スライディングメッシュにおける物理量の保存性

ＣＦＤ研究開発センター　*佐藤　陽平
スーパーエコシッププロジェクト　　日野　孝則

１．目的

海事流体力学における CFD（数値流体力学）の目標の一つは、船舶の流体性能の高精度予測である。また、CFD 技術の進展と計算機能力の向上に伴い、CFD の適用範囲の拡大が期待されている。本研究では、ひとつの方向として、舵やプロペラのような 可動物体を CFD で高精度に扱う手法の開発を行う。舵やプロペラの計算の高精度化は自航性能、操縦性能の予測や船尾変動圧の推定に有効だと考えられる。

従来、プロペラ力や舵力等はモデル化され、簡易計算法の結果を体積力などの形で CFD 計算に取り込む手法が一般的であるが、計算結果がモデルに依存してしまう、または、モデルの適用範囲外の流場を推定できないという欠点がある。この問題を解決するためには、モデルを用いずに、プロペラや舵の格子を作成し、直接数値計算する必要があるが、これらの可動物体は数値計算上の取り扱いが難しい。

可動物体を有する物体周りの流れを計算する手法としては、スライディングメッシュ法 [1]、重合格子法 [2]、移動格子法 [3]が挙げられる。今回、保存性の精度が高いこと、および計算負荷が小さいことを考慮して、スライディングメッシュ法を採用することとした。

本報では、特にスライディングメッシュの保存性に焦点を当て、その定式化と計算上の取り扱いについて報告する。

２．計算手法

２．１．支配方程式

支配方程式は、３次元 Navier-Stokes 方程式および擬似圧縮性を導入した連続の式である。

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial(e+e_v)}{\partial x}+\frac{\partial(f+f_v)}{\partial y}+\frac{\partial(g+g_v)}{\partial z}=0 \qquad \text{---(1)}$$

ただし、q, e, f, g, e_v, f_v および g_v は次式で定義される。

$$q=\begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix},\begin{bmatrix} e & f & g \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta u & \beta v & \beta w \\ u^2+p & uv & uw \\ vu & v^2+p & vw \\ wu & wv & w^2+p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_v & f_v & g_v \end{bmatrix}=-\left(\frac{1}{Re}+\nu_t\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2u_x & u_y+v_x & u_z+w_x \\ u_y+v_x & 2v_y & v_z+w_y \\ u_z+w_x & v_z+w_y & 2w_z \end{bmatrix} \qquad \text{---(2)}$$

ここで、β は擬似圧縮性パラメーター、ν_t は渦粘性係数である。下添え字の $_{x,y,z}$ は、各方向における偏微分を表す。

２．２．数値計算法

海上技術安全研究所において開発を進めている３次元 Navier-Stokes ソルバーSURF[5]を基に開発を進める。SURF の主な特徴を以下に示す。

-有限体積法により空間離散化する。
-変数配置は、圧力、速度ともにセル中心とする。
-３角形もしくは４角形の面から構成される多面体の非構造格子を計算可能である。
-アルゴリズムは擬似圧縮法を用いる。非定常問題を解く際には、各タイムステップで、連続の条件を満たすように収束計算を行う。
-対流項は風上差分法による２次精度、粘性項は２次精度である。

２．３．離散化

(1)式を体積積分すると、次式となる。

$$\int_V \frac{\partial q}{\partial t}dV+\int_\Omega\left\{(e+e_v)dS_x+(f+f_v)dS_y+(g+g_v)dS_z\right\}=0 \qquad \text{---(3)}$$

格子が動く場合は、Leibniz rule[4]により次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V q dV+\int_\Omega\left\{(e'+e_v)dS_x+(f'+f_v)dS_y+(g'+g_v)dS_z\right\}=0 \qquad \text{---(4)}$$

ただし、e', f' および g' は次式で定義される。

$$[e' \quad f' \quad g'] = \begin{bmatrix} \beta u & \beta v & \beta w \\ u(u-u_g)+p & u(v-v_g) & u(w-w_g) \\ v(u-u_g) & v(v-v_g)+p & v(w-w_g) \\ w(u-u_g) & w(v-v_g) & w(w-w_g)+p \end{bmatrix} \quad \text{---(5)}$$

ここで、u_g, v_g および w_g は格子の移動速度である。

(4)式を保存形で空間離散化を行うと次式となる。

$$\frac{\partial(Vq)}{\partial t} + \sum_{\text{Faces}} (e'+e_v)S_x + (f'+f_v)S_y + (g'+g_v)S_z = 0 \quad \text{---(6)}$$

非粘性項 F と粘性項 R に分離すると次式となる。

$$\frac{\partial(Vq)}{\partial t} + \sum_{\text{Faces}} F + \sum_{\text{Faces}} R = 0 \quad \text{---(7)}$$

ただし、F および R は次式で定義される。

$$F = \sum_{\text{Faces}} e'S_x + f'S_y + g'S_z$$
$$R = \sum_{\text{Faces}} e_vS_x + f_vS_y + g_vS_z \quad \text{---(8)}$$

F および R の計算方法は、スライディングメッシュでの境界条件と併せて、次章で説明する。

3．スライディングメッシュの境界条件

スライディングメッシュの境界条件を導くにあたり、例として物理空間に固定されている領域 Zone A と回転している領域 Zone B を考える（図 1)。ここで、Zone A と B との境界をスライディング面と定義する。今回、計算対象として、舵やプロペラ等を想定しているので、回転は一軸（固定軸）のみとする。

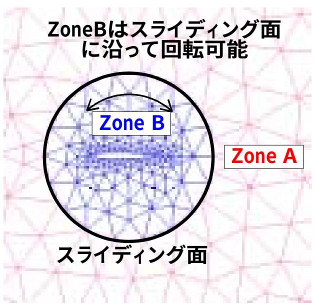

図 1: Zone A,B およびスライディング面の定義

3．1. 第一条件（幾何学的条件）

まず、幾何学的条件として、Zone A と B はスライディング面を介して、隙間なく隣接している必要がある。

一般に、スライディング面では、格子点と格子点とは一致しないので、隙間が生じてしまう（図 2 上段)。隙間を生じないようにするためには、次の(a)と(b)の二通りの方法がある。

(a) オリジナル面上に存在する格子点を用いて、新たなサブ面を作成する（図 2 中段)。

(b) スライディング面の形状を曲面として取り扱い、Zone A と B でその曲面を共有する（図 2 下段)。

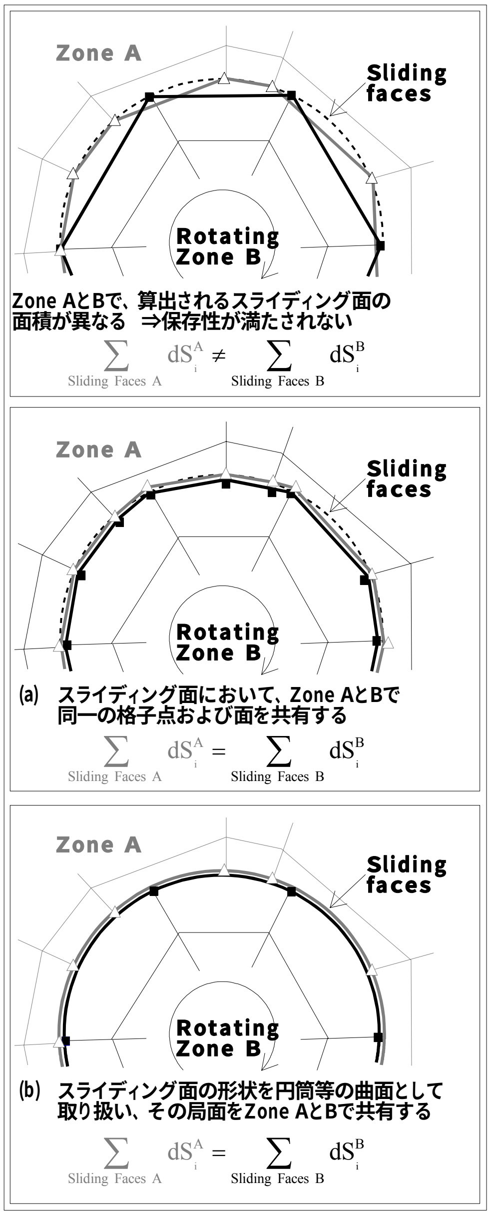

図 2: スライディング面における面形状の取り扱い

(a)の方法を用いると、セル境界面は全て平面から構成され、通常どおりに面積ベクトルを算出できるが、Zone A と B の位置関係により、セルの体積が変

化する。(b)の方法では、セル境界面のうち曲面の境界面は解析的に面積ベクトルを算出する必要があるが、セルの体積は変化しない。

(a)もしくは(b)の方法により、Zone A と B は同一のスライディング面形状を共有し、Zone A および B 側から計算したスライディング面の面積ベクトルの合計は等しくなり、次式を満足する。

$$\sum_{\text{Sliding Faces A}} S_i^A = \sum_{\text{Sliding Faces B}} S_i^B \,,\ (\ i = x,y,z) \qquad \text{---(9)}$$

ここで、上添え字 ^{A},^{B} は、それぞれ Zone A および B における計算を意味する。

３．２．第二条件　（フラックスの保存性）

第二条件は、スライディング面を通過するフラックスの総量が、Zone A から見ても Zone B から見ても等しいことである。これは、次式で表される（(6)式参照)。

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{Sliding Faces A}} \left(e^A + e_v^A\right)S_x + \left(f^A + f_v^A\right)S_y + \left(g^A + g_v^A\right)S_z \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e'^B + e_v^B\right)S_x + \left(f'^B + f_v^B\right)S_y + \left(g'^B + g_v^B\right)S_z\end{aligned} \qquad \text{---(10)}$$

Zone B は格子系が回転しているため、格子の移動を e', f' および g' として考慮する必要がある。今回、スライディング面における格子の移動方向は、スライディング面に対して接線方向のみと制約すると、(10)式の右辺は、

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e'^B + e_v^B\right)S_x + \left(f'^B + f_v^B\right)S_y + \left(g'^B + g_v^B\right)S_z \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e^B + e_v^B\right)S_x + \left(f^B + f_v^B\right)S_y + \left(g^B + g_v^B\right)S_z \\ &- \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ uu_g \\ vu_g \\ wu_g \end{bmatrix} S_x + \begin{bmatrix} 0 \\ uv_g \\ vv_g \\ wv_g \end{bmatrix} S_y + \begin{bmatrix} 0 \\ uw_g \\ vw_g \\ ww_g \end{bmatrix} S_z \right\} \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e^B + e_v^B\right)S_x + \left(f^B + f_v^B\right)S_y + \left(g^B + g_v^B\right)S_z \\ &- \sum_{\text{Sliding Faces B}} \begin{bmatrix} 0 \\ u\left(u_gS_x + v_gS_y + w_gS_z\right) \\ v\left(u_gS_x + v_gS_y + w_gS_z\right) \\ w\left(u_gS_x + v_gS_y + w_gS_z\right) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e^B + e_v^B\right)S_x + \left(f^B + f_v^B\right)S_y + \left(g^B + g_v^B\right)S_z \qquad \text{---(11)}\end{aligned}$$

$$\because\ u_gS_x + v_gS_y + w_gS_z = 0$$

となる。従って、(10)式は次式へと簡略化される。

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{Sliding Faces A}} \left(e^A + e_v^A\right)S_x + \left(f^A + f_v^A\right)S_y + \left(g^A + g_v^A\right)S_z \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} \left(e^B + e_v^B\right)S_x + \left(f^B + f_v^B\right)S_y + \left(g^B + g_v^B\right)S_z\end{aligned} \qquad \text{---(12)}$$

これはフラックス総量の保存を示す式であるが、非粘性項と粘性項は独立にこの関係を満たすと考えられるため、第二条件は(13)および(14)式となる。

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{Sliding Faces A}} e^AS_x + f^AS_y + g^AS_z \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} e^BS_x + f^BS_y + g^BS_z\end{aligned} \qquad \text{---(13)}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\text{Sliding Faces A}} e_v^AS_x + f_v^AS_y + g_v^AS_z \\ &= \sum_{\text{Sliding Faces B}} e_v^BS_x + f_v^BS_y + g_v^BS_z\end{aligned} \qquad \text{---(14)}$$

３．２．１．非粘性フラックスの保存性

非粘性フラックスの取り扱いを説明する。(8)式より、セル境界面での非粘性フラックス F は、セル境界面の面積ベクトルを用いて次式で定義される。

$$F = eS_x + fS_y + gS_z = \begin{bmatrix} \beta U \\ uU + pS_x \\ vU + pS_y \\ wU + pS_z \end{bmatrix} \qquad \text{---(15)}$$

ここで、U は次式で定義される。

$$U = uS_x + vS_y + wS_z \qquad \text{---(16)}$$

ここで、i をセルのインデックス、j を隣接するセル、(i+j)/2 をセル i と j の境界面と定義する（図 3)。

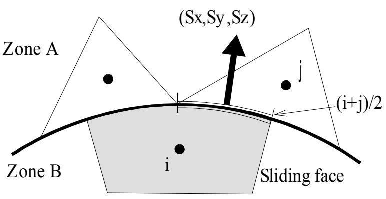

図 3　(i+j)/2 における面積ベクトル

非粘性フラックスは Flux-difference splitting 法による風上差分で次式のように評価する。

$$F_{(i+j)/2} = \frac{1}{2}\left[F\left(q^R\right) + F\left(q^L\right) - |A|\cdot\left(q^R - q^L\right)\right] \qquad \text{---(17)}$$

ここで、|A|はフラックス・ヤコビヤンから求められるマトリクスである。また、境界面での q^L および q^R は以下のように MUSCL 法によって 2 次精度で評価される（図 4 参照)。

$$q^L = q_i + \nabla q_i \cdot \left(x_{(i+j)/2} - x_i \right)$$
$$q^R = q_j + \nabla q_j \cdot \left(x_{(i+j)/2} - x_j \right) \quad \text{---(18)}$$

ここで、$x_{(i+j)/2}$ は面の中心、x_i および x_j はセル i,j の中心座標である。

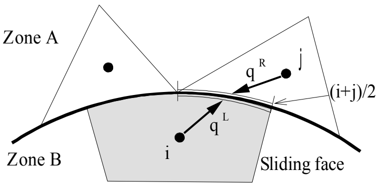

図 4　q の外挿入

各セルにおける ∇q は発散定理により、隣接するセルにおける q から算出される。

以上により、(i+j)/2 における非粘性フラックスが求まる。隣接する j セルに対して同様の計算を繰り返して非粘性フラックスを合計することで、i セルの非粘性項が求められる。

スライディング面に着目すると、幾何学的条件により、(i+j)/2 における面積ベクトルは、セル i から見ても j から見ても同値であるため、(i+j)/2 において非粘性フラックスは同値、すなわち保存することとなる。従って、スライディング面全域での非粘性フラックスの合計も、Zone A からみても Zone B から見ても等しくなる。すなわち、(13)式を満たす。

３．２．２．粘性フラックスの保存性

粘性フラックスの取り扱いを説明する。セル境界面で定義されている粘性フラックス R は、セル境界面の面積ベクトルを用いて、次式で示される。

$$R_{(i+j)/2} = \left(e_v S_x + f_v S_y + g_v S_z \right) \quad \text{---(19)}$$

セル境界面での速度勾配は、

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(i+j)/2} = \frac{1}{V^*} \sum_{Faces} u S_x = \frac{1}{V^*} \left(\frac{u_i + u_k + u_{k+1}}{3} S_{x,i,k,k+1} + L \right) \quad \text{---(20)}$$

のように、図 5 に示すコントロールボリューム V^* およびセル中心とセル頂点の速度を用いて算出する。頂点の速度は、重み関数を用いた内挿で求める。以上の計算を隣接する全ての j セルに対して行い、i セルの粘性フラックスを求める。

スライディング面に着目すると、非粘性フラックス計算の場合と同様に、(i+j)/2 面において Zone A から見ても Zone B から見ても粘性フラックスは同値であるため、スライディング面全域において粘性フラックスを合計しても同値となる。すなわち、(14)式が満たされる。

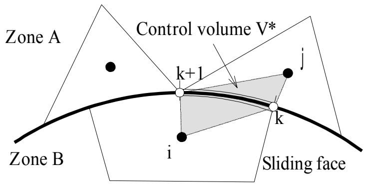

図 5　速度勾配評価のためのｺﾝﾄﾛｰﾙﾎﾞﾘｭｰﾑ

４．まとめ

スライディングメッシュにおける境界条件、すなわち幾何学的条件、非粘性フラックスの保存および粘性フラックスの保存を満足する計算方法を、SURF の離散化に則して示した。

今後、SURF コードを変更することにより、スライディングメッシュを用いたプロペラおよび舵の計算が可能であると考えられる。

[参考文献]

[1] Rumsey C. L., “Computation of Acoustic Waves Through Sliding-Zone Interfaces Using an Euler /Navier-Stokes Code”, AIAA Paper No.96-1752, (1996).

[2] Löhner R., Sharov D., Luo H. and Ramamurti R., “Overlapping Unstructured Grids”, AIAA-01-0439 (2001).

[3] Burg C.O.E., Sreenivas K., Hyams D.G., Mitchell B., “Unstructured Nonlinear Free Surface Simulations for the Fully-Appended DTMB Model 5415 Series Hull Including Rotating Propulsors”, Proc. 24th Symposium on Naval Hydro., Japan, (2002), pp171-186.

[4] Ferziger,J.H. and Perić M., “Computational Methods for Fluid Dynamics”, Springer (1996).

[5] Hino T.,“ A 3D Unstructured Grid Method for Incompressible Viscous Flows”, Journal of the Society of Naval Architects, Japan, Vol.182, pp 9-15.

[6] 宇都,児玉,”複合格子法を用いた翼列周り粘性流の数値計算”,関西造船協会誌,第 215 号, (1991),pp61-67.