カーテンウォール型防波堤周りの波浪場計算プログラム

大松　重雄*

Calculation Program of Wave Field around the Curtain-Wall type Breakwater

by

Shigeo OHMATSU

Abstract

This paper deals with a new calculation method of wave field around breakwaters. The breakwater is supposed to be thin like a board and the water depth is assumed to be constant in this paper. The velocity potential of wave field is represented by eigen-function expansion and the orthogonality of these eigen-function is effectively used for solving the velocity potential. The developed computer program calculates wave field due to the regular incident wave of given direction and wave period. It can be applied for curtain-wall type breakwater and the combination with any other ordinary breakwater. It can also calculate steady wave drift force acting breakwaters by the far field wave estimation method. This computer program can be used easily for the design of the breakwater arrangement at early design stage.

＊　企画部
原稿受付　平成 28 年 1 月 14 日
審 査 日　平成 28 年 2 月 29 日

目　次

1. まえがき ····· 68
2. 防波堤周りの流場の解法 ····· 69
　2.1 カーテンウォール型防波堤周りの流場の表現 ····· 69
　2.2 流場の解法 ····· 70
3. プログラムの概要と計算例 ····· 73
参考文献 ····· 73
付録 1　固有関数の積分 ····· 75
付録 2　核関数の特異性とその処理 ····· 76

記　号

a　：入射波の片振幅　　ω　：波の周波数

$L,\ d$　：防波堤の長さと喫水

h　：水深（一定とする）

D　：水深影響係数　$D \equiv 2k_0 \int_{-h}^{0} \left\{ \dfrac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \right\}^2 dz$

$k_0\ ,\ k_m$　：有限水深波の進行波の波数と局所波の波数　$\dfrac{\omega^2}{g} h = k_0 h \tanh k_0 h = -k_m h \tan k_m h$

$H_0^{(1)}(z), K_0(z)$　：第 1 種 Hankel 関数，第 1 種変形 Bessel 関数

$\eta(x, y)$　：波高分布

$\Phi_0(x, y, z),\ \Phi_d(x, y, z)$　：入射波の速度ポテンシャル，　Diffraction 速度ポテンシャル

$H_d(\theta)$　：Diffraction 速度ポテンシャルの Kochin 関数

$F_x\ ,\ F_y$　：定常波漂流力

波浪場は全て周期的とし，時間項は $e^{-i\omega t}$ とする

座標系は静止水面に原点をおく直交座標とし，鉛直上向きを z 軸の正方向とする

1.　まえがき

沿岸域に防波堤が設置された場合の波浪場を簡便に求めるプログラムを開発した．防波堤の設計においては，その配置により，いかに波浪の静穏域が得られるか，異常に波浪の高くなる海域は出現しないかを確認しておくことが重要であろう．そのためには，できるだけ自由度のある配置で，波浪場を簡便に計算できるツールの開発が望まれる．著者は以前に直立壁を有する防波堤周りの波浪場の計算法を示したが[1)]，本プログラムでは防波堤は板状に薄いと仮定する．また，カーテンウォール型防波堤のように，水面からある喫水までの防波堤にも適用できる汎用性を有するものとした．ただし水深は一定，波は単一周期の規則波とする．また遠場の波浪を見積もることにより，防波堤全体に働く定常漂流力も算定可能とした．

2.　防波堤周りの流場の解法

ここではまず，防波堤が薄い場合の流場の表現法について述べ，次にその流場の解法及び得られた流場から定常漂流力を求める方法を述べる．水深は一定と仮定しているので，固有関数展開法による速度ポテンシャルの表現が可能である．この固有関数の直交性を利用することにより，効率よく流場が計算される．

2.1　カーテンウォール型防波堤周りの流場の表現

図 2.1 のように，θ 方向からの入射波の速度ポテンシャルは以下のように表される．

$$\Phi_0(x,y,z) = Q(x,y)\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \tag{2.1}$$

ここで

$$Q(x,y) \equiv -i\frac{ga}{\omega}e^{-ik_0(x\cos\theta + y\sin\theta)} \tag{2.2}$$

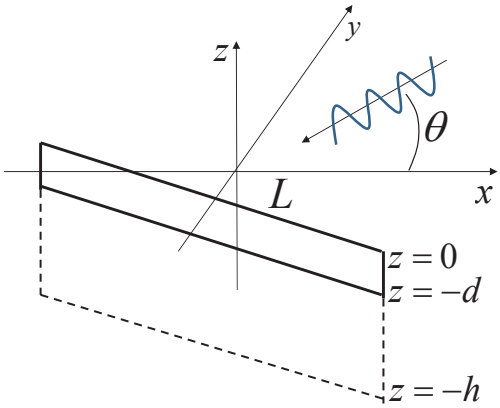

図 2.1　座標系

また，この入射波が防波堤によって攪乱された流場を表す diffraction 速度ポテンシャルを以下のように表現する．

$$\Phi_d(x,y,z) = f_0(x,y)\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} + \sum_m f_m(x,y)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{2.3}$$

(2.1)(2.2)式で表される入射波の速度ポテンシャルは流体の連続の条件，自由表面での条件及び水底での条件を満足している．また，(2.3)式で表される diffraction の速度ポテンシャルは，自由表面での条件及び水底での条件を満足している．さらにこれが連続の式を満足するためには，係数関数 $f_0(x,y)$, $f_m(x,y)$ は以下の Helmholtz の方程式を満足していなければならない．これは(2.3)式を連続の式に代入することにより容易に確かめられる．

$$\frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial y^2} + {k_0}^2 f_0(x,y) = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 f_m(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_m(x,y)}{\partial y^2} - {k_m}^2 f_m(x,y) = 0 \tag{2.5}$$

これらを満足する関数は，Green の定理により，境界 C 上におけるそれらの値と，C に対するそれらの法線微分値を用いて次のように表すことができる．

$$f_0(x,y) = -\frac{1}{2}\int_C \left\{ f_0(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(-\frac{iH_0^{(1)}(k_0 r)}{2}\right) - \left(-\frac{iH_0^{(1)}(k_0 r)}{2}\right)\frac{\partial f_0(\xi,\eta)}{\partial \nu}\right\} dl(\xi,\eta) \tag{2.6}$$

$$f_m(x,y) = -\frac{1}{2}\int_C \left\{ f_m(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial \nu}\left(-\frac{K_0(k_m r)}{\pi}\right) - \left(-\frac{K_0(k_m r)}{\pi}\right)\frac{\partial f_m(\xi,\eta)}{\partial \nu}\right\} dl(\xi,\eta) \tag{2.7}$$

ここで $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

さてここで，構造物が図 2.2 の(a)から(b)ように，
薄くなった場合の表現を考える．
この場合，(2.7)式は

$$f_0(x,y) = -\frac{1}{2}\int_{C^+}\left\{\begin{array}{l} f_0{}^+\dfrac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\dfrac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right) \\ -\left(-\dfrac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right)\dfrac{\partial f_0{}^+(\xi,\eta)}{\partial\nu^+}\end{array}\right\}dl$$

$$-\frac{1}{2}\int_{C^-}\left\{\begin{array}{l} f_0{}^-\dfrac{\partial}{\partial\nu^-}\left(-\dfrac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right) \\ -\left(-\dfrac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right)\dfrac{\partial f_0{}^-(\xi,\eta)}{\partial\nu^-}\end{array}\right\}dl$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{C^+}(f_0{}^+ - f_0{}^-)\frac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\frac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right)dl$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\int_{C^+} f_0{}^*(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\frac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right)dl(\xi,\eta)$$

(2.8)

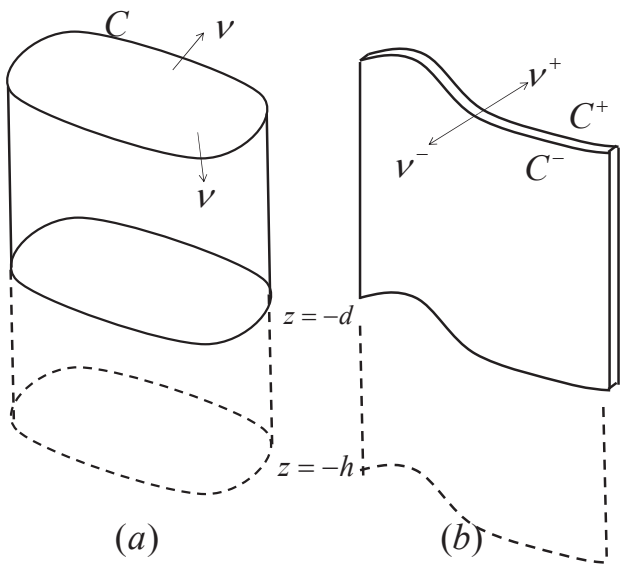

図 2.2　薄い防波堤

と表せるだろう．ここで $\dfrac{\partial f_0{}^+}{\partial\nu^+} = -\dfrac{\partial f_0{}^-}{\partial\nu^-}$ を考慮した．また $(f_0{}^+ - f_0{}^-) \equiv f_0{}^*$ と置いた．

同様にして

$$f_m(x,y) = -\frac{1}{2}\int_{C^+} f_m{}^*(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\frac{K_0(k_mr)}{\pi}\right)dl(\xi,\eta) \tag{2.9}$$

と表される．以下では C^+ を単に C と書くことにする．

こうして，防波堤線上の $f_0{}^*(\xi,\eta), f_m{}^*(\xi,\eta)$ が求められたら，(2.8)(2.9)により $f_0(x,y), f_m(x,y)$ すなわち波浪場が確定することになる．なお，点 (x,y) が防波堤上の点 (ξ_0,η_0) の場合は(2.8)(2.9)式は Green 関数の特異性により以下のようになる．

$$f_0{}^\pm(\xi_0,\eta_0) = \pm f_0{}^*(\xi_0,\eta_0) - \frac{1}{2}\int_C f_0{}^*(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\frac{iH_0{}^{(1)}(k_0r)}{2}\right)dl(\xi,\eta) \tag{2.8'}$$

$$f_m{}^\pm(\xi_0,\eta_0) = \pm f_m{}^*(\xi_0,\eta_0) - \frac{1}{2}\int_C f_m{}^*(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\nu^+}\left(-\frac{K_0(k_mr)}{\pi}\right)dl(\xi,\eta) \tag{2.9'}$$

(2.8)(2.9)式と(2.3)式により diffraction 速度ポテンシャルが表現されるのであるが，その際，固有関数の個数 m をどこまでとるかは水深と波長を考慮して，適当なところで打ち切るのであるが，その個数を以下では M とする．

2.2　流場の解法

前節で示した diffraction 速度ポテンシャルは連続の条件，自由表面条件，水底の条件を満足しているものである．この速度ポテンシャルはさらに，防波堤壁面での境界条件を満足しなければならない．この条件を満足させることで解が確定することになるのである．その方法を以下に述べる．

防波堤壁面での境界条件は以下のように与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\Phi_0(\xi_0,\eta_0,z)+\Phi_d(\xi_0,\eta_0,z)\right]=0 \qquad on\ C \tag{2.10}$$

この式に(2.1)(2.3)式を代入すると以下のようになる．

$$\left[\frac{\partial f_0(\xi_0,\eta_0)}{\partial \nu}+\frac{\partial Q(\xi_0,\eta_0)}{\partial \nu}\right]\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_m \frac{\partial f_m(\xi_0,\eta_0)}{\partial \nu}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}=0 \quad on\ \ C \tag{2.11}$$

一方，図 2.2(b)の下部のように，壁がない部分では仮想的な壁の両面で速度ポテンシャルは連続でなければならないから，$\Phi_d{}^{+}=\Phi_d{}^{-}$すなわち

$$f_0{}^{+}\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_m f_m{}^{+}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}=f_0{}^{-}\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_m f_m{}^{-}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{2.12}$$

したがって，この条件は以下のように書ける．

$$f_0{}^{*}\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_m f_m{}^{*}\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}=0 \tag{2.13}$$

(2.11)(2.13)式が境界条件である．

さて，(2.11)式における係数関数の法線微分は(2.8)(2.9)式より

$$\frac{\partial f_0(\xi_0,\eta_0)}{\partial \nu}=-\frac{1}{2}\int_C f_0{}^{*}(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial \nu\,\partial \nu}\left(-\frac{iH_0{}^{(1)}(k_0 r)}{2}\right)dl(\xi,\eta) \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial f_m(\xi_0,\eta_0)}{\partial \nu}=-\frac{1}{2}\int_C f_m{}^{*}(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial \nu\,\partial \nu}\left(-\frac{K_0(k_m r)}{\pi}\right)dl(\xi,\eta) \tag{2.15}$$

である．(2.14)(2.15)式は積分を離散的に書くと以下のような形に表現することができる．

$$\frac{\partial f_0(i)}{\partial \nu}=\sum_j T_0(i,j)f_0{}^{*}(j) \quad , \qquad \frac{\partial f_m(i)}{\partial \nu}=\sum_j T_m(i,j)f_m{}^{*}(j) \tag{2.16}$$

ここでi, j は防波堤上の点を表すものとした．(2.16)式を(2.11)式に代入すると

$$\left[\sum_j T_0(i,j)f_0{}^{*}(j)+\frac{\partial Q(i)}{\partial \nu}\right]\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}+\sum_m\sum_j T_m(i,j)f_m{}^{*}(j)\frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}=0 \quad on\ \ C \tag{2.17}$$

となる．

この(2.17)式に固有関数 $\dfrac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$ ，$\dfrac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h}$ $(m=1,2,,,,M)$ を乗じて$\int_{-d}^{0} dz$ の積分を行う．

これにより，$i=1\sim N$, $m=0,\ 1\sim M$ すなわち$N\times(1+M)$ 個の条件式が得られる．

また，(2.13)にも同じく固有関数を乗じて$\int_{-h}^{-d} dz$ の積分を行うと，同じく$N\times(1+M)$ 個の条件式が得られる．

未知数の個数は$i=1\sim N$ における$f_0{}^{*}, f_m{}^{*}(m=1\sim M)$ すなわち$N\times(1+M)$ 個であるので，これを最小二乗法で解くことになる．その際，付録 1 に示す固有関数の直交性が利用される．また，(2.14)(2.15)式の積分の核関数は付録 2 に示すように 2 次の特異性を持つが，その発散積分は Hadamard の主値をとることで処理される．

波浪場は

$$\eta(x,y)e^{-i\omega t} = -\frac{1}{g}\frac{\partial\left(\Phi_0(x,y)+\Phi_d(x,y)\right)e^{-i\omega t}}{\partial t}\bigg|_{z=0} = \frac{i\omega}{g}\left[Q(x,y)+f_0(x,y)+\sum_{m=1}^{M} f_m(x,y)\right]e^{-i\omega t} \tag{2.18}$$

であるので，求められた $f_0^*(i), f_m^*(i)$ を(2.8)(2.9)式に代入して $f_0(x,y), f_m(x,y)$ を計算すればよい.

Diffraction 問題の Kochin 関数は以下のようにして求められる．入射波及び diffraction 速度ポテンシャルを

$$\Phi_0(x,y,z) \equiv \frac{-iga}{\omega}\phi_0(x,y,z) \tag{2.19}$$

$$\Phi_d(x,y,z) \equiv \frac{-iga}{\omega}\phi_d(x,y,z) \tag{2.20}$$

と書くことにすると，（以下では入射波振幅 $a=1$ とする）

$$\phi_0(x,y,z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}e^{-ik_0(x\cos\theta+y\sin\theta)} \tag{2.21}$$

$$\phi_d(x,y,z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}\frac{i\omega}{g}f_0(x,y) \tag{2.22}$$

である.（ここで(2.22)式において， $f_m(x,y)$ の項は遠方には伝播しない項であるので省略した.）

この ϕ_0 , ϕ_d を用いて，Kochin 関数が以下のように求められる.

$$H_d(\theta) = \frac{1}{D}\iint_C\left\{\frac{\partial\phi_d}{\partial\nu} - \phi_d\frac{\partial}{\partial\nu}\right\}\phi_0(\theta+\pi)\,dS \tag{2.23}$$

そこで，(2.23)式に(2.21)(2.22)式を代入すると

$$\begin{aligned} H_d(\theta) &= \frac{1}{D}\int_{-h}^{0}\left\{\frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}\right\}^2 dz\cdot\frac{i\omega}{g}\iint_C\left\{\frac{\partial f_0}{\partial\nu} - f_0\frac{\partial}{\partial\nu}\right\}e^{ik_0(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,dS \\ &= \frac{-i\omega}{2k_0 g}\int_C f_0^*(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu}e^{ik_0(x\cos\theta+y\sin\theta)}\,dl \end{aligned} \tag{2.24}$$

これが本論の場合の Kochin 関数の計算式である．すなわち， $f_0^*(i)$ が求められたら(2.24)式で簡単に Kochin 関数が計算される．Kochin 関数が求められると，遠方における波浪場が

$$\eta(R,\theta) = -ia\sqrt{\frac{k_0}{2\pi R}}e^{ik_0R-i\frac{\pi}{4}}H_d(\theta) \qquad ここで R=\sqrt{x^2+y^2} \tag{2.25}$$

により求められる.

防波堤全体に働く定常波漂流力が

$$F_x = \frac{\rho g k_0 a^2}{8\pi}\left\{1+\frac{2k_0 h}{\sinh 2k_0 h}\right\}\int_0^{2\pi}(\cos\beta+\cos\theta)\left|H_d(\theta)\right|^2 d\theta \tag{2.26}$$

$$F_y = \frac{\rho g k_0 a^2}{8\pi}\left\{1+\frac{2k_0 h}{\sinh 2k_0 h}\right\}\int_0^{2\pi}(\sin\beta+\sin\theta)\left|H_d(\theta)\right|^2 d\theta \tag{2.27}$$

により求められる．ただしここで β は入射波の進行方向である．文献 2）の(4.56)(4.81)(4.88)式参照.

3.　プログラムの概要と計算例

本プログラムでは防波堤は直線で近似し，直線の防波堤が複数，任意の位置に配置された場合の波浪場が計算できるようにした．プログラムの入力は防波堤の本数，各防波堤の諸元，入射波の周波数，方向，波浪場を計算する領域とメッシュの指定などである．入力すべき防波堤の諸元を図 3.1 に示す.

すなわち，防波堤の端点の座標 (x_0, y_0)，向き α，長さ L 及び喫水 d_1, d_2 である．この d_1, d_2 を適当にとることにより，図のような中抜けの防波堤や，上部あるいは下部 1 枚だけの防波堤，水面から海底まで 1 枚の通常の防波堤が表現される．これら，諸元の違う防波堤を任意の位置に複数配置することができる.

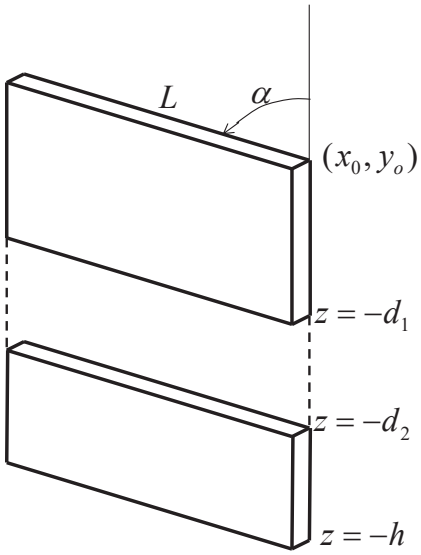

図 3.1　防波堤の諸元

本プログラムの使用環境と使用法を以下に略記する.

OS: Windows ，　同一フォルダに実行ファイルと，上記の防波堤の諸元や配置，波浪場を計算する範囲，メッシュを指定するテキストベースの入力データファイルを置き，実行すると各メッシュ毎の波高等の出力データファイルが生成される．計算時間は波浪場を計算する範囲とメッシュ数によるが，次ページの例で 30 秒程度である.

次ページに, ハの字型に防波堤を 3 本配置した場合の波浪場の計算結果を示す. 水深 20m, 入射波の周期 4 秒, 波向き右上 45 度方向から入射，中央の防波堤は喫水 5m のカーテンウォール，左右の防波堤は通常の直立壁の場合の計算結果である．図 3.2 が波高（絶対値）分布，図 3.3 がある時刻の波高の瞬時値分布である．図の横軸・縦軸の目盛は単位mで，凡例の値は入射波の片振幅 1 に対する値である．このように，防波堤周囲の波浪場の様子を概観することができる．また必要に応じて，各メッシュで得られた波高を平均して静穏度を数値化することもできる.

今後は防波堤の反射率が全反射でない場合にも適用できるように拡張を図りたい.

参考文献

1）　大松重雄 : 任意の反射率を有する防波堤による回折波浪場の新しい計算法，第 73 回船舶技術研究所研究発表会講演集（1999）

2）　大松重雄 : 浮体による波エネルギー吸収理論概説，海上技術安全研究所報告第 13 巻第 1 号（2013）

3）　M.Abramowitz and I.A.Stegun, Handbook of Mathematical Functions , Dover　Publications (1970)

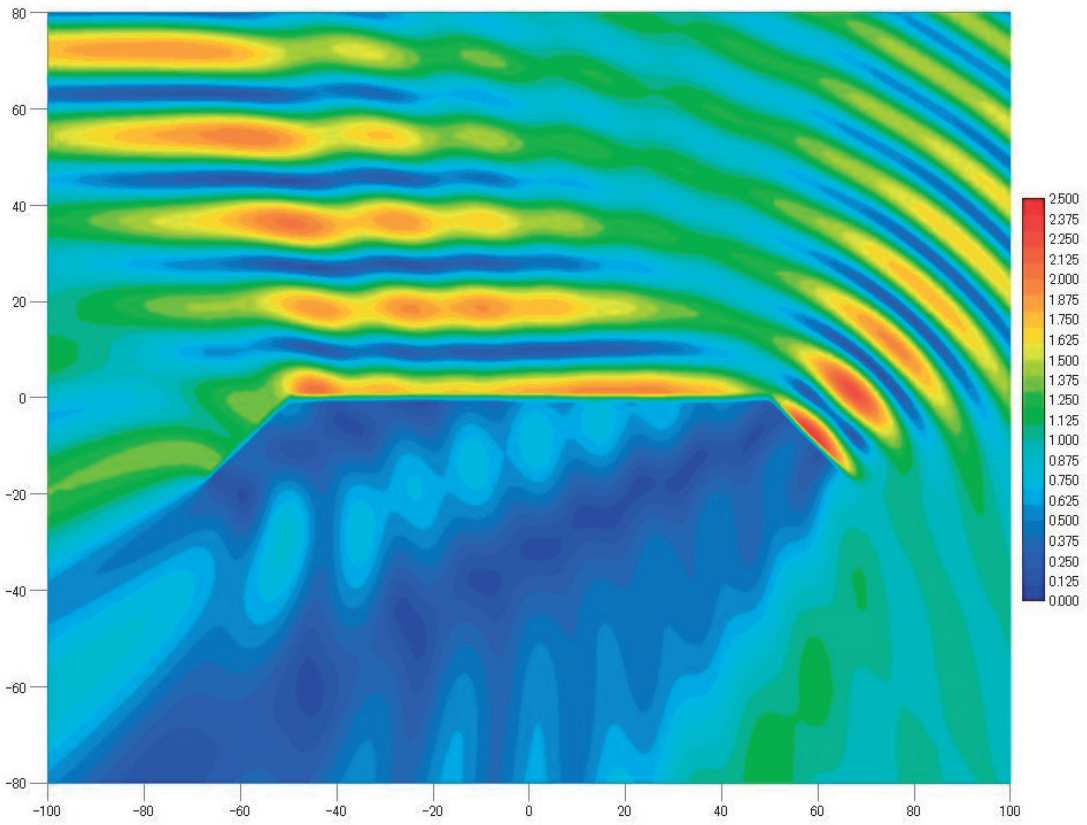

図 3.2　波高の絶対値分布

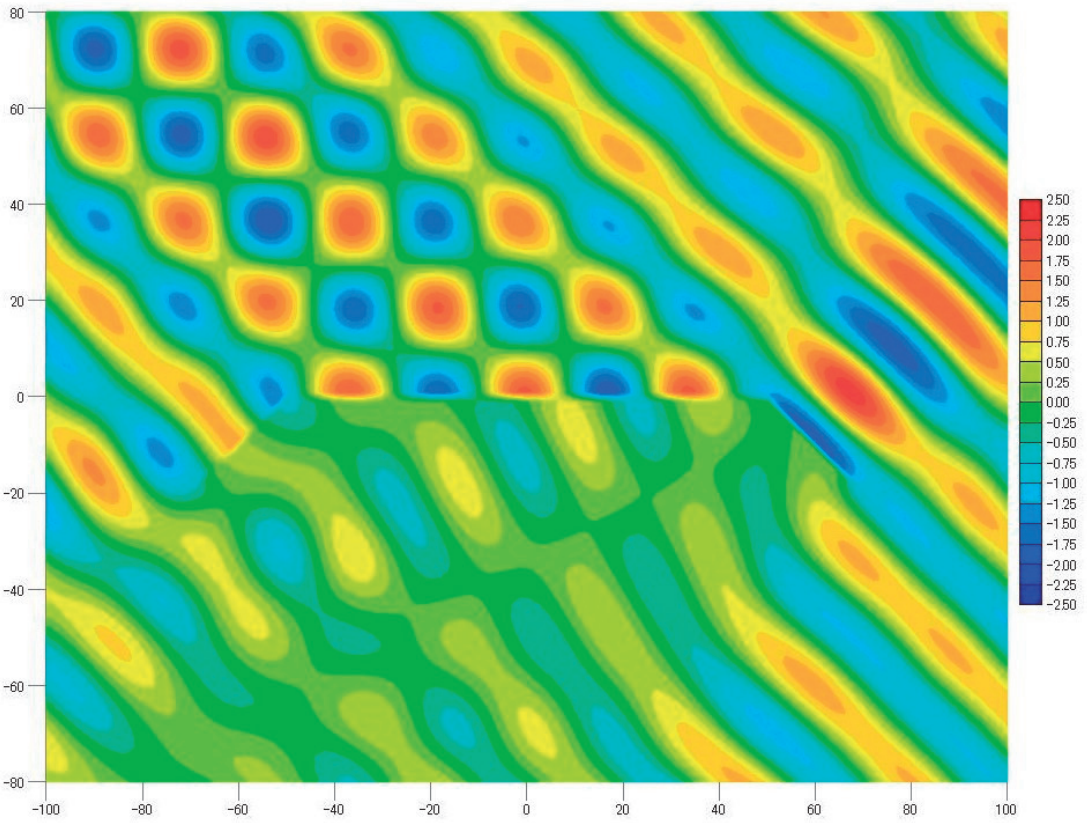

図 3.3　波高の瞬時値分布

付録 1　固有関数の積分

固有関数を

$$g_0(z) \equiv \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad , \quad g_n(z) \equiv \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \tag{a1.1}$$

と表すことにする．これらの関数は以下のような直交性を有する．

$$\int_{-h}^{0} g_0(z)\cdot g_0(z)\,dz = \frac{1}{2k_0\cosh^2 k_0 h}\left[\sinh k_0 h\cdot\cosh k_0 h + k_0 h\right] \tag{a1.2}$$

$$\int_{-h}^{0} g_n(z)\cdot g_n(z)\,dz = \frac{1}{2k_n\cos^2 k_n h}\left[\sin k_n h\cdot\cos k_n h + k_n h\right] \tag{a1.3}$$

$$\int_{-h}^{0} g_0(z)\cdot g_n(z)\,dz = 0 \tag{a1.4}$$

$$\int_{-h}^{0} g_m(z)\cdot g_n(z)\,dz = 0 \qquad (m \neq n) \tag{a1.5}$$

$z=-d$ ～ 0 の積分は以下のようになる．

$$\int_{-d}^{0} g_0(z)\cdot g_0(z)\,dz = \frac{1}{2k_0\cosh^2 k_0 h}\begin{bmatrix}\sinh k_0 h\cdot\cosh k_0 h + k_0 h \\ -\sinh k_0(h-d)\cdot\cosh k_0(h-d) - k_0(h-d)\end{bmatrix} \tag{a1.6}$$

$$\int_{-d}^{0} g_n(z)\cdot g_n(z)\,dz = \frac{1}{2k_n\cos^2 k_n h}\begin{bmatrix}\sin k_n h\cdot\cos k_n h + k_n h \\ -\sin k_n(h-d)\cdot\cos k_n(h-d) - k_n(h-d)\end{bmatrix} \tag{a1.7}$$

$$\begin{aligned}\int_{-d}^{0} g_0(z)\cdot g_n(z)\,dz &= \frac{1}{\cosh k_0 h\cdot\cos k_n h\cdot(k_0{}^2 + k_n{}^2)} \\ &\times\begin{bmatrix}k_0\sinh k_0 h\cdot\cos k_n h + k_n\cosh k_0 h\cdot\sin k_n h \\ -k_0\sinh k_0(h-d)\cdot\cos k_n(h-d) - k_n\cosh k_0(h-d)\cdot\sin k_n(h-d)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{a1.8}$$

$$\begin{aligned}\int_{-d}^{0} g_m(z)\cdot g_n(z)\,dz &= \frac{1}{\cos k_m h\cdot\cos k_n h\cdot(k_m{}^2 - k_n{}^2)} \\ &\times\begin{bmatrix}k_m\sin k_m h\cdot\cos k_n h - k_n\cos k_m h\cdot\sin k_n h \\ -k_m\sin k_m(h-d)\cdot\cos k_n(h-d) + k_n\cos k_m(h-d)\cdot\sin k_n(h-d)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{a1.9}$$

$z=-h$ ～ $-d$ の積分は，$z=-h$ ～ 0 の積分から $z=-d$ ～0 の積分を差し引けばよい．

付録2　核関数の特異性とその処理[3)]

本文(2.14) 式の右辺の積分において，以下のような項が現れる．

$$\int_C f_0^*(\xi)\left[\frac{-i}{2}H_1^{(1)}(k_0|x-\xi|)\cdot\frac{k_0}{|x-\xi|}\right]d\xi \tag{a2.1}$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}
&H_1^{(1)}(z)=J_1(z)+iY_1(z)\\
&J_1(z)=\frac{z}{2}-\frac{z^3}{16}+\cdots\\
&Y_1(z)=-\frac{2}{\pi z}+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{z}{2}-\frac{z^3}{16}+\cdots\right]-\frac{z}{2\pi}\left[(-2\gamma+1)+(-2\gamma+\frac{5}{2})(-\frac{z^2}{8})+\cdots\right]
\end{aligned}\right\} \tag{a2.2}$$

より，

$$\left.\begin{aligned}
\frac{-i}{2}H_1^{(1)}(z)&=\frac{-i}{2}J_1(z)+\frac{1}{2}Y_1(z)\\
&=i\left[-\frac{z}{4}+\frac{z^3}{32}-\cdots\right]\\
&\quad-\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{z}{2}-\frac{z^3}{16}+\cdots\right]-\frac{z}{4\pi}\left[(-2\gamma+1)+(-2\gamma+\frac{5}{2})(-\frac{z^2}{8})+\cdots\right]
\end{aligned}\right\} \tag{a2.3}$$

である．本文(2.15) 式の右辺の積分においても同様に，以下のような項が現れる．

$$\int_C f_m^*(\xi)\left[\frac{-1}{\pi}K_1(k_m|x-\xi|)\cdot\frac{k_m}{|x-\xi|}\right]d\xi \tag{a2.4}$$

ここで，

$$K_1(z)=\frac{1}{z}+\ln\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{z}{2}+\frac{z^3}{16}+\cdots\right]-\frac{z}{4}\left[(-2\gamma+1)+(-2\gamma+\frac{5}{2})(\frac{z^2}{8})+\cdots\right] \tag{a2.5}$$

より，

$$\frac{-1}{\pi}K_1(z)=-\frac{1}{\pi z}-\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\left[\frac{z}{2}+\frac{z^3}{16}+\cdots\right]+\frac{z}{4\pi}\left[(-2\gamma+1)+(-2\gamma+\frac{5}{2})(\frac{z^2}{8})+\cdots\right] \tag{a2.6}$$

である．

したがって，いずれにおいても $-\dfrac{1}{\pi k|x-\xi|}\cdot\dfrac{k}{|x-\xi|}=-\dfrac{1}{\pi|x-\xi|^2}$ のような2次の特異性があることがわかる．その発散積分は以下のように Hadamard の有限部分をとることにより処理される．すなわち，

$$f(x)=\frac{c_0}{x-a}+\sum_{r=1}\frac{c_r}{(x-a)^{\lambda_r}} \tag{a2.7}$$

であるとき，発散積分の有限部分は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right]=c_0\ln(b-a)-\sum_{r=1}\frac{c_r}{\lambda_r-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_r-1} \tag{a2.8}$$

により求められる．