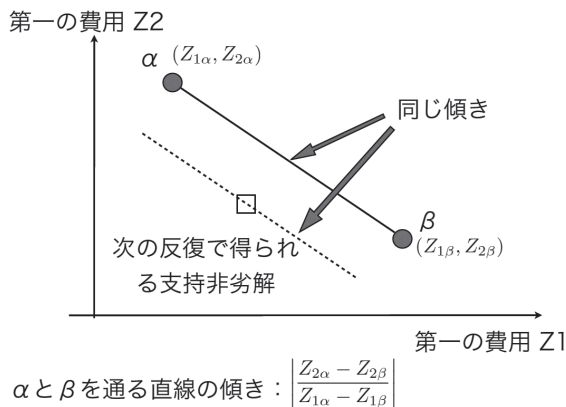


図-5 α と β の二点から定義される傾き

この $\hat{Z}$ を最小化する最短路 (図-5 では四角で表されている) を得たら、その第一の費用と第二の費用を要素とする二次元ベクトルを非劣解に加える。この手続きを繰り返し、これ以上支持非劣解が得られなくなったら第一フェーズを終了する。

3.3 第二フェーズ

第一フェーズでは、支持非劣解しか得られない。そこで、第二フェーズでは、支持解ではない非劣解を求める。そのために、第一フェーズで得た支持非劣解を用いる。

まず、第一フェーズで得た支持非劣解から、隣り合う二つの解を取り出す。これを α と β とする。解 α の二つの費用を要素とするベクトルが $(Z_{1\alpha}, Z_{2\alpha})$ 、解 β の二つの費用を要素とするベクトルが $(Z_{1\beta}, Z_{2\beta})$ であるが、 $Z_{1\beta}$ を第一要素、 $Z_{2\alpha}$ を第二要素とする $Z_1 - Z_2$ 平面上の点を γ とする。すると、 $Z_1 - Z_2$ 平面上に、三角形 $\alpha\beta\gamma$ が得られる (図-6)。この三角形 $\alpha\beta\gamma$ 内に費用が存在する経路も非劣解であるが、第一フェーズでは見つけ出すことが出来ない。そこで、この三角形内に存在する経路を求める。この三角形 $\alpha\beta\gamma$ 内に費用が存在する解を見つけるには k -最短路問題と呼ばれる問題の解を利用する²⁾。

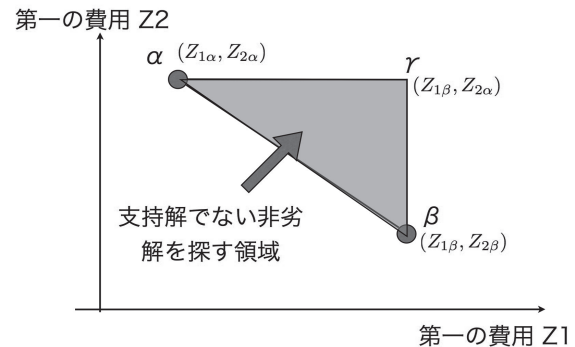


図-6 支持解でない非劣解の含まれる三角形領域

通常の前最短路問題が費用を最小にする経路をただ一つ得ることが目的であるのに対して、 k -最短路問題は、最も小さい方から費用の小さい順に k 番目までの経路を求める問題である。

三角形 $\alpha\beta\gamma$ 内の解を求めるには、まず、点 α と点 β の重みを用いて、第一フェーズと同様に

$$w_1 = \frac{|Z_{2\alpha} - Z_{2\beta}|}{|Z_{1\alpha} - Z_{1\beta}|}$$

と定めて k -最短路問題を解く。すると、

(w_1, w_2) を重みとする $\hat{Z}(1)$ を最小とする経路から k 番目までに小さい経路まで、 k 個の経路が得られる。このうち、費用最小の経路は、直線 $\alpha\beta$ に対応する。その次に小さい重み付き和をもつ経路は、直線 $\alpha\beta$ を Z_1-Z_2 平面上で右上方向に移動した直線上に存在する点に対応する (図-7)。 k -最短路問題を解いて得た経路のうち、その重み付き和 $\hat{Z}$ が、点 γ での値

$$w_1 Z_{1\beta} + w_2 Z_{2\alpha} \quad (2)$$

以上となる経路は非劣解とはなり得ない。なぜなら、そのような経路は α または β に”支配 (dominate)”されるからである。この考察から、 k -最短路問題の解としては、重み付き和 $\hat{Z}$ が上限 $w_1 Z_{1\beta} + w_2 Z_{2\alpha}$ (2) よりも小さいものだけ求めれば十分であることが分かる。

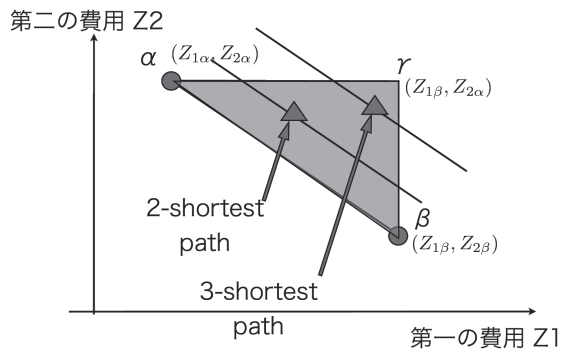


図-7 k -最短路問題の解の Z_1-Z_2 平面上での位置 ($k=2, 3$)

こうして得られた経路が、三角形内に存在する経路である。この手続きを、第一フェーズで得られた支持非劣解の隣り合う全てのペアに対して実行する。

4. 数値計算

二目的最短路問題を解くことで、どのような非劣解が得られるかを、数値実験によって示す。

4.1 データ生成

二目的最短路を定義するネットワークの構造は、図-8 に例示する。

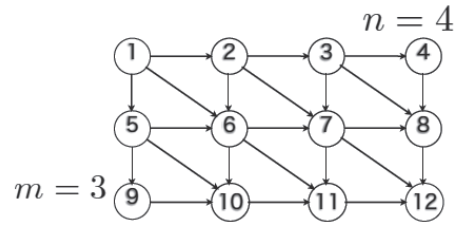


図-8 数値実験に用いたネットワークの構造

ここでは、横方向のノード数 m と、縦方向のノード数 n をパラメータとする。枝は、左下のノードから右下のノードへすすむように定義する。具体的には、自分自身から、右隣、下、斜め右下のノードに枝を定義する。各枝上の 2 つの費用はそれぞれ移動距離と移動時間を表すと想定し、擬似乱数で生成した、1 から 100 までの間の整数とする。こうして生成した $m=50$ 、 $n=100$ のネットワークを、前章までに述べた 2 フェーズアルゴリズムで解いて得られた非劣解の集合を図-9 に示した。

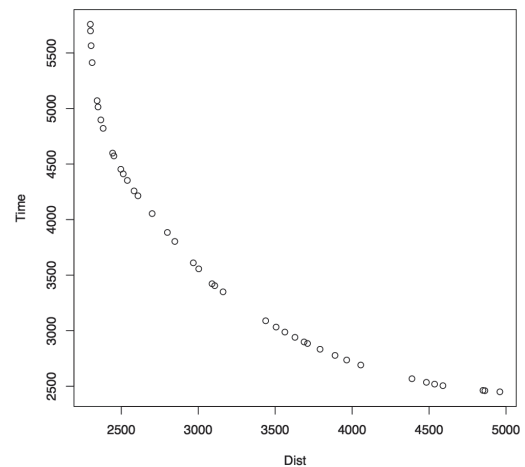


図-9 $m=50$, $n=100$ のネットワークに対して得られた非劣解の集合

このネットワークに縦方向に 50 個、横方向に 100 個のノードが含まれる。この程度の小さなネットワークでも、枝の費用を乱数で生成した場合は、41 個の非劣解が生成される。比較のために、重みを異なるルールによって更新して得られる非劣解集合を生成する。ここでは、重み付き和 $\hat{Z}'$ を

$$\hat{Z}' = Z_1 + wZ_2$$

と定義し、 w を0から10.0まで0.01刻みで設定することで非劣解集合を生成する。こうして得られた非劣解集合の要素数は36である。つまり、前章までで述べたアルゴリズムを用いると得られた解が、この0.01刻みの方法では得られないことがわかる。また、 w の値をどの値からどの値まで、どの刻みで動かせばよいのかが不明である。その点、前章までで述べたアルゴリズムでは、この方法では見つけることのできない非劣解も見つけることができる。

この非劣解集合から、始点から終点までの移動に必要な経路の第一の費用と第二の費用のトレードオフを観察することができる。例えば、始点から終点までの移動にかけてよい第一の費用に上限があるとする。この上限よりも小さい第一の費用をもつ経路は、縦軸の値がこの上限よりも小さい非劣解に対応する。逆に、ある値よりも小さな第一の費用をもつ経路は、横軸の値がこの値よりも小さい非劣解に対応する。

実際の航海をモデル化した場合は、枝の費用の値はこの例ほど互いに異なることはない。したがって、非劣解の数はより少なくなると考えられる。

5. まとめ

本稿では、二目的最短路問題の非劣解を列举する方法を、既存研究¹⁾³⁾に基づいて解説した。二目的最短路問題は、船舶の運航において航行時間と航行コストを同時に考慮するための有効なモデルである。一般には二目的最短路の非劣解の列举は大変な計算量を必要とするが、船舶の運航モデルで用いるような小規模な問題では、適切な方法を用いることにより、現実的な時間で実行することができる。

参考文献

- 1) J.M. Coutinho-Rodrigues, J.C.N. Climaco and J.R. Current : An interactive bi-objective shortest path approach: searching for unsupported nondominated solutions, Computers & Operations Research, 26(1999), pp.789-798
- 2) D. Eppstein : Finding the k shortest paths, Technical Report 94-26, Univ. of California,

Irvine, Dept. of Information and Computer Science(1994),

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/pubs/Epp-T R-94-26.pdf>

- 3) A. Raith and M. Ehrgott : A comparison of solution strategies for biobjective shortest path problems, Report, University of Auckland, School of Engineering 648 (2007)
- 4) 繁野麻衣子 : ネットワーク最適化とアルゴリズム、朝倉書店、第一版、2010