周波数無限大における 2 次元浮体の付加質量の解析解について

大松　重雄*

On the Analytical Solutions of Added Mass of the Two-dimensional Floating Bodies in a Limit of High Frequency

by

Shigeo OHMATSU

Abstract

This paper deals with the added mass of the two-dimensional floating bodies oscillating at high frequency in a free surface. The added mass at high frequency plays important role for the analysis of ship vibration problem and the estimation of slamming impact loads.

The analytical solutions of added mass at high frequency limit have been known by several authors. Recently the author introduced approximate solutions for the inclined ship body.

Therefore, the purpose of this paper is to present a unified treatment of the added mass for either upright condition or inclined condition for horizontal, vertical and rotational oscillations at high frequency limit.

＊　企画部

原稿受付　平成 29 年 10 月 26 日
審 査 日　平成 29 年 11 月 29 日

目　次

記　号

a_n ：写像関数のパラメータ

b ：浮体の半幅

d ：浮体の喫水

G ：自由表面グリーン関数

G^{∞} ：周波数無限大のときの自由表面グリーン関数

H_0 ：浮体の半幅喫水比　$H_0 = b/d$

i , j ：動揺のモード　$i=1$ $sway$, $i=2$ $heave$, $i=3$ $roll$

K ：動揺の波数　$K=\omega^2/g$

m_{ij} ：付加質量あるいは付加慣性モーメント

n_i ：浮体断面の法線ベクトルの i モード成分

M ：写像関数のパラメータ（縮率）

S ：浮体の断面積

α ：浮体の傾斜角

ϕ ：速度ポテンシャル

ψ ：流れ関数

ρ ：流体の密度

σ ：浮体断面の面積比　$\sigma = S/(2bd)$

ω ：動揺の周波数

なお，本論で扱う流体領域の水深は無限水深とする．

1.　まえがき

本論文の主題は周波数無限大における 2 次元浮体の付加質量及び付加慣性モーメント（以降，単に付加質量と呼ぶ）を可能な限り解析的に求めることである．周波数無限大における付加質量は船体振動問題の解析やスラミング時の衝撃力の推定などで重要な役割を果たす．Lewis Form と呼ばれる 2 次元浮体の sway, heave, roll の付加質量については，すでに 1920 年代から 1950 年代にかけて，Lewis[1), Landweber & Macagno[2)，熊井[3) らによって，解析解が求められている．

当時，周波数無限大での付加質量を求めることに多大な努力が傾注されたのは，任意の有限の周波数における付加質量を数値計算で求めることが困難であったからである．そのために，周波数無限大やあるいは逆に周波数 0 の極限状態の付加質量を求めて状況に応じて代用したのである．しかし，計算機の発達した現在においては，任意形状浮体の，任意の周波数における付加質量を境界要素法で比較的簡単に求めることができる．それでも解析的手法にこだわるのは，解が簡便に求められるからというだけではなく，解析的手法による方が定性的傾向を把握しやすいからである. また, 数値的手法はその計算プログラムに誤りがあったときに発見が困難であるので，解析解との比較は有益である．

このたび著者は傾斜した Lewis Form の付加質量に関しても近似解を求めた.

本論文では，既存の手法の解説という意味も含めて改めて整理し，Lewis Form 浮体について，連成項を含む全ての付加質量の解析解を統一的に導く．そしてその結果が数値解とよく一致することを示す．また，解析の途中で周波数 0 における sway の付加質量が出て来るので，roll, sway-roll 連成項の結果も含めて，周波数 0 における付加質量の解析解も付録に紹介しておく．

2.　解析解法と数値解法の考え方

図 1 のように，水面に浮かぶ浮体が周波数ωで動揺しているときの付加質量は，流体領域の境界値問題を満足する速度ポテンシャル$\phi(x,y)e^{i\omega t}$より求められる. その際の自由表面における境界条件は下記のように与えられる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-K\phi=0 \quad on \quad y=0 \tag{2.1}$$

ここで　$K\equiv\dfrac{\omega^2}{g}$

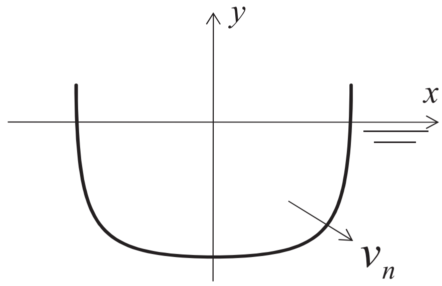

図 1　浮体と座標

この境界条件は，周波数が無限大，すなわち$K\to\infty$のときは

$$\phi=0 \qquad on \quad y=0 \tag{2.2}$$

となる．そこで，周波数無限大における付加質量を求めるために以下のような手順をとる．

1．浮体形状を図 2 のように，水面上にx軸に対して対称な鏡像をとり，
2．この浮体が無限流体中でx軸に対して反対称な運動をすると考える．そうすると流れ場はx軸に対して反対称となり，(2.2)式の条件が満足される．
3．そこでこの場合の速度ポテンシャルを求め，それより得られた付加質量の 1/2 が求めるものである．

速度ポテンシャルを求める際には図 2 の浮体を単位円に写像する等角写像を利用する．

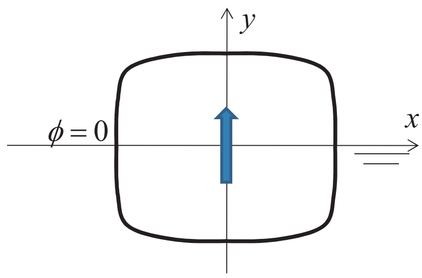

図 2　　2 重鏡像浮体

これが解析解を求めるための基本的な流れである．

一方，数値解法では一般に境界要素法を採用する．通常の周波数領域においては(2.1)式の自由表面条件を満足するグリーン関数

$$G(x,y;x',y') = -\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + \ln\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2} + 2\,v.p.\int_0^\infty \frac{e^{k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K}dk - i\,2\pi\, e^{K(y+y')}\cos K(x-x') \tag{2.3}$$

を使って，積分方程式

$$\frac{1}{2}\phi(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_C \phi(x',y')\frac{\partial G(x,y;x',y')}{\partial n(x',y')}dl(x',y') = \frac{1}{2\pi}\int_C v_n(x',y')G(x,y;x',y')dl(x',y') \tag{2.4}$$

により，速度ポテンシャル $\phi(x,y)$ が求められる．ここで右辺の $v_n(x',y')$ は以下のように，各動揺モード毎の物体表面の境界条件により与えられるものである．

$$v_n(x',y') = \frac{\partial \phi_i(x',y')}{\partial n} = n_i(x',y') \tag{2.5}$$

ここで i は動揺のモードを表し，$i=1$ *sway*，$i=2$ *heave*，$i=3$ *roll* とする．また $n_i(x',y')$ は各モードの運動による単位法線速度である．

$$n_1 = n_x \quad , \qquad n_2 = n_y \quad , \qquad n_3 = x'n_y - y'n_x \tag{2.6}$$

周波数無限大の場合は $K \to \infty$ であるから，グリーン関数が(2.3)式右辺の第 1，2 項のみとなり，

$$G^\infty(x,y;x',y') = -\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} + \ln\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2} \tag{2.7}$$

で与えられる．このグリーン関数は実数であり，これを(2.4)式に適用して求められる速度ポテンシャルも実数となる．

速度ポテンシャルが求められたら，付加質量は次式により求められる．

$$m_{ij} = -\rho\int_C \phi_i(x',y')\,n_j(x',y')\ dl(x',y') \tag{2.8}$$

3.　Lewis Form 浮体に対する解析解

3.1 解析解の導出

前章で述べたように，図 3 のような z 平面の鏡像浮体を ζ 平面の円に写像することを考える．

このときの写像関数は一般に

$$z = M\left\{\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \cdots\right\} \tag{3.1}$$

と表される．ここで M は縮率で実数，また鏡像浮体の場合は係数 a_n も実数である．

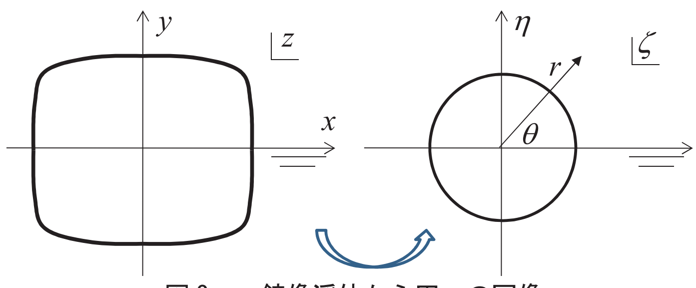

図 3　　鏡像浮体から円への写像

$z = x + iy$ ，　$\zeta = re^{i\theta}$ を(3.1)に代入すると $r = 1$ の場合

$$
\begin{aligned}
x &= M\{(1+a_1)\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + \cdots\} \\
y &= M\{(1-a_1)\sin\theta - a_2\sin 2\theta - a_3\sin 3\theta + \cdots\}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

である．この場合，鏡像浮体の面積は

$$
2S = \oint x\,dy = \int_0^{2\pi} x\,(dy/d\theta)\cdot d\theta \tag{3.3}
$$

より，(3.2)を代入して

$$
\begin{aligned}
2S &= M^2\int_0^{2\pi}[(1+a_1)\cos\theta + a_2\cos 2\theta + \cdots][(1-a_1)\cos\theta - 2a_2\cos 2\theta - \cdots]d\theta \\
&= M^2\pi\left[1 - a_1{}^2 - 2a_2{}^2 - 3a_3{}^2 - \cdot\cdot\right]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

すなわち浮体の面積は

$$
S = M^2\frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1} n a_n{}^2\right] \tag{3.5}
$$

で与えられる．

もし浮体が左右対称であるならば，$a_2 = a_4 = \cdots = 0$ でなければならない．こうして a_3 までを採用したのがいわゆる Lewis Form である．

z 平面における複素速度ポテンシャルは ζ 平面においては

$$
w(z) = \phi + i\psi = \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \cdots \tag{3.6}
$$

という形で表現されるであろう．単位円上の値は $r = 1$ により

$$
\begin{aligned}
&\phi + i\psi = \sum_{n=1} b_n e^{-in\theta} \\
&\therefore\ \ \phi = \sum_{n=1}\left\{b_n{}^r\cos n\theta + b_n{}^i\sin n\theta\right\} \\
&\qquad \psi = \sum_{n=1}\left\{b_n{}^i\cos n\theta - b_n{}^r\sin n\theta\right\}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

と表される．いま，上下対称浮体の，上下反対称運動を考えると，$y = 0$ で $\phi = 0$，つまり ϕ は y 軸に対して反対称であり，$b_n{}^r = 0$ でなければならない．したがって，

$$
\phi = \sum_{n=1}\left\{b_n{}^i\sin n\theta\right\}\ ,\qquad \psi = \sum_{n=1}\left\{b_n{}^i\cos n\theta\right\} \tag{3.8}
$$

と表される．以降，$b_n{}^i$ を改めて c_n と書こう．

無限流体中における物体の運動による付加質量は

$$
m_{ij} = -\rho\oint\phi_i\cdot n_j\ dl = -\rho\oint\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\ dl \tag{3.9}
$$

で与えられる．ここで ϕ_i は i モードの運動による単位速度ポテンシャルである．

2次元の場合は速度ポテンシャルと流れ関数に$\partial\phi/\partial n=\partial\psi/\partial s$の関係があるから，(3.8)(3.9)式より

$$m_{ij}=-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\phi_i(\theta)\frac{\partial\psi_j(\theta)}{\partial\theta}d\theta=-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}c_n{}^i\sin n\theta\times\sum_{n=1}c_n{}^j(-n)\sin n\theta\ d\theta$$
$$\therefore\quad m_{ij}=\frac{\rho\pi}{2}\sum_{n=1}n\,c_n{}^i\cdot c_n{}^j \tag{3.10}$$

ここで$1/2$を乗じたのは実際の流体領域は鏡像領域の半分だからである．こうして付加質量が求められる．

以下，具体的にLewis Form浮体の付加質量を求めてみよう．

まず，簡単のため$i=j=2$すなわちheaveの場合の付加質量を求める．

この場合，浮体が図4のように単位速度で運動するとする．この場合の物体表面での境界条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial y}{\partial n} \tag{3.11}$$

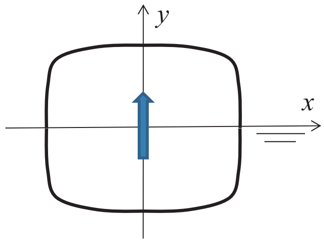

図4　heaveモード

である．この条件は$\partial\phi/\partial n=\partial\psi/\partial s$及び$\partial y/\partial n=-\partial x/\partial s$により

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=-\frac{\partial x}{\partial s}\ ,\qquad\therefore\psi=-x \tag{3.12}$$

と書ける．したがって，(3.2)(3.8)(3.12)式より

$$\psi=\sum_{n=1}\{c_n\cos n\theta\}=-x=-M\{(1+a_1)\cos\theta+a_3\cos 3\theta\}$$
$$\therefore\ c_1=-M(1+a_1)\ ,\quad c_3=-Ma_3\qquad 他の\ c_n=0 \tag{3.13}$$

ゆえに，(3.13)を(3.10)式に代入することによりheaveの付加質量が次のように得られる．

$$\boxed{m_{22}=\frac{\rho\pi}{2}M^2\left[(1+a_1)^2+3a_3{}^2\right]} \tag{3.14}$$

次にswayの付加質量を考える．この場合は図5(a)のような運動とすると上下対称の流場となり，(2.2)式の自由表面条件が満足されない．この場合の流れ場は周波数0すなわち$K=0$の場合の流場になるのであるが，この場合の付加質量については付録で述べる．

実際の運動としては考えにくいが，図5(b)のような運動とすると，上下反対称の流場となり，(2.2)式の自由表面条件が満足される．

この場合の物体表面での境界条件は

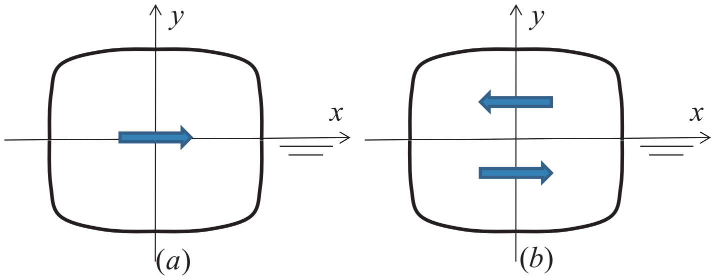

図5　swayモード

$$\left.\begin{array}{llll} y\ge 0 & \dfrac{\partial\phi}{\partial n}=-\dfrac{\partial x}{\partial n}\ , & \therefore\ \dfrac{\partial\psi}{\partial s}=-\dfrac{\partial y}{\partial s}\ , & \therefore\psi=-y \\ y\le 0 & \dfrac{\partial\phi}{\partial n}=\dfrac{\partial x}{\partial n}\ , & \therefore\ \dfrac{\partial\psi}{\partial s}=\dfrac{\partial y}{\partial s}\ , & \therefore\psi=y \end{array}\right\}\quad\therefore\ \psi=-|y| \tag{3.15}$$

である．したがって，(3.2)(3.8)(3.15)式より

$$\psi = \sum_{n=1} \{c_n \cos n\theta\} = -|y| = -M\left|(1-a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta\right|$$

$$\therefore\ c_n = -\frac{1}{\pi} M \int_0^{2\pi} \left|(1-a_1)\sin\theta - a_3\sin 3\theta\right| \cos n\theta\, d\theta \tag{3.16}$$

$$= -\frac{2}{\pi} M \int_0^{\pi} \{(1-a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta\} \cos n\theta\, d\theta$$

となる．ここで

$$\int_0^{\pi} \sin m\theta \cdot \cos n\theta\, d\theta = \begin{cases} 0 & ;\ m = n \\ 0 & ;\ m \pm n = even \\ \dfrac{2m}{m^2 - n^2} & ;\ m \pm n = odd \end{cases} \tag{3.17}$$

を考慮すると，

$$\begin{aligned} c_n &= 0 && n = odd \\ c_n &= -\frac{4M}{\pi}\left[(1-a_1)\frac{1}{1^2 - n^2} - a_3 \frac{3}{3^2 - n^2}\right] && n = even \end{aligned} \tag{3.18}$$

が得られる．したがって，

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{\rho\pi}{2}\sum_{n=1} n\, {c_n}^2 \\ &= \frac{\rho\pi}{2}\frac{16M^2}{\pi^2}\sum_{n=2,4,6\cdots}\left[(1-a_1)^2 \frac{n}{(1-n^2)^2} - 6(1-a_1)a_3 \frac{n}{(1-n^2)(3^2-n^2)} + 9{a_3}^2 \frac{n}{(3^2-n^2)^2}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

ここで，

$$\sum_{n=2,4,6\cdots} \frac{n}{(1-n^2)^2} = \sum_{n=2,4,6\cdots} \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} \\ \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \\ \frac{1}{5^2} - \cdots \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \tag{3.21a}$$

$$\sum_{n=2,4,6\cdots} \frac{n}{(1-n^2)(3^2-n^2)} = \sum_{n=2,4,6\cdots} -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+n)(3-n)} - \frac{1}{(1-n)(3+n)}\right] = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} + \cdots \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \tag{3.21b}$$

$$\sum_{n=2,4,6\cdots}\frac{n}{(3^2-n^2)^2}=\sum_{n=2,4,6\cdots}\frac{1}{12}\left[\frac{1}{(3-n)^2}-\frac{1}{(3+n)^2}\right]=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}\frac{1}{1}-\frac{1}{5^2}\\ \frac{1}{1}-\frac{1}{7^2}\\ \frac{1}{3^2}-\frac{1}{9^2}\\ \frac{1}{5^2}-\cdots\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\left[2+\frac{1}{9}\right]=\frac{1}{12}\cdot\frac{19}{9} \tag{3.21c}$$

を(3.20)に代入することにより，sway の付加質量が次のように得られる．

$$\boxed{m_{11}=\frac{2\rho}{3\pi}M^2\left[3(1-a_1)^2+6(1-a_1)a_3+19a_3{}^2\right]} \tag{3.22}$$

次に図 6 の roll の場合は，物体表面での境界条件は

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial n}=x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\\ &\therefore\ \frac{\partial\psi}{\partial s}=-x\frac{\partial x}{\partial s}-y\frac{\partial y}{\partial s}\\ &\therefore\ \psi=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\end{aligned} \tag{3.23}$$

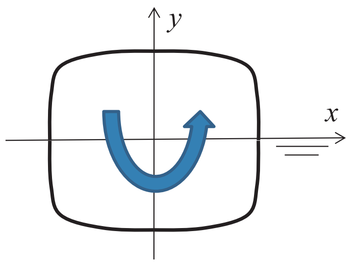

図 6　roll モード

と書ける．したがって，(3.2)(3.8)(3.23)式より

$$\begin{aligned}\psi&=\sum_{n=1}\{c_n\cos n\theta\}=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}M^2\begin{bmatrix}\{(1+a_1)\cos\theta+a_3\cos 3\theta\}^2\\ \{(1-a_1)\sin\theta-a_3\sin 3\theta\}^2\end{bmatrix}\\ &=-\frac{1}{2}M^2\left[(1+a_1{}^2+a_3{}^2)+2a_1(1+a_3)\cos 2\theta+2a_3\cos 4\theta\right]\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\therefore\ c_2=-M^2a_1(1+a_3)\ ,\quad c_4=-M^2a_3\qquad 他の\ \ c_n=0$$

ゆえに，(3.24)を(3.10)式に代入することにより roll の付加慣性モーメントが次のように得られる．

$$\boxed{m_{33}=\rho\pi M^4\left[a_1{}^2(1+a_3)^2+2a_3{}^2\right]} \tag{3.25}$$

最後に，sway と roll の連成項は(3.10)式より

$$m_{13}=\frac{\rho\pi}{2}\sum_{n=1}n\,c_n{}^1\cdot c_n{}^3 \tag{3.26}$$

であるが，sway の $c_n{}^1$ は(3.18)式で，roll の $c_n{}^3$ は(3.24)式で与えられているので，代入すると

$$\boxed{m_{13} = -4\rho M^3 \begin{bmatrix} a_1(1+a_3)\left\{\dfrac{1}{3}(1-a_1) + \dfrac{3}{5}a_3\right\} \\ +2a_3\left\{\dfrac{1}{15}(1-a_1) - \dfrac{3}{7}a_3\right\} \end{bmatrix}} \tag{3.27}$$

と得られる．

以上が Lewis Form 浮体の付加質量の解析解であるが，Lewis Form はパラメータ a_1 , a_3 を変化させると楕円や平板を表すことができる．Lewis Form 浮体の片幅を b ，吃水を d ，断面積を S とすると，(3.2)(3.5)式より

$$\begin{aligned} b &= M\{(1+a_1)+a_3\} \\ d &= M\{(1-a_1)+a_3\} \\ S &= M^2\frac{\pi}{2}\{1-a_1{}^2-a_3{}^2\} \end{aligned} \tag{3.28}$$

であるので,

$a_1 = 0$,　　$a_3 = 0 \rightarrow$ $circle\ \ Fig.7(a)$

$-1 \quad a_1 \quad 1$,　$a_3 = 0 \rightarrow$ $elipsoid\ \ Fig.7(b)$

$a_1 = -1$,　　$a_3 = 0 \rightarrow$ $vertical\ \ plate\ \ Fig.7(c)$

$a_1 = 1$ 　,　　$a_3 = 0 \rightarrow$ $horizontal\ \ plate\ \ Fig.7(d)$

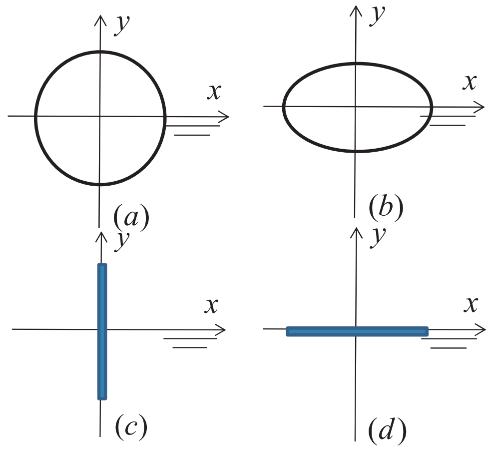

図 7　各種の浮体

これらの浮体の付加質量は前述の解析解より容易に求められる．例えば，図 7(a)(b)(d)の円柱，楕円柱，平板の heave の付加質量は(3. 14) (3. 28)式より

$m_{22} = \dfrac{\rho\pi}{2}M^2\left[(1+a_1)^2\right] = \dfrac{\rho\pi}{2}b^2$ であり，吃水には関係しないことがわかる．これらに対応する流場の速度ポテンシャルも，それぞれ係数 c_n が求められているので，それを(3.8)式に代入することにより求めることができる．

3.2 数値解との比較

以上で得た Lewis Form 断面の付加質量の解析解を数値解と比較してみる．数値解は前に述べたように，(2.5)式で与えられるグリーン関数を用いた積分方程式を解くことによって求められる．Lewis Form のパラメータは(3.28)式にあるように，b, d, S が与えられれば，パラメータ M, a_1, a_3 が求められるのであるが，具体的には縦横比 $H_0 \equiv b/d$ と，面積比 $\sigma \equiv S/(2bd)$ を与えて形状を定める．図 8(a)は σ を一定（ $\sigma = 0.9$ ）として H_0 を変化させた場合，図 8(b)は H_0 を一定（ $H_0 = 1.0$ ）として σ を変化させた場合の，解析解の付加質量係数と数値解のそれとの比較である．両者完全に一致していることがわかる．これは解析解に誤りがないこと，数値解も十分な精度を持っていることを示している．

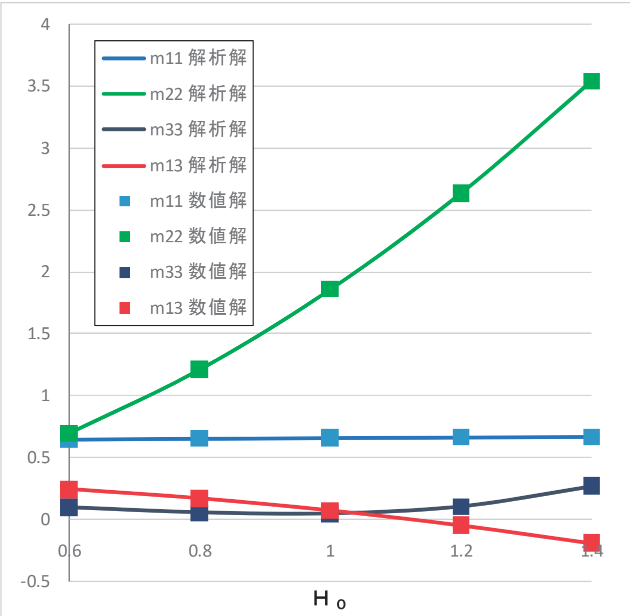

図 8(a)　付加質量係数（σ=0.9 一定，H_0変化）

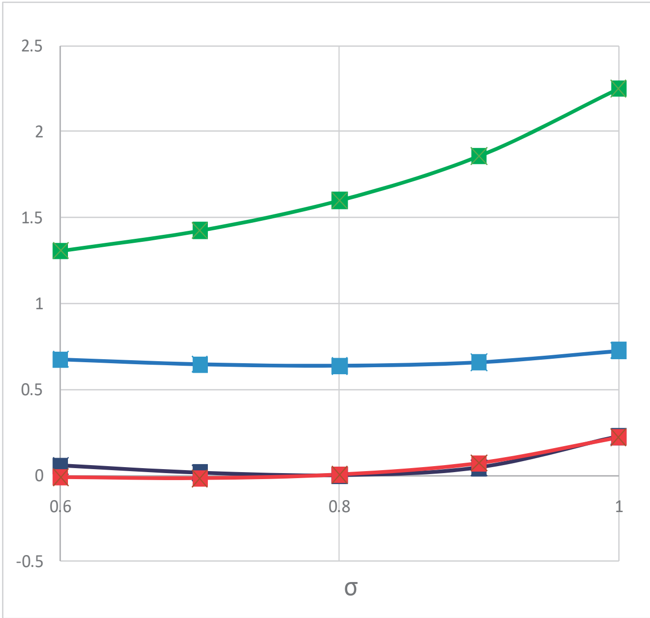

図 8(b)　付加質量係数（H_0=1.0 一定，σ変化）

なおここで示した付加質量係数は喫水dを使って以下のように無次元化したものである．

$$m_{ij}' = m_{ij} / (\rho d^2 \varepsilon_i \varepsilon_j) \qquad ここで \quad \varepsilon_1 = 1\,,\ \varepsilon_2 = 1\,,\ \varepsilon_3 = d \tag{3.29}$$

4.　傾斜した Lewis Form 浮体に対する近似解

ここでは図 9 のように傾斜した Lewis Form 浮体の付加質量を検討する．この左右不対称な浮体を改めて(3.2)式の写像関数で表現することを考える．

この場合は$a_2, a_4, \cdots$も0とはならずに，これらの項が左右不対称性を表すことになる．項数は多いほど浮体形状を正確に表現できるが，それだけ扱いが面倒になる．

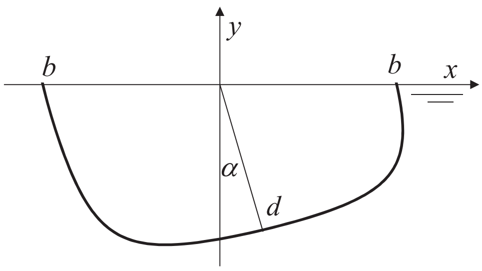

図 9　傾斜した Lewis Form

ここではa_4までを取り入れ，浮体座標を

$$\begin{aligned} x &= M\{(1+a_1)\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + a_4\cos 4\theta\} \\ y &= M\{(1-a_1)\sin\theta - a_2\sin 2\theta - a_3\sin 3\theta - a_4\sin 4\theta\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

と表すことにする．そしてパラメータa_1, a_2, a_3, a_4, Mは以下のようにして決定する．すなわち，傾斜した浮体のb, d, S及び傾斜角αは与えられるものとし，また傾斜浮体の左右舷までの長さは等しいとすると，この 5 つの条件より上の 5 つのパラメータが決定される．具体的には(4.1)(3.5)式より

$$
\begin{aligned}
&b = M\{(1+a_1)+a_2+a_3+a_4\} \\
&-b = M\{-(1+a_1)+a_2-a_3+a_4\} \qquad \therefore a_4 = -a_2 \\
&d = -\frac{y_{\theta=-\pi/2+\alpha}}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} M\{(1-a_1)\sin\theta - a_2\sin 2\theta - a_3\sin 3\theta - a_4\sin 4\theta\}\Big|_{\theta=-\pi/2+\alpha} \\
&S = \frac{\pi}{2} M^2 (1-a_1{}^2 - 2a_2{}^2 - 3a_3{}^2 - 4a_4{}^2) \\
&\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y/\partial\theta}{\partial x/\partial\theta}\Big|_{\theta=-\pi/2+\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

この最後の式は船底中央の傾斜が α であるという条件である．これら 5 つの式よりパラメータを決定する．

傾斜角が 0 の場合は $a_2=0$，$a_4=0$ となり，通常の Lewis Form となる．

このようにパラメータが 4 つになった場合の付加質量も前章にのべた手順で求めることができる．例えば heave の付加質量は前章(3.13)式と同様に

$$
\begin{aligned}
&\psi = \sum_{n=1}\{c_n \cos n\theta\} = -x = -M\{(1+a_1)\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta + a_4\cos 4\theta\} \\
&\therefore\ c_1 = -M(1+a_1)\ ,\ c_2 = -Ma_2\ ,\ c_3 = -Ma_3\ ,\ c_4 = -Ma_4 \qquad c_5, c_6, \cdots = 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

ゆえに，(4.3)を(3.10)式に代入することにより heave の付加質量が次のように得られる．

$$
\boxed{m_{22} = \frac{\rho\pi}{2} M^2\left[(1+a_1)^2 + 2a_2{}^2 + 3a_3{}^2 + 4a_4{}^2\right]} \tag{4.4}
$$

他のモードの場合，すこし煩雑であるが，手順は前章と同様である．以下に結果を記す．

$$
\boxed{m_{11} = \frac{8\rho}{\pi} M^2 \left[\begin{aligned} &\frac{1}{4}(1-a_1)^2 + \frac{1}{2}(1-a_1)a_3 + \frac{19}{12}a_3{}^2 \\ &+a_2{}^2 - \frac{4}{9}a_2a_4 + \frac{20}{9}a_4{}^2 \end{aligned}\right]} \tag{4.5}
$$

$$
\boxed{m_{33} = \frac{\rho\pi}{2} M^4 \left[\begin{aligned} &2a_1{}^2 + 3a_2{}^2 + 4a_3{}^2 + 5a_4{}^2 \\ &a_1{}^2a_2{}^2 + a_2{}^2a_3{}^2 + a_3{}^2a_4{}^2 + 2a_1{}^2a_3{}^2 + 2a_2{}^2a_4{}^2 + 3a_1{}^2a_4{}^2 \\ &+2a_1a_2{}^2a_3 + 2a_2a_3{}^2a_4 + 6a_1a_2a_3a_4 \\ &+4a_1{}^2a_3 + 10a_1a_2a_4 \end{aligned}\right]} \tag{4.6}
$$

$$
\boxed{m_{12} = -2\rho M^2 \left[\begin{aligned} &(1+a_1)\left(\frac{2}{3}a_2 + \frac{4}{15}a_4\right) \\ &+2a_2\left(\frac{1}{3}(1-a_1) + \frac{3}{5}a_3\right) \\ &-3a_3\left(\frac{2}{5}a_2 - \frac{4}{7}a_4\right) \\ &+4a_4\left(\frac{1}{15}(1-a_1) - \frac{3}{7}a_3\right) \end{aligned}\right]} \tag{4.7}
$$

$$m_{13} = -2\rho M^3 \begin{bmatrix} (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4)\left(\dfrac{2}{3}a_2 + \dfrac{4}{15}a_4\right) \\ +2(a_1 + a_1a_3 + a_2a_4)\left(\dfrac{1}{3}(1-a_1) + \dfrac{3}{5}a_3\right) \\ -3(a_2 + a_1a_4)\left(\dfrac{2}{5}a_2 - \dfrac{4}{7}a_4\right) \\ +4a_3\left(\dfrac{1}{15}(1-a_1) - \dfrac{3}{7}a_3\right) \\ -5a_4\left(\dfrac{2}{21}a_2 + \dfrac{4}{9}a_4\right) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$m_{23} = \frac{\rho\pi}{2} M^3 \begin{bmatrix} (1+a_1)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4) \\ +2a_2(a_1 + a_1a_3 + a_2a_4) \\ +3a_3(a_2 + a_1a_4) \\ +4a_4a_3 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

これらの解析解と，数値解の比較を以下に示す．ここで数値解は，元の Lewis Form 浮体を傾斜させた座標を用いたもので，ここでは厳密解と呼ぶことにする．図 10(a)(b)は傾斜角を横軸に，$H_0 = 1,\ \sigma = 0.9$ の Lewis Form 浮体について近似解と厳密解を比較したものである．図を見ると，近似解は傾斜角が 15 度程度まではほぼ良い近似となっているが，それ以上になると差異が大きくなる．その原因は，a_4 までのパラメータでは傾斜浮体の形状を表すことが困難になるからである．図 11 に $H_0 = 1,\ \sigma = 0.9$ の Lewis Form 浮体について，24 度傾斜させた浮体とそれを前記のように a_4 までのパラメータで表した浮体の比較を示す. 浮体形状に大きな差異はなくほぼ良い近似浮体になっているが，それでも特に浮体形状に敏感な連成項には大きな誤差が生じるようである．なお，この近似浮体形状を入力として数値解を求めると，ここで示した解析解と完全に一致することは確かめてある．図 12 参照．すなわち，(4.4)～(4.9)式の解析解に誤りはないということである．

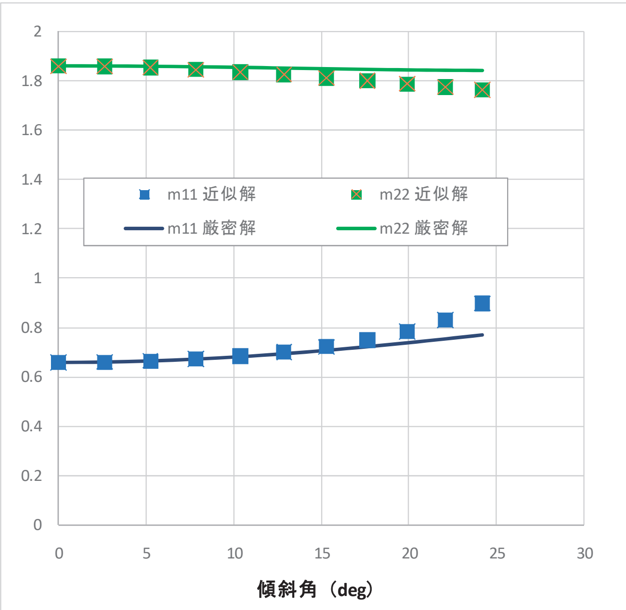

図 10 (a)　傾斜浮体の付加質量 (m11, m22)

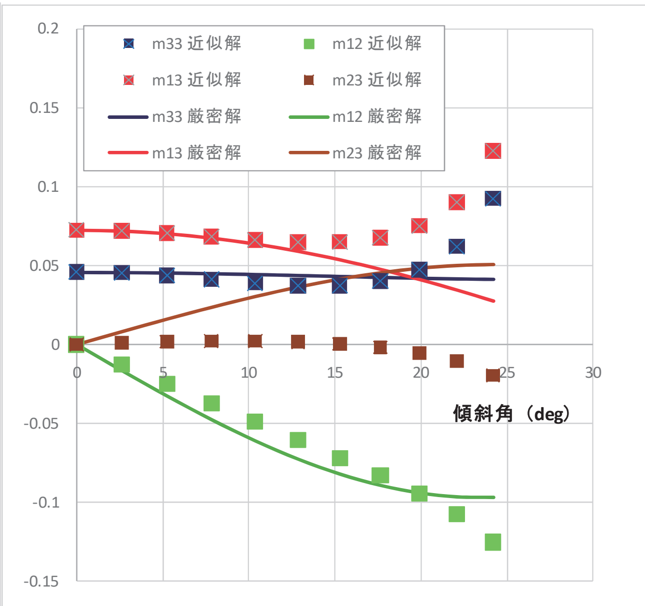

図 10 (b) 傾斜浮体の付加質量（m33, m12, m13, m23）

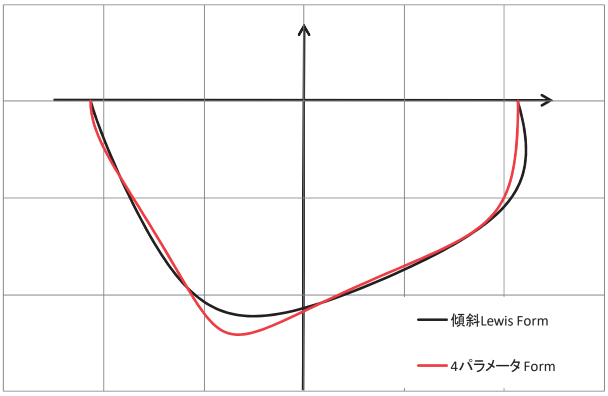

図 11　傾斜浮体と４パラメータ近似浮体の比較
（H_0=1.0　σ=0.9　24deg.）

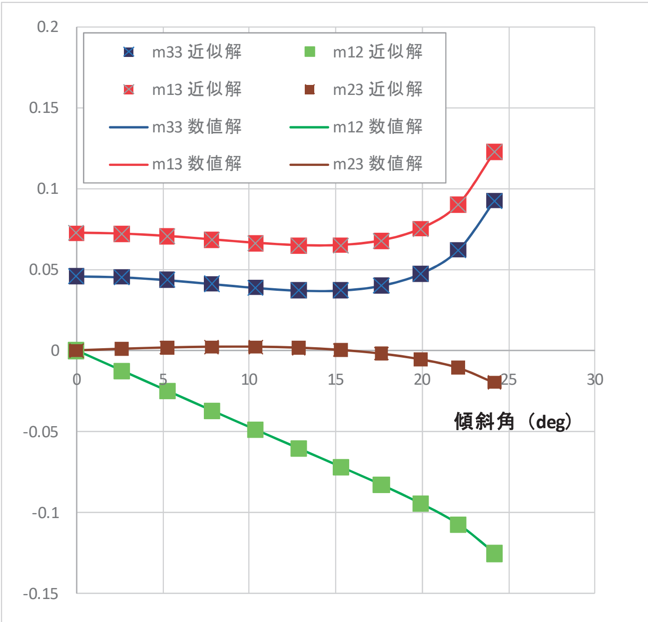

図 12　傾斜浮体の付加質量（m33, m12, m13, m23）

5.　まとめ

Lewis Form 浮体に関して，周波数無限大における付加質量の解析解を平易にかつ統一的に記述した．これらは周波数無限大における流場の理解に役立つであろう．また，得られた解析解は数値解の確認に利用できるだろう．

傾斜した Lewis Form 浮体の付加質量については近似解を示したが，これは結局，傾斜した船体をいかに精度良く写像関数で表せるかにかかっている．今回は Lewis Form のパラメータに 2 個追加するという簡便な方法を採用したが，他の写像関数を利用することを含め今後の課題である．

参考文献

1) F.M.Lewis,　The Inertia of the Water surrounding a Vibrating Ship, Trans.SNAME, Vol.37,1929
2) L.Landweber & M.C.Macagno,　Added Mass of Two-Dimensional Forms Oscillating in a Free Surface,　Journal of Ship Research, Vol.1,1957
3) 熊井豊二，船体の捩れ振動の付加慣性モーメントに対する 3 次元修正について，造船協会論文集 第 108 号，1960
4) O.Grim,　Die Hydrodynamischen Krafte beim Rollversuch,　Schiffstechnik Bd.3, 1955
5) 別所正利，波の中の船の横揺れ運動の理論について，防衛大学理工学研究報告，第 3 巻 第 3 号, 1966
6) M.Kan,　The Added Mass Coefficient of a Cylinder Oscillating in Shallow Water in the Limit K→0 and　K→∞, Papers of Ship Research Institute, No.52, 1977

付録　周波数 0 における Lewis Form 浮体の付加質量

周波数 0 の場合の自由表面条件は，(2.1)式において $K=0$ とおくことにより，

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=0 \quad on \quad y=0 \tag{a.1}$$

となる．すなわち，周波数無限大においては流場は上下反対称であったが，周波数 0 の場合の流場は上下対称ということになる．したがって sway の場合は図 5(a)のような運動とすると上下対称の流場となり，(a.1)の自由表面条件が満足される．

この場合の物体表面での境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}=\frac{\partial x}{\partial n} \quad , \quad \therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial s} \quad , \quad \therefore \psi = y \tag{a.2}$$

である．上下対称運動を考えると ϕ は y 軸に対して対称であり，(3.8)式の代わりに

$$\phi=\sum_{n=1}\left\{c_n \cos n\theta\right\} , \qquad \psi=-\sum_{n=1}\left\{c_n \sin n\theta\right\} \tag{a.3}$$

と表される．

したがって，(a.2)(a.3)(3.2)式より

$$\begin{gathered}\psi=-\sum_{n=1}\left\{c_n \sin n\theta\right\}=y=M\left\{(1-a_1)\sin\theta - a_3 \sin 3\theta\right\} \\ \therefore \ c_1=-M(1-a_1) \quad , \quad c_3=Ma_3 \ , \quad \text{他の}\, c_n=0\end{gathered} \tag{a.4}$$

となる．

したがって，(3.10)式より

$$\boxed{m_{11}=\frac{\rho\pi}{2}M^2\left[(1-a_1)^2+3a_3{}^2\right]} \tag{a.5}$$

が得られる．

Roll の付加慣性モーメント，sway-roll の連成項については Grim[4]，別所[5] により得られている．結果のみを以下に示しておく．

$$\begin{gathered}\boxed{m_{33}=\frac{16\rho}{\pi}M^4\left[a_1{}^2(1+a_3)^2+\frac{8}{9}a_1a_3(1+a_3)+\frac{16}{9}a_3{}^2\right]} \\ \boxed{m_{13}=-\frac{8\rho}{3}M^3\left[a_1(1-a_1)+a_3\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5}a_1-a_1{}^2\right)+a_3{}^2\left(\frac{3}{5}a_1-\frac{12}{7}\right)\right]}\end{gathered}$$

(a.6)

(a.7)

なお，本論では水深は無限大としているが，有限水深の場合の $K\to 0$ や $K\to\infty$ における付加質量の数値解の取扱いについては菅[6] の詳細な解析がある．