

PS-16 波動の解析信号による表現および その超音波パルスを用いた材料評価への応用について

輸送高度化領域 新材料利用研究グループ *菅澤 忍

1. まえがき

材料の物性評価や非破壊評価において、超音波パルスは取り扱いが比較的簡単な割には高精度の結果が得られるため広く用いられている。実用上は波形は伝搬するに際して、歪まないことを前提条件にして、パルスのピーク値間の時間差を測定することで測定データを処理している。しかしながら、多くの材料は、伝搬する波動を歪ませる原因となる分散や減衰率の周波数依存性を持つため、たんなる波形を比較する方法では、正確な時間差を求めることができない場合が多くなる。

このような状況でも超音波パルスを適用できるようにするためには、パルスがどのように分散性媒質下を伝搬するかについての理解がまず第一に必要となってくる。

本論文では、このような観点からの考察の結果を行った。その結果、波動を解析信号¹⁾に拡張する方法が有効であることを明らかにするとともに、実際の材料に適用した結果について報告する。

2. 分散性媒質下の波動の伝搬

初めに、実信号を解析信号に拡張する方法について述べ、その性質について論じる。

2.1 実信号の解析信号への拡張

解析信号とは、元の実信号を複素信号に拡張したものである。Hilbert 変換を

$$\hat{f}(t) \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t')}{t-t'} dt' \quad (1)$$

と定義すると(ただし、 P は Cauchy の主値を意味する)、

$$f(t) = f(t) + i\hat{f}(t) \quad (2)$$

によって表現することができる。特に、波動が Fourier 積分によって

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3)$$

と表現できる場合には $f(t)$ の解析信号は

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

となる。実数成分はもとの波動と同じである。この式の絶対値はもとの波動の包絡線となることが知られているが、さらに $f(t)$ から導出される以下の波動についても包絡線になっていることも容易に示すことができる(ただし、 ω_0 、 ϕ_0 は任意の定数とする)：

1. Fourier 変換として $F(\omega - \omega_0)$ を持つ信号
2. $\hat{f}(t)$ 、一般的には位相シフト ϕ_0 を持つ信号
3. 上記二つを任意に含むもの。

2.2 分散性媒質下における解析信号の伝搬

分散性媒質下を伝搬する波動はその包絡線が群速度で伝搬するとされているが、その議論を見ると振動数に微小な差がある二つの正弦波を加えて生じる波を考察することによって導出しており²⁾、パルスのような帯域を持っている場合には伝搬の仕方が明らかではないと思われる。この点を明らかにしたのが Brillouin³⁾ であるが、スペクトルが特殊な形状を持つと仮定しているため一般には成り立たない。

しかしながら、波動を解析信号に拡張することによって、以下に示すように、もし波動の周波数帯域内において群速度を一定と見なすことができるならば、解析信号の絶対値から得られる元の波動の包絡線は群速度で媒質内を伝搬することを導くことができる。

まず波動が x 軸の正の方向に伝搬する平面波を仮定し、原点において (3) 式のように振動しているものとする。すると、任意の位置 x における解析信号は、波動理論および (4) 式を用いて、

$$f(x, t) = 2 \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\{\omega t - k(\omega)x\}} d\omega \quad (5)$$

と表すことができる。波数 k が周波数依存性を持つため、 $f(x, t)$ は伝搬するに従って形が歪んでくることがわかる。一方、媒質内の群速度 v_g が帯域内で一定と見なせ、ある角振動数 ω_0 における位相速度が v_p という条件

を持つならば、分散関係は

$$k(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g} \quad (6)$$

によって与えられる。

さて、(5) 式の $\exp$ の引数を上の関係を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \omega t - k(\omega)x \\ = \omega(t - x/v_g) + (\omega_0 x/v_g - k_0 x) \end{aligned} \quad (7)$$

ようになる。上式の第2項は、 ω_0 、 k_0 が (6) 式を満足すれば常に定数であることを示すことができる。これを $K_0 x$ と表すことにすると、(5) 式は、

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 2e^{iK_0 x} \int_0^\infty F(\omega) e^{i\omega(t-x/v_g)} d\omega \\ &= e^{iK_0 x} f\left(t - \frac{x}{v_g}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。よって両辺の絶対値をとると、

$$|f(x, t)| = |f\left(t - \frac{x}{v_g}\right)| \quad (9)$$

が成り立つ。右辺は、直接代入することにより、 v_g を伝搬速度として持つ波動方程式:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_g^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

を満足することがわかるので、 $|f(x, t)|$ は速度 v_g で x 方向に伝搬していくことがわかる。すなわち、元の波動 $f(t)$ の包絡線は、原点における形を保ったまま、群速度で伝搬するという結果が得られる。

さらに、 $|f(x, t)|^2$ も (10) 式を満足する。この式は、次元がエネルギーに比例すること、及び、弾性エネルギーの伝搬速度は群速度であるという定理を考慮に入れると、弾性エネルギーの時間・空間領域上の伝搬を表していると考えることができる。

特に、材料に疲労や残留応力がある場合には、弾性エネルギーの伝搬機構に影響を与えるものと思われる。それゆえ、群速度を用いて材料の特性を評価する方が、従来行われているような位相速度を用いることより適当であると思われる。

この方法を超音波パルスエコー法に適用するには、エコー列を解析信号に変換し包絡線を求めてから、エコーのピーク間の時間間隔を求めればよい。伝搬距離がわかっている場合には群速度が、群速度がわかっている場合には伝搬距離（例えば非破壊計測における板厚）を求めることができる。また減衰率を求める場合でも、包絡

線のピークの減衰率を求める方が、元の波形のピークの減衰率を求める方法よりも適当である。

3. 解析信号の相互相関関数

実際の材料は、分散を持つだけでなく波動の減衰率が周波数依存性を持つ場合もある。このような場合には、解析信号の相互相関関数を用いることが有効であることを示す。また、実信号による計測においては、信号間の相互相関関数をとることによって信号に含まれる雑音成分を除去することができるため⁴⁾、解析信号に拡張した場合にも同様な性質が期待できる。

3.1 定義と性質

実信号 $f(t)$ 、 $g(t)$ が与えられたとき、その解析的相互相関関数を

$$C_{fg}(\tau) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t + \tau) dt \quad (11)$$

によって定義する。この式の実数成分は $f(t)$ 、 $g(t)$ の相互相関数

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t + \tau) dt \quad (12)$$

になっている。さらに、 $g(t)$ が Fourier 変換 $G(\omega)$ を持てば、

$$C_{fg}(\tau) = 4\pi \int_0^\infty F(\omega)^* G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (13)$$

が成り立つ。(1) 式より、これ自身解析信号としての性質を持つので $|C_{fg}(\tau)|$ は $C_{fg}(\tau)$ の包絡線になっている。

特に、 $f(t)$ と $g(t)$ が一致する場合は、解析信号の自己相関関数であり、簡単のため $C(\tau)$ と表すことにする。これは、(13) 式より

$$C(\tau) = 4\pi \int_0^\infty |F(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega \quad (14)$$

と書くことができる。実数成分は、 $f(t)$ の自己相関関数であり、 $C(\tau)$ と表すことにする。また、 $|C(\tau)|$ は $C(\tau)$ の包絡線であり、

$$\begin{aligned} \left| 4\pi \int_0^\infty |F(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega \right| &< 4\pi \int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= C(0) \end{aligned}$$

より、 $\tau = 0$ において最大値を持つ。さらに原点に関して対称な形状を持っている。

3.2 波動の伝搬解析への応用

以下に上記の方法の応用を示すが、パルスは時間軸上でお互いに分離していて重なりあうことはない仮定す

る。また、以下の(2)から(5)の場合は、波形は伝搬するに従って歪んでいくために、たんにパルスに含まれる位相の比較では正確な時間差を求めることができない。

(1) 媒質に分散がない場合

基準となるパルスを $f(t)$ とし、このパルスが媒質中を時間 τ_0 だけ伝搬したとき $g(t)$ になったとすると、 $g(t) = f(t - \tau_0)$ と表せる。これより $g(t)$ の Fourier 変換は $F(\omega)e^{-i\omega\tau_0}$ となるから、 $f(t)$ と $g(t)$ の解析的相互相関関数は(13)式より、

$$\begin{aligned} C_{fg}(\tau) &= 4\pi \int_0^\infty |F(\omega)|^2 e^{i\omega(\tau-\tau_0)} d\omega \\ &= C(\tau - \tau_0) \end{aligned} \quad (15)$$

になる。よって、3.1 より $|C_{fg}(\tau)|$ は $\tau = \tau_0$ において最大値を持つ。また、上式の実数成分を比較すれば、 $C_{fg}(\tau)$ は $\tau = \tau_0$ に関して対称であることがわかる。この性質は、波動が伝搬するに従って歪んで行くかの判断の基準に用いることができる。

(2) 位相シフトが加わる場合⁵⁾

パルスが τ_0 だけ伝搬し、 ϕ_0 だけの位相シフトが加わった波動 $g(t)$ は、

$$g(t) = \int_{-\infty}^\infty F(\omega) e^{i\{\omega(\tau-\tau_0) + \text{sgn}(\omega)\phi_0\}} d\omega \quad (16)$$

となるから、 $g(t)$ の Fourier 変換は $\omega > 0$ では $e^{i\phi_0} F(\omega) e^{-i\omega\tau_0}$ となる。 $f(t)$ と $g(t)$ の解析的相互相関関数は(13)式より、

$$\begin{aligned} C_{fg}(\tau) &= 4\pi e^{i\phi_0} \int_0^\infty |F(\omega)|^2 e^{i\omega(\tau-\tau_0)} d\omega \\ &= e^{i\phi_0} C(\tau - \tau_0). \end{aligned}$$

になる。よって

$$|C_{fg}(\tau)| = |C(\tau - \tau_0)| \quad (17)$$

が成り立つから、3.1 より $|C_{fg}(\tau)|$ は、正しい時間差 τ_0 において最大値を持つことが言える。また、ピークが生じる時間での解析信号の実数成分と虚数成分から定位相 ϕ_0 が得られることもわかる。

(3) 減衰率に周波数依存性がある場合

$f(t)$ が時間 τ_0 だけ進んで、その Fourier 変換に $\alpha(\omega)(> 0)$ だけ減衰を受けた波動を $g(t)$ と仮定すると、

$$g(t) = \int_{-\infty}^\infty \alpha(\omega) F(\omega) e^{i\omega(t-\tau_0)} d\omega \quad (18)$$

と表すことができる。よって $g(t)$ の Fourier 変換は、 $\alpha(\omega)F(\omega)e^{-i\omega\tau_0}$ となるから解析信号の相互相関関数は、

$$C_{fg}(\tau) = 4\pi \int_0^\infty \alpha(\omega) |F(\omega)|^2 e^{i\omega(\tau-\tau_0)} d\omega$$

となる。ここで、 $\sqrt{\alpha(\omega)}F(\omega)$ を改めて $F_\alpha(\omega)$ とおき、これを Fourier 変換として持つ波動の解析的自己相関関数を $C_\alpha(\tau)$ とおくと、

$$C_{fg}(\tau) = C_\alpha(\tau - \tau_0) \quad (19)$$

となる。よって、3.1 より $|C_{fg}(\tau)|$ の最大値は $\tau = \tau_0$ に現れる。ただし、この場合、ピークは $|C(\tau)|$ と相似ではなく多少広がった形状を持つ。なお、導出の過程を見ればわかるように $\alpha(\omega)$ が負になることがなければ、減衰、増幅、またスペクトルを任意の帯域に制限する窓関数であっても成り立つことがわかる。

(4) 媒質に分散がある場合

1.2 と同じ状況を仮定する。場所 x における振動が(5)式の実数成分のようであると仮定して、これを $g(t)$ とおくと、 $g(t)$ の Fourier 変換は $e^{-ik(\omega)x} F(\omega)$ となるので、

$$\begin{aligned} C_{fg}(\tau) &= 4\pi \int_0^\infty |F(\omega)|^2 e^{i\{\omega\tau - k(\omega)x\}} d\omega \\ &= e^{iK_0 x} C\left(\tau - \frac{x}{v_g}\right) \end{aligned}$$

となる。最後の式は、(7)、(8)式と同様な変形によって得られる。両辺の絶対値をとると、

$$|C_{fg}(\tau)| = |C(\tau - \frac{x}{v_g})| \quad (20)$$

となるから、3.1 より、 $|C_{fg}(\tau)|$ は $\tau = x/v_g$ に最大値を持つ。すなわち、 x が与えられていれば、最大値の位置から群速度 v_g を求めることができる。

(5) (2) から (4) のすべてを含む場合

$f(t)$ が x の距離だけ伝搬したとき、位相シフト ϕ_0 、減衰率 $\alpha(\omega)$ 、そして(6)式の分散関係の影響によって $g(t)$ に変わったならば、上述のことから、 $g(t)$ の Fourier 変換は、 $\omega > 0$ において、

$$G(\omega) = e^{i(K_0 x + \phi_0)} \alpha(\omega) F(\omega) e^{-ik(\omega)x}$$

となる。(13)、(19)式より

$$|C_{fg}(\tau)| = |C_\alpha(\tau - \frac{x}{v_g})| \quad (21)$$

が得られる。よって、 x が与えられていれば、最大値の位置から群速度 v_g を求めることができる。

以上のことより、解析信号の相互相関関数をとることによって、解析信号のみを用いる場合に比べて、より広い場合に適用できることがわかる。

3.3 波動に雑音が含まれる場合の影響

波動 $f(t)$ 、 $g(t)$ にそれぞれ白色雑音 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ が加わって、

$$\begin{aligned} f_n(t) &= f(t) + n_1(t), \\ g_n(t) &= g(t) + n_2(t) \end{aligned}$$

となったとする。ここで、 $n_1(t)$ 、 $n_2(t)$ は同じパワースペクトル $W/2\pi$ を持つと仮定する。このとき、 $C_{f_n g_n}(\tau)$ の平均は $C_{fg}(\tau)$ 、分散 σ^2 は、 $f(t)$ 、 $g(t)$ に含まれる全エネルギーを E_f 、 E_g とおくと、

$$\sigma^2 = W(E_f + E_g) \quad (22)$$

と表すことができる。これより、matched-filter⁶⁾ の場合と等価な SN 比を持つことが示せる。

4. 実験および解析

今まで述べた理論を応用した例として、超音波パルスエコー法の実験に適用した結果について述べる。

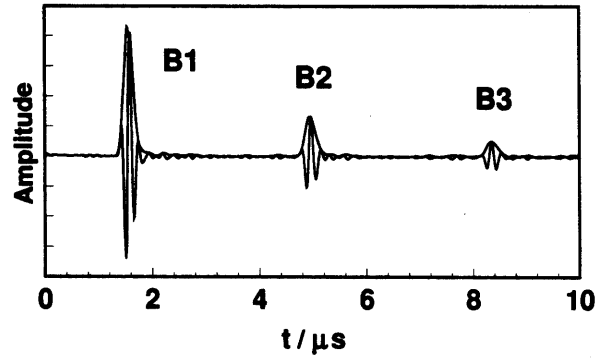
測定装置：超音波センサーは、中心周波数 5MHz・縦波の広帯域センサー（パナメトリクス社製）、パルスの送受信には、MODEL 5052PR（同）、波形の表示・記録には、デジタル・オシロスコープ（ソニー・テクトロニクス社製 TDS3012：振幅分解能 9 bit、周波数帯域 100 MHz、時間分解能 1.25 GS/s）を用いた。

測定条件：試料は、SUS430（厚さ 10.02 mm）、センサーと試料の接触媒質としてグリセリンを用いた。サンプリング時間は 0.001 μ s にとった。また、データを保存する前に波形に 128 回の平均化処理を行い雑音を低減させた。そして、オシロスコープに保存したデータを PC に転送して FFT 等のデジタル信号処理の操作を用いて解析を行った。

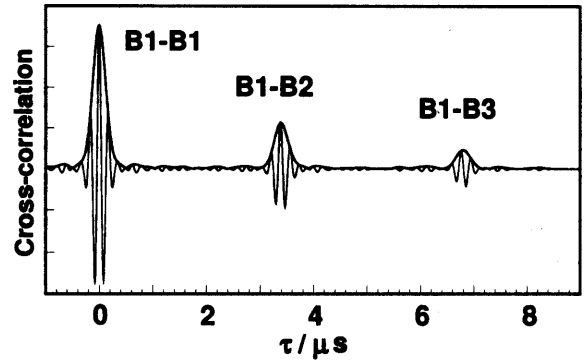
解析結果：図 1 (a) には、受信した第 1 底面エコーから第 3 底面エコー（B1、B2、B3）とともに、それらを解析信号に変換したものの絶対値（包絡線）を示している。また、図 1 (b) は、B1 を $f(t)$ 、収録した波形全体を $g(t)$ として (13) 式を適用して得られた波形データの相互相関関数とその解析信号の絶対値を示している。

解析信号の相互相関関数から求めた B1 と B2 の間の時間差は、3.390 μ s、実信号の相互相関関数を用いた場合は、3.382 μ s になった。

B1-B2、B1-B3 に生じている実の相互相関関数のピークを見ると、包絡線のピークに関して、B1-B1 のピークと違い対称ではない。原因の一つとして材料中に分散があることが考えられる。このような仮定のもとに、板厚から群速度を計算すると、 5.910×10^3 m/s、位相速度は、 5.924×10^3 m/s になった。



(a) エコー列と包絡線



(b) 相互相関関数と包絡線

図 1: 解析信号の応用例

5. まとめ

超音波パルスエコー法の適用範囲を拡張するために、与えられた波動を解析信号に拡張することを試みた。その結果、弾性エネルギーの伝搬速度である群速度を容易に求める方法を開発できた。特に、相互相関法に適用すると、減衰率に周波数依存性があっても正しいパルス間の時間差を求めることができるのは大きな利点である。

今後は、他の種類の材料にも適用して基礎データを蓄積するとともに、内部に疲労や残留応力を持つ材料中の弾性波の伝搬解析などに応用していきたいと思う。

参考文献

- 1) D.Gabor: J.IEE., Vol.93, Part.III(1946), pp.429-457
- 2) J.W.S.Rayleigh: *The theory of sound* (Dover, New York, 1945) Vol.1, p.301.
- 3) L.Brillouin: *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic Press, New York, 1960) p.7.
- 4) D. R. Hull, H. E. Kautz and A. Vary: Mater. Eval. **43** (1985) 1455.
- 5) 村井他: 非破壊検査 **43** (1998) 498.
- 6) J. H. Van Vleck and D. Middleton: J. Appl. Phys. **17** (1946) 940.