浮体の動揺理論における流体力の関係について

大松　重雄*

On the Relations of Hydrodynamic Forces in the Theory of Floating Bodies

by

Shigeo OHMATSU

Abstract

In the theory of floating bodies, it is well known that there are various beautiful relations between hydrodynamic forces such as radiation forces and diffraction forces. These relations are very useful for understanding of physical phenomena and for checking the results of numerical calculations. These relations have been revealed by several great pioneers of floating body theory. This paper attempts to introduce these relations as possible as systematically. It will be helpful for overall understanding of hydrodynamic phenomena.

*　海洋部門
原稿受付　平成 18 年 9 月 12 日
審 査 済　平成 19 年 1 月 4 日

目　次

記　号

a：入射波の複素振幅

D：水深影響係数

$E_j(\beta)$：β 方向の入射波によって浮体に働く j モードの波強制力

g：重力の加速度

h：水深

$H_j(\theta)$：j モード動揺による Radiation potential の Kochin 関数

$H_d(\beta,\theta)$：β 方向入射波による Diffraction potential の Kochin 関数

K：有限水深波の波数

l_j：j モードの動揺の複素振幅

m_{ij}：付加質量係数

N_{ij}：減衰力係数

n_j：浮体浸水表面法線の j モード成分

R：反射波係数

T：透過波係数

β：入射波の進行方向

ρ：流体の密度

ω：周期的流体現象の円周波数

Φ_j,φ_j：Radiation potential

Φ_0,φ_0：Incident wave potential

Φ_d,φ_d：Diffraction potential

Φ_S,φ_S：Scattering potential

$\phi_i,\phi_j,\psi_i,\psi_j$：速度ポテンシャル一般

1. まえがき

波浪中の浮体の動揺理論においては、運動方程式を構成する流体力や浮体が造る波の間に美しい関係があることが知られている。これらの関係は浮体の動揺による流体現象を理解する上で重要であると同時に、数値計算の精度チェックなどにも利用される。これらの関係式は、浮体動揺理論の先駆者達の長年に亘る努力と洞察によって導かれたものである。ここではこれらの関係式をできるだけシステマティックに導出し、統一的に記述することを試みる。したがって本稿で述べることはすべて既知の事柄であるが、得られた関係を統一的に見ることは動揺現象の全体像を理解するのに有用である。

2. 準備―Green の公式、Kochin 関数―

2.1 仮定と定義

ここで扱う動揺理論においては、以下の仮定をおく。

1）水深は有限で一定、或いは無限水深とする。
2）流体は非粘性、非回転であるとして速度ポテンシャルを導入する。また、入射波振幅、動揺振幅ともに線型理論で扱える程度に小さいとする。
3）すべての現象は周期的であるとし、時間項を $e^{i\omega t}$ とする。
4）浮体の前進速度はないものとする。

２次元及び３次元の場合の座標系をそれぞれ図-1(a)(b)のように定義する。

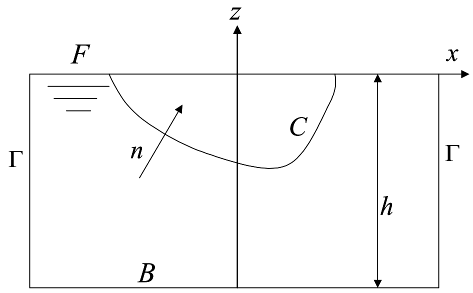


図-1(a)　２次元流場の座標系

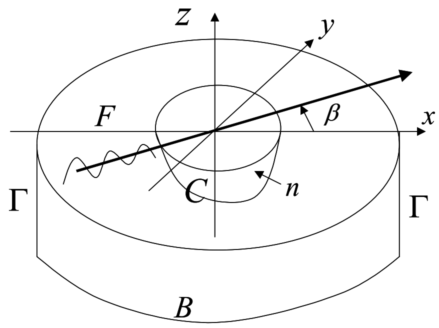


図-1(b)　３次元流場の座標系

浮体の動揺によって励起される流れ場を解く、いわゆる radiation 問題を下記のように定義する。

Radiation 問題

Radiation potential

$$\Phi_j(P;t) = \mathrm{Re}\left[i\omega l_j \varphi_j(P) e^{i\omega t}\right]$$

ここで l_j は j モードの動揺の複素振幅とする。
φ_j の満足すべき境界条件などは以下のように規定される。

[L]　$\nabla^2 \varphi_j = 0$　in fluid domain

[F]　$\dfrac{\omega^2}{g}\varphi_j - \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0$　at z=0

[H]　$\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial n} = n_j$　on C

[B]　$\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0$　on B

[R]　Radiation condition

ここで n_j は浮体表面法線の j モード成分を表す。

なお、[L]は流体の連続の条件を意味するラプラスの条件、 [F]は自由表面を横切る流れがなく、自由表面がひとつの流線であることを意味する自由表面条件、 [H]は浮体表面の粒子が浮体表面の法線速度と同じ速度を持つことを意味する浮体表面条件、 [B]は水底を横切る流れがないことを意味する水底条件、をそれぞれ表している。[R]radiation condition については後述する。

次に、固定された浮体に入射波が当たることによって励起される流れ場を解く、いわゆる diffraction 問題を下記のように定義する。

Diffraction 問題

Incident wave potential

$$\Phi_0(P;t) = \mathrm{Re}\left[\frac{iga}{\omega}\varphi_0(P,\beta)e^{i\omega t}\right]$$

Diffraction potential

$$\Phi_d(P;t) = \mathrm{Re}\left[\frac{iga}{\omega}\varphi_d(P,\beta)e^{i\omega t}\right]$$

Scattering potential

$$\Phi_S(P;t) = \mathrm{Re}\left[\frac{iga}{\omega}\varphi_S(P,\beta)e^{i\omega t}\right]$$

ここで a は入射波の振幅、β は入射波の進行方向を表す。入射波のポテンシャル φ_0 は次のように与えられる。

$$\varphi_0(P,\beta) = \frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh} e^{-iK(x\cos\beta + y\sin\beta)} \quad (1)$$

また、

$$\Phi_S = \Phi_0 + \Phi_d \quad 、\quad \varphi_S = \varphi_0 + \varphi_d$$

である。
φ_d の満足すべき境界条件などは以下のように規定される。

[L]　$\nabla^2 \varphi_d = 0$　in fluid domain

[F]　$\dfrac{\omega^2}{g}\varphi_d - \dfrac{\partial \varphi_d}{\partial z} = 0$　at z=0

[H]　$\dfrac{\partial \varphi_d}{\partial n} = -\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n}$　or　$(\dfrac{\partial \varphi_S}{\partial n} = 0)$　on C

[B]　$\dfrac{\partial \varphi_d}{\partial z} = 0$　on B

[R]　Radiation condition

ここでKは有限水深の場合の進行波の波数で、

$$\frac{\omega^2}{g}h = Kh\tanh Kh \tag{2}$$

の実根である。また、下記で与えられるDを水深影響係数と定義する。

$$D \equiv 2K\int_{-h}^{0}\left\{\frac{\cosh^2 Kh(z+h)}{\cosh^2 Kh}\right\}dz$$
$$= \tanh Kh + Kh/\cosh^2 Kh$$

注：Dを使うと有限水深波の群速度は以下のように記述される。付録-1参照。

$V_g = g/2\omega[\tanh Kh + Kh/\cosh^2 Kh] \equiv g/2\omega \times D$

また、無限水深の場合は

$$K = \omega^2/g,\ D = 1,\ \frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh} \to e^{Kz}$$

である。

以上において、radiation condition とは、浮体による攪乱波はすべて外方に向かって伝播しなければならないという条件で、具体的には無限遠境界Γで

<u>２次元の場合（以下２D と記す）</u>

[R] $\varphi \to e^{-iK|x|}$ as $|x| \to \infty$

<u>３次元の場合（以下３D と記す）</u>

[R] $\varphi \to \frac{1}{\sqrt{R}}e^{-iKR}$ as $R = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$

と記述される。

2.2 Green の公式と Kochin 関数

曲面Sが囲む閉領域V内で連続な関数をϕ_i, ϕ_jとすると、ポテンシャル論における Green の公式は以下のように記述される。

$$\iiint_V \left(\phi_i\nabla^2\phi_j - \phi_j\nabla^2\phi_i\right)dV = \iint_S (\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n} - \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n})dS \tag{3}$$

したがって、もしϕ_i, ϕ_jがともに領域 V 内で Laplaceの方程式を満足する調和関数である場合には(3)式は 0 となる。動揺問題で扱う radiation potential φ_jや diffraction potential φ_dなどは全て調和関数であるから、それらを図-1 で示した領域に適用すると

$$\iint_S (\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n} - \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n}) = 0 \tag{4}$$

ここで $S = C + F + \Gamma + B$

である。φ_j, φ_dは自由表面条件[F]、水底での条件[B]を満足する関数であるので、F, B上での積分は 0 となる。そこでC, Γ上での積分を以下のように定義しよう。

$$I(\phi_i,\phi_j) \equiv \iint_C (\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n} - \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n})dS$$
$$\equiv -\iint_\Gamma (\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n} - \phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n})dS \tag{5}$$

ここで、ϕ_i, ϕ_jがともに入射波のポテンシャルである場合、すなわちβ_i方向、β_j方向の入射波$\phi_i = \varphi_{0i} = \varphi_0(\beta_i)$，$\phi_j = \varphi_{0j} = \varphi_0(\beta_j)$とすると、(図-2 参照)

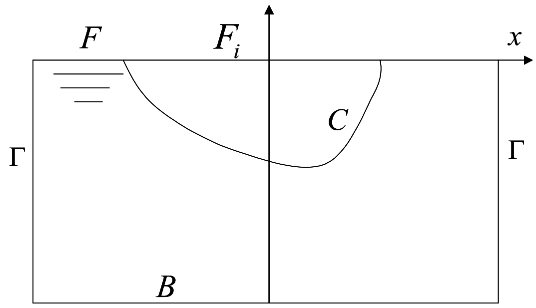


図-2　Green の定理の適用

$$\iint_{C+F+\Gamma+B} (\varphi_{0i}\frac{\partial\varphi_{0j}}{\partial n} - \varphi_{0j}\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n}) = 0 \tag{6}$$

入射波のポテンシャルは浮体内部の領域でも存在し、そこでも自由表面条件［F］を満足するのであるから、

$$\iint_{F_i+F+\Gamma+B} (\varphi_{0i}\frac{\partial\varphi_{0j}}{\partial n} - \varphi_{0j}\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n}) = 0 \tag{7}$$

$$\iint_{F_i} (\varphi_{0i}\frac{\partial\varphi_{0j}}{\partial n} - \varphi_{0j}\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n}) = 0 \tag{8}$$

と書ける。

以上より、(6)－(7)+(8)=0 であるから

$$\boxed{I(\varphi_{0i},\varphi_{0j}) = \iint_C (\varphi_{0i}\frac{\partial\varphi_{0j}}{\partial n} - \varphi_{0j}\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n}) = 0 \quad (9)}$$

を得る。

また、ϕ_i, ϕ_jがφ_jやφ_dのように、ともに radiation condition[R]を満足する関数である場合は、無限遠Γでの積分は 0 になるので、

$$\boxed{I(\phi_i,\phi_j) = 0 \text{ for } \phi_i,\phi_j = \varphi_j \text{ or } \varphi_d \quad (10)}$$

を得る。

しかし、ϕ_iかϕ_j、あるいは両方が radiation

condition[R]を満足しない場合はΓ上の積分は消えない。ϕ_i, ϕ_jを次のように表そう。

$$\phi_i = \varphi_{0i} + \psi_i \tag{11a}$$

$$\phi_j = \varphi_{0j} + \psi_j \tag{11b}$$

ここで$\varphi_{0i}, \varphi_{0j}$は入射波のポテンシャル、$\psi_i, \psi_j$は radiation potential か diffraction potential とする。この場合は

$$I(\phi_i, \phi_j) = \iint_C (\varphi_{0i} \frac{\partial \varphi_{oj}}{\partial n} - \varphi_{0j} \frac{\partial \varphi_{0i}}{\partial n}) dS$$

$$+ \iint_C (\varphi_{0i} \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \varphi_{0i}}{\partial n}) dS$$

$$- \iint_C (\varphi_{0j} \frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \psi_i \frac{\partial \varphi_{0j}}{\partial n}) dS$$

$$+ \iint_C (\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n}) dS \tag{12}$$

となるが、右辺第１項の積分は(9)式により、第４項の積分は(10)式により０となる。残りの第２項、第３項の積分のために、下記のような関数を導入しよう。

$$H_j(\theta) \equiv \frac{1}{D} \iint_C \left\{ \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} \varphi_0(\theta + \pi) dS \tag{13}$$

この関数は、ψ_jによってθ方向の無限遠に進行していく波の振幅と位相を表すもので、初めて導入した Kochin に因み Kochin 関数と呼ばれる。浮体の動揺理論ではこの Kochin 関数が重要な役割を演ずる。

例えば、２次元で無限水深の場合、一般に

$$\psi_j(P) = -\int_C \left\{ \frac{\partial \psi_j(Q)}{\partial n} - \psi_j(Q) \frac{\partial}{\partial n} \right\} G(P,Q) dl(Q) \tag{14}$$

$G(P,Q)$は２次元波動場の Green 関数と表せる。ここで$G(P,Q)$ は[L][F][B][R]の各条件を満足し、無限遠では

$$G_{x-x' \to \pm\infty} = i e^{K(z+z') \mp iK(x-x')} \tag{15}$$

の特性を持つ関数である。(15)式を(14)式に代入すると

$$\psi_{j\,x \to \pm\infty} = -i e^{Kz \mp iKx} \int_C \left\{ \frac{\partial \psi_j}{\partial n} - \psi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} e^{Kz' \pm iKx'} dl \tag{16}$$

であるから、(13)式を用いると

$$\psi_{j\,x \to +\infty} = -i e^{Kz - iKx} H_j(0) \tag{17a}$$

$$\psi_{j\,x \to -\infty} = -i e^{Kz + iKx} H_j(\pi) \tag{17b}$$

と表せることがわかる。

より一般的には、有限水深の場合、３次元の場合も含めて以下のように記述される。

２D

$$\psi_{j\,x \to +\infty} = -i \frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh} e^{-iKx} H_j(0) \tag{18a}$$

$$\psi_{j\,x \to -\infty} = -i \frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh} e^{iKx} H_j(\pi) \tag{18b}$$

３D

$$\psi_{j\,R \to \infty} = -i \sqrt{\frac{K}{2\pi R}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh} e^{-iKR} H_j(\theta) \tag{19}$$

ここで、無限遠に進行していく波を具体的に記述しておくことにする。

線形理論における自由表面上昇量ηは速度ポテンシャルより

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}$$

で与えられるので、遠方での速度ポテンシャルを(18)(19)式で表すと、遠方での自由表面上昇量（波面）は以下のようになる。

２D

Radiation

$$\eta(t) = -i \frac{\omega^2}{g} l_j H_j^{\mp} e^{i(\omega t \pm Kx)}$$

Diffraction

$$\eta(t) = -i a H_d^{\mp} e^{i(\omega t \pm Kx)}$$

３D

Radiation

$$\eta(t) = -i \frac{\omega^2}{g} l_j \sqrt{\frac{K}{2\pi R}} H_j(\theta) e^{i(\omega t - KR + \frac{\pi}{4})}$$

Diffraction

$$\eta(t)=-ia\sqrt{\frac{K}{2\pi R}}H_d(\theta)e^{i(\omega t-KR+\frac{\pi}{4})}$$

さて、(13)式の表現を用いると(12)式の積分は、
右辺第 2 項

$$=\iint_C\left\{\varphi_0(\beta_i)\frac{\partial\psi_j}{\partial n}-\psi_j\frac{\partial\varphi_0(\beta_i)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\iint_C\left\{\frac{\partial\psi_j}{\partial n}-\psi_j\frac{\partial}{\partial n}\right\}\varphi_0(\beta_i)dS=DH_j(\beta_i+\pi)$$

右辺第 3 項も同様にして、$-DH_i(\beta_j+\pi)$であるので、

$$\boxed{I(\phi_i,\phi_j)=D\{H_j(\beta_i+\pi)-H_i(\beta_j+\pi)\} \qquad (20)}$$

を得る。

さらに、今度はϕ_iと$\phi_j{}^*$に関する積分を考えてみよう。ここで$\phi_j{}^*$はϕ_jの複素共役を表す。（$I(\phi_i{}^*,\phi_j{}^*)$は単に$I(\phi_i,\phi_j)$の複素共役となるだけであるので、意味のある結果は得られない。）

$$I(\phi_i,\phi_j{}^*)=\iint_C(\varphi_{0i}\frac{\partial\varphi_{oj}{}^*}{\partial n}-\varphi_{0j}{}^*\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n})dS$$

$$+\iint_C(\varphi_{0i}\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\varphi_{0i}}{\partial n})dS$$

$$-\iint_C(\varphi_{0j}{}^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n}-\psi_i\frac{\partial\varphi_{0j}{}^*}{\partial n})dS$$

$$+\iint_C(\psi_i\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dS \qquad (21)$$

ここで右辺第 1 項の積分はやはり(9)式により 0 となる。$\varphi_{0j}{}^*$はφ_{0j}と進行方向が逆なだけで、やはり進行波だからである。
右辺第 2 項

$$=\iint_C\left\{\varphi_0(\beta_i)\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\varphi_0(\beta_i)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\iint_C\left\{\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial}{\partial n}\right\}\varphi_0(\beta_i)dS$$

$$=\iint_C\left\{\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial}{\partial n}\right\}\varphi_0{}^*(\beta_i+\pi)dS$$

$$=DH_j{}^*(\beta_i)$$

右辺第 3 項も同様に、$-DH_i(\beta_j)$

したがって(21)式の積分は

$$I(\phi_i,\phi_j{}^*)=D\{H_j{}^*(\beta_i)-H_i(\beta_j)\}$$

$$+\iint_C(\psi_i\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dS$$

$$=D\{H_j{}^*(\beta_i)-H_i(\beta_j)\}$$

$$-\iint_\Gamma(\psi_i\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dS \qquad (22)$$

となる。$\psi_j{}^*$は radiation condition[R]を満足しないから、この場合はΓ上の積分は消えない。
(22)式のΓ上の積分を評価するために、(18)(19)式の表現を用いることにする。

2D

$$-\int_{\Gamma_{+\infty}}(\psi_i\frac{\partial\psi_j{}^*}{\partial n}-\psi_j{}^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dl$$

$$=-\int_{-h}^0\left\{-i\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{-iKx}H_i(0)\right\}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left\{i\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{iKx}H_j{}^*(0)\right\}$$

$$-\left\{i\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{iKx}H_j{}^*(0)\right\}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x}\left\{-i\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{-iKx}H_i(0)\right\}dz$$

$$=-2iKH_i(0)H_j{}^*(0)\int_{-h}^0\left\{\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}\right\}^2dz$$

$$=-iDH_i(0)H_j{}^*(0)$$

$$\left(\because\int_{-h}^0\left\{\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}\right\}^2dz=\frac{D}{2K}\right)$$

同様に

$$-\int_{\Gamma_{-\infty}}(\psi_i\frac{\partial\psi_j^*}{\partial n}-\psi_j^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dl=-iDH_i(\pi)H_j^*(\pi)$$

したがって

$$-\int_{\Gamma_{\pm\infty}}(\psi_i\frac{\partial\psi_j^*}{\partial n}-\psi_j^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dl$$

$$=-iD\left\{H_i(0)H_j^*(0)+H_i(\pi)H_j^*(\pi)\right\}$$

を得る。

3D

$$-\iint_{\Gamma}(\psi_i\frac{\partial\psi_j^*}{\partial n}-\psi_j^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n})dS$$

$$=-\int_{-h}^{0}dz\int_0^{2\pi}Rd\theta\left\{-i\sqrt{\frac{K}{2\pi R}}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{-iKR}H_i(\theta)\right\}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial R}\left\{i\sqrt{\frac{K}{2\pi R}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{iKR}H_j^*(\theta)\right\}$$

$$-\left\{i\sqrt{\frac{K}{2\pi R}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{iKR}H_j^*(\theta)\right\}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial R}\left\{-i\sqrt{\frac{K}{2\pi R}}e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}e^{-iKR}H_i(\theta)\right\}$$

$$=-i\frac{K^2}{\pi}\int_{-h}^{0}\left\{\frac{\cosh K(z+h)}{\cosh Kh}\right\}^2dz\cdot\int_0^{2\pi}H_i(\theta)H_j^*(\theta)d\theta$$

$$=-\frac{iDK}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_i(\theta)H_j^*(\theta)d\theta$$

以上をまとめると

2D

$$I(\phi_i,\phi_j^*)=D\left\{H_j^*(\beta_i)-H_i(\beta_j)\right\}$$
$$-iD\left\{H_i(0)H_j^*(0)+H_i(\pi)H_j^*(\pi)\right\}\tag{23a}$$

3D

$$I(\phi_i,\phi_j^*)=D\left\{H_j^*(\beta_i)-H_i(\beta_j)\right\}$$
$$-\frac{iDK}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_i(\theta)H_j^*(\theta)d\theta\tag{23b}$$

を得る。

以上で、これから流体力の関係などを調べるための準備が整った。さらに、Kochin 関数に関して以下のような表記も用いることにしよう。

Radiation potential の Kochin 関数

$$H_j(\theta)\equiv\frac{1}{D}\iint_C\left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}-\varphi_j\frac{\partial}{\partial n}\right\}\varphi_0(\theta+\pi)dS$$

$$=\frac{1}{D}\iint_C\left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\varphi_0(\theta+\pi)+\varphi_j\frac{\partial\varphi_d(\theta+\pi)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\frac{1}{D}\iint_C\left\{\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\varphi_0(\theta+\pi)+\varphi_d(\theta+\pi)\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\frac{1}{D}\iint_C\varphi_S(\theta+\pi)\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}dS\tag{24}$$

ここで 1 行目から 2 行目への演算には Diffraction potential の[H]条件を、2 行目から 3 行目への演算には(10)式を使用している。

Diffraction potential の Kochin 関数

$$H_d(\beta,\theta)\equiv\frac{1}{D}\iint_C\left\{\frac{\partial\varphi_d(\beta)}{\partial n}-\varphi_d(\beta)\frac{\partial}{\partial n}\right\}\varphi_0(\theta+\pi)dS$$

$$=\frac{1}{D}\iint_C\left\{-\frac{\partial\varphi_0(\beta)}{\partial n}\varphi_0(\theta+\pi)-\varphi_d(\beta)\frac{\partial\varphi_0(\theta+\pi)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=\frac{1}{D}\iint_C\left\{-\varphi_0(\beta)\frac{\partial\varphi_0(\theta+\pi)}{\partial n}-\varphi_d(\beta)\frac{\partial\varphi_0(\theta+\pi)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=-\frac{1}{D}\iint_C\varphi_S(\beta)\frac{\partial\varphi_0(\theta+\pi)}{\partial n}dS\tag{25}$$

ここで 1 行目から 2 行目への演算には同じく Diffraction potential の[H]条件を、2 行目から 3 行目への演算には(9)式を使用している。

なお、ここで扱っている速度ポテンシャル、Kochin 関数の次元については付録-2 を参照していただきたい。

3　流体力の関係

ここでは、前章で得られた積分を全てのポテンシャルに統一的に適用し、その結果の意味を調べることにする。

3.1　Radiation 流体力の対称性

一般に、変動圧力 P（の線形成分）はベルヌーイの式によって速度ポテンシャル Φ から以下のように求められる。

$$P = -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \mathrm{Re}\left[pe^{i\omega t}\right] \tag{26}$$

そこで、Φとして Radiation potential
$\Phi_j(P;t) = \mathrm{Re}\left[i\omega l_j\varphi_j(P)e^{i\omega t}\right]$を代入すると、j モード動揺による圧力 p_j は以下のように表現される。

$$p_j = \rho\omega^2 l_j\varphi_j \tag{27}$$

よって、i モード動揺による圧力 p_iによって j モード方向に働く力は

$$F_{ij} = \iint_C p_i n_j dS = \rho\omega^2 l_i \iint_C \varphi_i\frac{\partial \varphi_j}{\partial n}dS \equiv \rho\omega^2 l_i f_{ij} \tag{28}$$

と表される。(28)式で、(10)式の関係を適用すると直ちに

$$\boxed{f_{ij} = f_{ji}} \tag{29}$$

を得る。これが Radiation 流体力の対称性といわれるもので、i モード動揺による j 方向流体力は、j モード動揺による i 方向流体力と等しいことを表している。

3.2 減衰力係数

前節で求めた Radiation 流体力は、以下のように加速度及び速度に比例する成分に分離される。

i モードの動揺を $\xi_i = l_i e^{i\omega t}$ とし、

$$F_{ij}e^{i\omega t} = \rho\omega^2 l_i f_{ij} e^{i\omega t} \equiv -m_{ij}\ddot{\xi}_i - N_{ij}\dot{\xi}_i \tag{30}$$

と表現することにすると、

$$m_{ij} = \rho\,\mathrm{Re}\left[f_{ij}\right] = \rho(f_{ij} + f_{ij}^*)/2 \tag{31}$$

$$N_{ij} = -\rho\omega\,\mathrm{Im}\left[f_{ij}\right] = -\rho\omega(f_{ij} - f_{ij}^*)/2i \tag{32}$$

となる。m_{ij}を付加質量係数、N_{ij}を減衰力係数という。ここで(32)式の表現を変形してみよう。

$$f_{ij} - f_{ij}^* = \iint_C (\varphi_i\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_i^*\frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n})dS$$

$$= \iint_C (\varphi_j\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i^*\frac{\partial \varphi_j^*}{\partial n})dS$$

$$= \iint_C (\varphi_j\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} - \varphi_i^*\frac{\partial \varphi_j}{\partial n})dS$$

$$= I(\varphi_j, \varphi_i^*)$$

<u>２D</u> $= -iD\left\{H_i^*(0)H_j(0) + H_i^*(\pi)H_j(\pi)\right\}$

<u>３D</u> $= -\dfrac{iDK}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} H_i^*(\theta)H_j(\theta)d\theta$

(33)

ここで、1 行目から 2 行目への演算には(10)式を、2 行目から 3 行目への演算には、radiation potential の[H]条件より $\partial\varphi_j/\partial n$は実数であるという事実を用いている。また最終行の導出には(23)式の関係を用いている。
したがって、(32)(33)式より

<u>２D</u>

$$N_{ij} = \frac{\rho\omega D}{2}\left\{H_i^*(0)H_j(0) + H_i^*(\pi)H_j(\pi)\right\} \tag{34a}$$

<u>３D</u>

$$N_{ij} = \frac{\rho\omega DK}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_i^*(\theta)H_j(\theta)d\theta \tag{34b}$$

を得る。これは、減衰力のなす仕事が、遠方に発散していく波のエネルギーに等しいことを示している。

3.3 Scattering wave 間の関係

一対の scattering potential $\varphi_S(\beta_1), \varphi_S(\beta_2)$を(20)式及び(23)式に適用してみよう。

まず(20)式に適用すると、

$$I(\varphi_S(\beta_1), \varphi_S(\beta_2)) = 0$$

なぜならば[H] $\partial\varphi_S/\partial n = 0$ on C
であるから、(20)式より次の関係が得られる。

$$\boxed{H_d(\beta_2, \beta_1 + \pi) = H_d(\beta_1, \beta_2 + \pi)} \tag{35}$$

次に(23)式に適用すると、同様に、

$$I(\varphi_S(\beta_1), \varphi_S^*(\beta_2)) = 0$$

なぜならば[H] $\partial\varphi_S/\partial n = \partial\varphi_S^*/\partial n = 0$ on C
であるから、(23)式より次の関係が得られる。

$$H_d^*(\beta_2, \beta_1) - H_d(\beta_1, \beta_2) =$$

<u>２D</u>

$$= i\left\{H_d(\beta_1, 0)H_d^*(\beta_2, 0) + H_d(\beta_1, \pi)H_d^*(\beta_2, \pi)\right\} \tag{36a}$$

<u>３D</u>

$$= \frac{iK}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(\beta_1, \theta)H_d^*(\beta_2, \theta)d\theta \tag{36b}$$

ここで(35)式、(36)式の意味を考えてみよう。

２D

まず 2 次元の場合、反射波、透過波を図-3 のように定義すると、

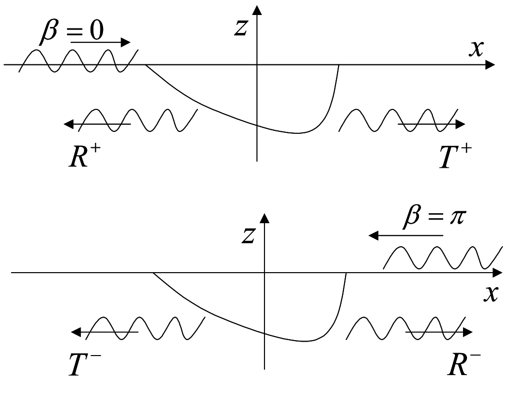


図-3　2 次元の場合の反射波と透過波

$$R^+ = -iH_d(0,\pi) \qquad (H_d(0,\pi) = iR^+)$$
$$T^+ = 1 - iH_d(0,0) \qquad (H_d(0,0) = i(T^+ - 1))$$
$$R^- = -iH_d(\pi,0) \qquad (H_d(\pi,0) = iR^-)$$
$$T^- = 1 - iH_d(\pi,\pi) \qquad (H_d(\pi,\pi) = i(T^- - 1))$$
(37)

である。2 次元の場合、β は 0 か π であるので、(35)式で考えられる 4 つの組み合わせを見てみると、

$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ とすると $H_d(0,\pi) = H_d(0,\pi)$

$\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$ とすると $H_d(\pi,\pi) = H_d(0,0)$

$\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$ とすると $H_d(0,0) = H_d(\pi,\pi)$

$\beta_1 = \pi, \beta_2 = \pi$ とすると $H_d(\pi,0) = H_d(\pi,0)$

以上において意味のある結果は 2 番目と 3 番目の結果（内容は同じ）であり、その結果と（37）式より下記を得る。

$$\boxed{T^+ = T^- \qquad (= T \text{ とおく})} \tag{38}$$

すなわち、これは 2 次元浮体のどちら側からの入射波に対しても透過波は等しいことを示している。次に（36a）式より

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$$
$$H_d^{\ *}(0,0) - H_d(0,0) =$$
$$= i\left\{H_d(0,0)H_d^{\ *}(0,0) + H_d(0,\pi)H_d^{\ *}(0,\pi)\right\}$$
(39)

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi$$
$$H_d^{\ *}(\pi,0) - H_d(0,\pi) =$$
$$= i\left\{H_d(0,0)H_d^{\ *}(\pi,0) + H_d(0,\pi)H_d^{\ *}(\pi,\pi)\right\}$$
(40)

$$\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$$
$$H_d^{\ *}(0,\pi) - H_d(\pi,0) =$$
$$= i\left\{H_d(\pi,0)H_d^{\ *}(0,0) + H_d(\pi,\pi)H_d^{\ *}(0,\pi)\right\}$$

これは単に(40)式の複素共役。

$$\beta_1 = \pi, \beta_2 = \pi$$
$$H_d^{\ *}(\pi,\pi) - H_d(\pi,\pi) =$$
$$= i\left\{H_d(\pi,0)H_d^{\ *}(\pi,0) + H_d(\pi,\pi)H_d^{\ *}(\pi,\pi)\right\}$$
(41)

(39)式に(37)を代入すると

$$-i(T^{+*} - 1) - i(T^+ - 1) =$$
$$= i\left\{i(T^+ - 1)(-i)(T^{+*} - 1) + iR^+(-iR^{+*})\right\}$$
$$\therefore \left|T^+\right|^2 + \left|R^+\right|^2 = 1$$

(41)式に(37)を代入すると

$$-i(T^{-*} - 1) - i(T^- - 1) =$$
$$= i\left\{iR^-(-iR^{-*}) + i(T^- - 1)(-i)(T^{-*} - 1)\right\}$$
$$\therefore \left|T^-\right|^2 + \left|R^-\right|^2 = 1$$

(40)式に(37)を代入すると

$$-iR^{-*} - iR^+ =$$
$$= i\left\{i(T^+ - 1)(-iR^{-*}) + iR^+(-i)(T^{-*} - 1)\right\}$$
$$\therefore T^+R^{-*} + T^{-*}R^+ = 0$$

以上をまとめると

$$\left|R^\pm\right|^2 + \left|T^\pm\right|^2 = 1 \tag{42}$$
$$\left.\begin{array}{l} T^+R^{-*} + T^{-*}R^+ = 0 \\ T^{+*}R^- + T^-R^{+*} = 0 \end{array}\right. \tag{43}$$

となる。(42)式は、浮体によって入射波が反射波と透過波に分離されても、全体としての波エネルギーは保存されることを示している。

また、(42)式において（38）式を考慮すると

$$\boxed{\left|R^+\right| = \left|R^-\right|} \tag{44}$$

であることがわかる。そこで反射波の位相について考えてみよう。

$$R^+ = |R|e^{i\varepsilon_{R+}} \qquad T^+ = T^- = |T|e^{i\varepsilon_T}$$
$$R^- = |R|e^{i\varepsilon_{R-}}$$

と書くことにすると、(43)式より

$$|T|e^{i\varepsilon_T}|R|e^{-i\varepsilon_{R-}} + |T|e^{-i\varepsilon_T}|R|e^{i\varepsilon_{R+}} = 0$$

$$\therefore |T||R|\left\{e^{i(\varepsilon_T - \varepsilon_{R-})} + e^{i(-\varepsilon_T + \varepsilon_{R+})}\right\} = 0$$

したがって

$$\boxed{\arg(R^+) + \arg(R^-) = \pm\pi + 2\arg(T)} \qquad (45)$$

という関係が得られる。

３D

次に 3 次元の場合は、(35)式は図-4 のように解釈される。すなわち、β_2 方向の入射波に対して浮体の攪乱で $\beta_1 + \pi$ 方向に発散していく波は、β_1 方向の入射波に対して浮体の攪乱で $\beta_2 + \pi$ 方向に発散していく波と等しい。

なお、$\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$ とすると図-5 のようになって、3 次元の場合も向かい合う向きの透過波は互いに等しいことがわかる。

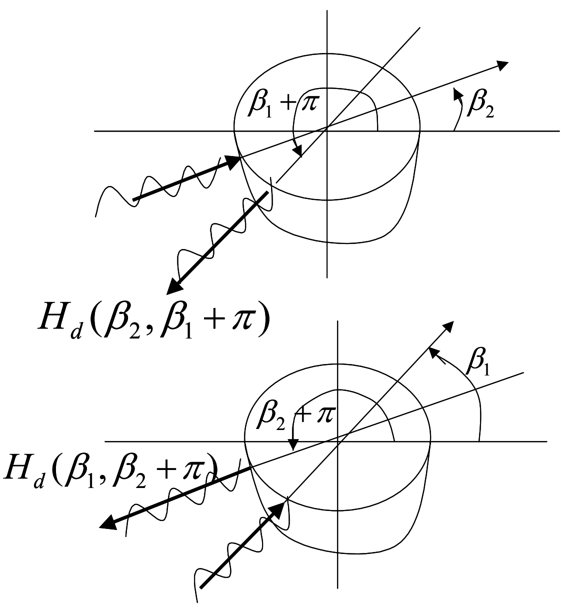


図-4　3 次元の場合の Diffraction wave

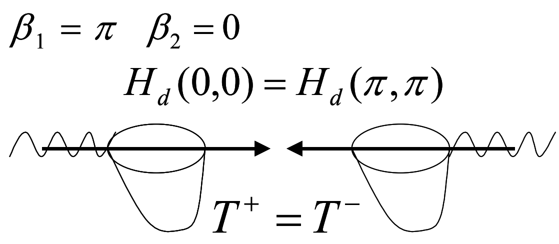


図-5　3 次元の場合の透過波

(36b)式からは次の関係が得られる。

$\beta_1 = \beta_2 \equiv \beta$ とおくと

$$H_d^{\,*}(\beta, \beta) - H_d(\beta, \beta) = \frac{iK}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H_d(\beta, \theta)|^2 d\theta$$

したがって

$$\boxed{\mathrm{Im}\, H_d(\beta, \beta) = -\frac{K}{4\pi}\int_0^{2\pi} |H_d(\beta, \theta)|^2 d\theta} \qquad (46)$$

3.4　Haskind-花岡-Newman の関係

今度は(20)式の積分を Scattering potential φ_S と radiation potential φ_j に適用してみよう。そうすると

$$I(\varphi_S(\beta), \varphi_j) = \iint_C \left\{\varphi_S(\beta)\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_j \frac{\partial \varphi_S(\beta)}{\partial n}\right\} dS$$
$$= DH_j(\beta + \pi) \qquad (47)$$

を得る。ここで、[H] $\partial\varphi_S / \partial n = 0$ on C　及び(24)式の関係を用いている。

Scattering potential による圧力を次のように表記する。

$$\mathrm{Re}\left[p_S e^{i\omega t}\right] \equiv -\rho\frac{\partial \Phi_S}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[\rho g a \varphi_S e^{i\omega t}\right]$$

$$\therefore p_S \equiv \rho g a \varphi_S$$

この圧力を積分することにより波強制力が以下のように得られる。

$$E_j(\beta) \equiv \iint_C p_S(\beta) n_j dS = \rho g a \iint_C \varphi_S(\beta)\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS$$
$$= \rho g a D H_j(\beta + \pi)$$

ここで(47)式を用いている。したがって

$$\boxed{E_j(\beta) = \rho g a D H_j(\beta + \pi)} \qquad (48)$$

これが Haskind-花岡-Newman の関係といわれるもので、β 方向の入射波による j モードの波強

制力$E_j(\beta)$は、j モードの動揺で$\beta+\pi$方向に発散していく波の複素振幅で表されることを示している。(図-6 参照)

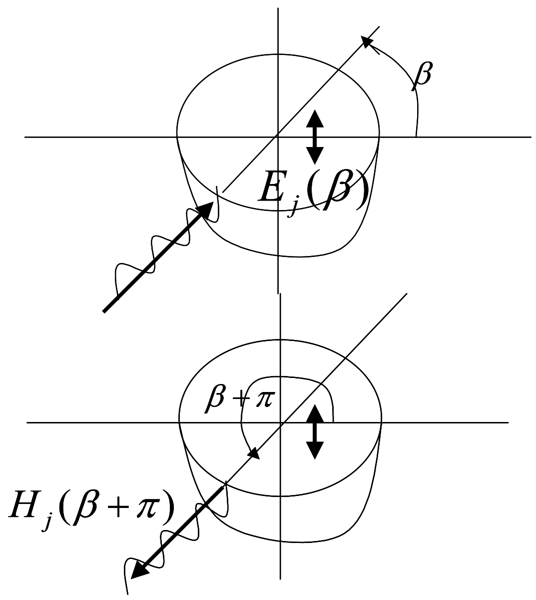


図-6　Haskind-花岡-Newman の関係

3.5　Scattering wave と radiation wave の関係

さらに今度は(23)式の積分を Scattering potential　φ_Sと radiation potentialφ_j^*に適用してみよう。
そうすると、前節と同様にして

$$I(\varphi_S(\beta),\varphi_j^*)=\iint_C\left\{\varphi_S(\beta)\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial n}-\varphi_j^*\frac{\partial\varphi_S(\beta)}{\partial n}\right\}dS$$

$$=DH_j(\beta+\pi)$$

を得る。一方、(23)式より
2D

$$I(\varphi_S(\beta),\varphi_j^*)=DH_j^*(\beta)$$
$$-iD\left\{H_d(\beta,0)H_j^*(0)+H_d(\beta,\pi)H_j^*(\pi)\right\}$$

3D

$$I(\varphi_S(\beta),\varphi_j^*)=DH_j^*(\beta)$$
$$-\frac{iDK}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_d(\beta,\theta)H_j^*(\theta)d\theta$$

であるので以下の関係式が得られる。

2D

$$H_j(\beta+\pi)-H_j^*(\beta)=$$
$$=-i\left\{H_d(\beta,0)H_j^*(0)+H_d(\beta,\pi)H_j^*(\pi)\right\} \tag{49a}$$

3D

$$H_j(\beta+\pi)-H_j^*(\beta)=$$
$$=-\frac{iK}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_d(\beta,\theta)H_j^*(\theta)d\theta \tag{49b}$$

(49)式の意味を考えてみよう。
2D
まず、2次元の場合、(49a)式に$\beta=0$及び$\beta=\pi$を代入し、(37)の標記を用いると以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned}R^+H_j^*(\pi)+T^+H_j^*(0)&=H_j(\pi)\\R^-H_j^*(0)+T^-H_j^*(\pi)&=H_j(0)\end{aligned} \tag{50}$$

(50)式は radiation wave と diffraction wave の間に成り立つ関係を表しているが、diffraction wave である反射波や透過波は物体の形状（と周波数）のみで決まるものであり、浮体の動揺には係わりがない。しかるに(50)式の関係が成り立つということは、radiation wave 間の位相は完全に独立ではなく、何らかの関係が存在することになる。その様子を、最も端的に見ることができる左右対称浮体の場合について調べてみよう。

左右対称浮体の場合、まず$R^+=R^-$であることは明らかにである。Radiation の Kochin 関数を次のように標記しよう。

$$\begin{aligned}&\text{Sway}\quad H_1(0)=|H_1(0)|e^{i\varepsilon_1},\quad H_1(\pi)=-H_1(0)\\&\text{Heave}\quad H_3(0)=|H_3(0)|e^{i\varepsilon_3},\quad H_3(\pi)=H_3(0)\\&\text{Roll}\quad H_5(0)=|H_5(0)|e^{i\varepsilon_5},\quad H_5(\pi)=-H_5(0)\end{aligned} \tag{51}$$

ここで Sway,Roll の場合、浮体の左右で Kochin 関数の符号が変わるのは、発散波の位相が逆位相であることを示している。
(50)式において、j=1 とすると

$$R|H_1(0)|e^{-i\varepsilon_1}-T|H_1(0)|e^{-i\varepsilon_1}=|H_1(0)|e^{i\varepsilon_1}$$

$$\therefore R-T=e^{i2\varepsilon_1} \tag{52}$$

j=5 の場合も同様に

$$\therefore R - T = e^{i2\varepsilon_5} \qquad (53)$$

j=3 とすると

$$R|H_3(0)|e^{-i\varepsilon_3} + T|H_3(0)|e^{-i\varepsilon_3} = |H_3(0)|e^{i\varepsilon_3}$$

$$\therefore R + T = e^{i2\varepsilon_3} \qquad (54)$$

(52)(53)(54)式は、(50)式のどちらに代入しても同じ結果となる。以上により、

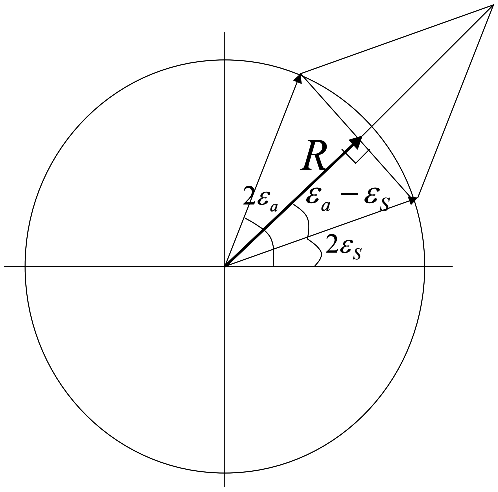
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_5 \quad (\text{あるいは}\ \varepsilon_1 = \varepsilon_5 \pm \pi) \qquad (55)$$

$$R = \frac{1}{2}(e^{i2\varepsilon_3} + e^{i2\varepsilon_{1,5}})$$
$$T = \frac{1}{2}(e^{i2\varepsilon_3} - e^{i2\varepsilon_{1,5}}) \qquad (56)$$

という関係式が得られる。このように、反射波、透過波は radiation wave の位相だけを使って表すことができる。前に述べたように、反射波、透過波は物体の形状（と周波数）のみに依存するものであるから、左右対称モードの動揺による発散波の位相は互いに等しい（か$\pm\pi$ の差)、また左右反対称モードの動揺による発散波の位相も互いに等しい（か$\pm\pi$ の差）と言うことができる。このことはまた、(48)式の Haskind-花岡-Newman の関係をみると、波強制力の位相についても同じことが言えることになる。すなわち

$$\arg(E_1) = \arg(E_5)$$
あるいは
$$\arg(E_1) = \arg(E_5) \pm \pi \qquad (57)$$

(56)式はまた次のように書き換えることができる。(図-7 参照)



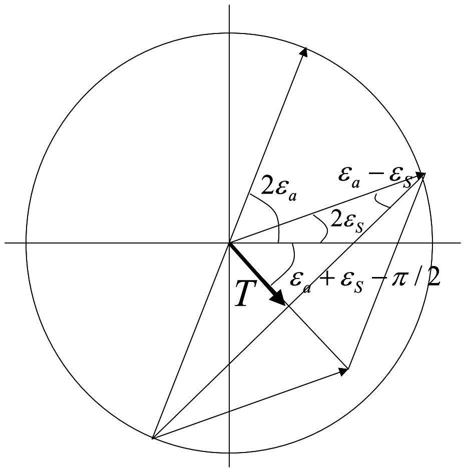


図-7 Radiation wave の位相と反射波、透過波

$$R = \cos\varepsilon^- e^{i\varepsilon^+}$$
$$T = \sin\varepsilon^- e^{i(\varepsilon^+ - \pi/2)} \qquad (58)$$

ここで

$$\varepsilon^- = \varepsilon_a - \varepsilon_s、\ \varepsilon^+ = \varepsilon_a + \varepsilon_s$$

ε_a は左右反対称動揺モードの発散波の位相

ε_s は左右対称動揺モードの発散波の位相

とする。

この(58)式において、(42)式の関係が明確に示されている。また、反射波の位相は透過波の位相と$\pi/2$ だけの差があることがわかる。

左右対称浮体の場合、(55)式から

$$\frac{H_5(0)}{H_1(0)} = \frac{H_5(\pi)}{H_1(\pi)} = \frac{H_5^*(0)}{H_1^*(0)} = \frac{H_5^*(\pi)}{H_1^*(\pi)} \equiv l \qquad (59)$$

と書ける。ここでl は実数である。そこで(34a)式より、以下のような減衰力係数間の関係が得られる。

$$N_{15} = N_{51} = lN_{11}$$
$$N_{55} = l^2 N_{11} \qquad (60)$$

すなわち sway の減衰力係数から roll の減衰力係数が計算できる。またその逆も可能である。

３D

次に 3 次元の場合の(49b)式の意味を考えてみよう。簡単のために浮体形状は図-8 に示すような軸対称物体とする。この場合、波の入射方向は

$\beta = 0$ に限定しても以下の議論の一般性は失われない。

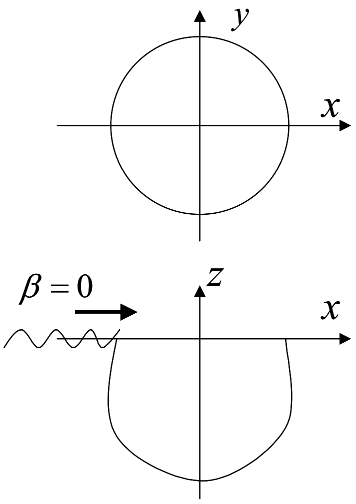


図-8　3次元軸対称浮体

Radiation の Kochin 関数を次のように標記する。

Sway　$H_1(\theta) = H_1(0)\cos\theta$

Heave　$H_3(\theta) = H_3(0)$

Roll　$H_5(\theta) = H_5(0)\cos\theta$　(61)

このとき、減衰力係数は(34b)式より

$$N_{11} = \frac{\rho\omega DK}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_1^*(0)\cos\theta \cdot H_1(0)\cos\theta d\theta = \frac{\rho\omega DK}{4}\left|H_1(0)\right|^2$$

$$N_{33} = \frac{\rho\omega DK}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_3^*(0)\cdot H_3(0)d\theta = \frac{\rho\omega DK}{2}\left|H_3(0)\right|^2$$

$$N_{55} = \frac{\rho\omega DK}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_5^*(0)\cos\theta \cdot H_5(0)\cos\theta d\theta = \frac{\rho\omega DK}{4}\left|H_5(0)\right|^2$$

(62)

波強制力は(48)式より

$$E_1 = \rho gaDH_1(\pi) = -\rho gaDH_1(0)$$
$$E_3 = \rho gaDH_3(\pi) = \rho gaDH_3(0)$$
$$E_5 = \rho gaDH_5(\pi) = -\rho gaDH_5(0)$$

(63)

である。

(49b)式で j=1 あるいは 5 を代入すると

$$-H_{1,5}(0) - H_{1,5}^*(0) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(0,\theta)\cos\theta d\theta \cdot H_{1,5}^*(0)$$

したがって

$$\boxed{\frac{H_{1,5}(0)}{H_{1,5}^*(0)} = -1 + \frac{iK}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(0,\theta)\cos\theta d\theta} \quad (64)$$

(49b)式で j=3 を代入すると

$$H_3(0) - H_3^*(0) = -\frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(0,\theta)d\theta \cdot H_3^*(0)$$

したがって

$$\boxed{\frac{H_3(0)}{H_3^*(0)} = 1 - \frac{iK}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(0,\theta)d\theta} \quad (65)$$

という関係が得られる。また、(64)式と(63)式より、2次元のときと同様な、波強制力の位相に関する関係が得られる。

$$\arg(E_1) = \arg(E_5)$$

あるいは

$$\arg(E_1) = \arg(E_5) \pm \pi \quad (66)$$

したがって3次元軸対称浮体の場合も、2次元左右対称浮体の場合と同様に、減衰力係数間の関係(60)式が成り立つ。

4.　まとめ

第 2 章で準備した速度ポテンシャルの定義と積分 $I(\phi_i, \phi_j)$ に、想定し得る全てのポテンシャルを適用し、様々な有用な関係を得ることができた。それらを一覧にまとめると表-1 のようになる。ここで、矢印で結ばれた升目はお互いに複素共役であることを示す。

本稿は、以前に著者が作成し、折にふれて使用していたメモをまとめ直したものである。本稿が、浮体力学を志す人にとって、その理解の一助になることを期待する。

また、本稿で述べている radiation のモードは、通常の heave や roll や pitch に限らず、浮体の一部が膨らんだり縮んだりするようなモードにも適用可能である。浮体表面の運動が周期的で、$\partial\varphi_j / \partial n = n_j(C)$ と表現されればどんなモードでもよい。ただし $n_j(C)$ は実数でなければならない。

さらには、複数の浮体の場合にも拡張適用できることを付録に示した。

参考文献

本稿を理解するには特段の参考文献は必要としないし、また挙げれば切りがないが、原論文にあたりたい読者はまず、

別所正利：逆時間ポテンシャルについて、関西造船協会誌、第 159 号（1975）

J.N.Newman: Interaction of waves with two-dimensional obstacles: a relation between the radiation and scattering problems, J. of Fluid Mechanics, Vol.71,part 2, (1975)

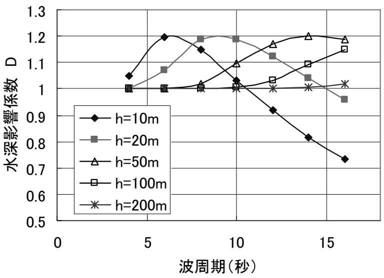
などを参照されたい。また、下記の分かり易い解説もある。

柏木正：よくわかる海事流体力学、第 6 章船舶・海洋構造物の動揺を計算する、日本造船学会誌第 845 号（1999）

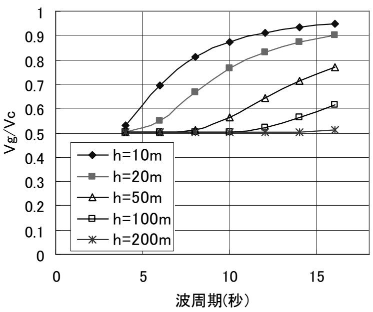
付録-1　有限水深波の群速度

有限水深波およびその両極限である浅水波、無限水深波について、それらの位相速度、群速度の関係を付表-1 にまとめて示す。

また、有限水深の場合の水深影響係数 D と V_g / V_c をそれぞれ付図-1、付図-2 に示す。



付図-1　水深影響係数



付図-2　群速度と位相速度の比

付録-2　次元について

本稿で示した関係式などを具体的な問題に適用する場合には、ここで扱っている radiation potential および diffraction potential 並びにそれらの Kochin 関数はそれぞれ以下の次元を有していることに注意していただきたい。

付表-2　速度ポテンシャルと Kochin 関数の次元

2D

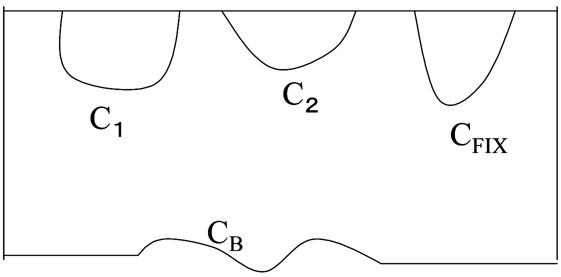
Radiation		Diffraction	
φ_j	$[L]$	$\varphi_0, \varphi_d, \varphi_S$	$[1]$
H_j	$[L]$	H_d	$[1]$

3D

Radiation		Diffraction	
φ_j	$[L]$	$\varphi_0, \varphi_d, \varphi_S$	$[1]$
H_j	$[L^2]$	H_d	$[L]$

付録-3　複数浮体の場合

本稿で示した関係式などは、付図-3 に示すように、複数の浮体の場合にもすべて成り立つものである。また、その内のいくつかが固定構造物であったり、海底の一部が凹凸を含んでいてもかまわない。



付図-3　複数浮体の場合

この場合は $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_{FIX} + C_B$ となる。例えば流体力の対称性について考えてみよう。1の浮体の i モード動揺によって 2 の浮体の j モードに働く流体力と、2 の浮体の j モード動揺によって 1 の浮体の i モードに働く流体力は、それぞれ

$$f_{ij} = \iint_{C_2} \varphi_i n_j dS = \iint_{C_2} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS$$

$$f_{ji} = \iint_{C_1} \varphi_j n_i dS = \iint_{C_1} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS$$

である。ここで φ_i は付図-3 の状況下での 1 の浮体の i モード動揺による radiation potential、

φ_j は2の浮体の j モード動揺による radiation potential を表す。φ_i, φ_j に(10)式を適用する。その際、$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_{FIX} + C_B$ であるが、C_{FIX}, C_B 上などでは法線速度は 0 であるので、結局

$$f_{ij} = \iint_{C_2} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS = \iint_{C_1} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = f_{ji}$$

が得られる。

次に Haskind-花岡-Newman の関係を考えてみよう。付図-3 のような状況下で β 方向に進行する入射が当たったときの scattering potential を $\varphi_S(\beta)$ とする。このとき1の浮体の i モード方向に働く波強制力を考える。

$$E_i(\beta) = \rho g a \iint_{C_1} \varphi_S n_i dS = \rho g a \iint_{C_1} \varphi_S \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS$$

$$= \rho g a \iint_{C_1 + C_2 + C_{FIX} + C_B} \varphi_S \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \rho g a D H_i(\beta + \pi)$$

ここでも C_1 以外の積分路では φ_i の法線速度は 0 であることを考慮している。$H_i(\beta + \pi)$ は付図-3 の状況下で1の浮体の i モード動揺による $(\beta + \pi)$ への発散波を表す Kochin 関数である。

その他の関係も同様にして、全て成り立つことを示すことができる。

表-1　速度ポテンシャル間の積の関係

	φ_j	φ_j^{*}	$\varphi_S(\beta_j)$	$\varphi_S^{*}(\beta_j)$
φ_i	3.1 節 Radiation 流体力の対称性 (29)式	3.2 節 減衰力係数 (34)式	3.4 節 Haskind-花岡-Newmann の関係 (48)式	＊
φ_i^{*}	−	＊	3.5 節 Scattering Wave と Radiation Wave の関係 (49)式	＊
$\varphi_S(\beta_i)$	−	−	3.3 節 Scattering Wave 間の関係 (35)式	3.3 節 Scattering Wave 間の関係 (36)式
$\varphi_S^{*}(\beta_i)$	−	−	−	＊

付表-1　進行波の位相速度と群速度

分散関係式	位相速度（$V_c = \dfrac{\omega}{K}$）	群速度（$V_g = \dfrac{d\omega}{dK}$）
浅水波 $\dfrac{\omega^2}{g}h = K^2 h^2$	$V_c = \sqrt{gh}$	$V_g = \sqrt{gh}$ （$V_g / V_c = 1$）
有限水深波 $\dfrac{\omega^2}{g}h = Kh\tanh Kh$	$V_c = \sqrt{\dfrac{g\tanh Kh}{K}}$	$V_g = \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{\omega}D$ $D = \tanh Kh + Kh/\cosh^2 Kh$ （$V_g / V_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{K}{K_\infty}D$）
無限水深波 $\dfrac{\omega^2}{g}h = Kh$	$V_c = \sqrt{\dfrac{g}{K_\infty}} = \dfrac{g}{\omega}$	$V_g = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{K_\infty}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{\omega}$ （$V_g / V_c = \dfrac{1}{2}$）