

短期海象中の波高、波周期、船体運動の 確率密度関数

－ 第80回実海域推進性能研究会（2020年9月17日）発表資料の続報－

大阪大学 箕浦宗彦

はじめに

- 不規則な海洋波の一波に対する船体運動の大きさや周期を確率的に求める方法を提案する。
- 不規則な海洋波の一波に対する船体運動は、力学的にはその一波に出会うまでの波と船体運動の履歴により決まる（いわゆるメモリ影響）。
- このことは力学的にモデル化でき、数値シミュレーションが可能であるが、実海域性能を設計する際に、遭遇するすべての波に対して検証することは容易ではない。
- ある一波に遭遇した時の船体運動の大きさや周期を確率的に表現できれば
 - 発現確率の高い波高、周期と船体運動の組み合わせ
 - 発現確率は低い危険な波高、周期と船体運動の組み合わせ
 - 合理的な設計波などを見出すことができ、設計条件の絞り込みができる。
- このような観点から

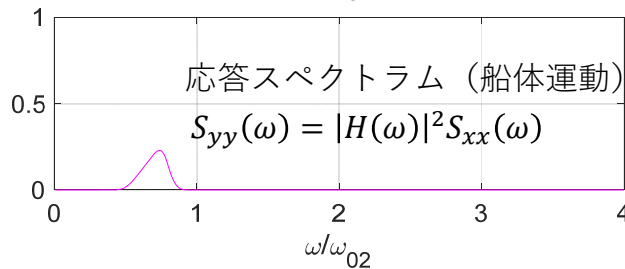
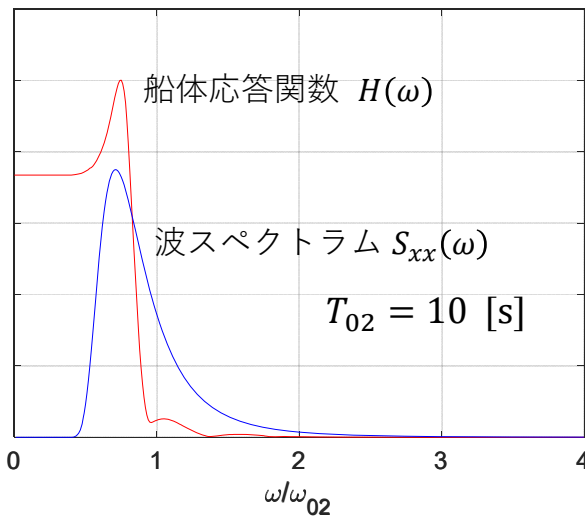
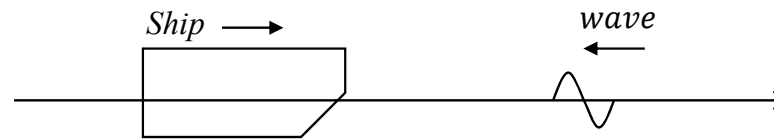
遭遇する一波と船体運動の同時発現確率密度関数

の定式化を試みた。第80回実海域推進性能研究会での発表内容を修正拡張するものである。

船体運動の線形応答スペクトラムより得られる時系列シミュレーション

KCS船型、 $F_n = 0.26$ ($V = 24$ [knot])、向かい波、Heave運動、JONSWAP波スペクトラム、有義波高：1m

平均波周期が10[s]の場合

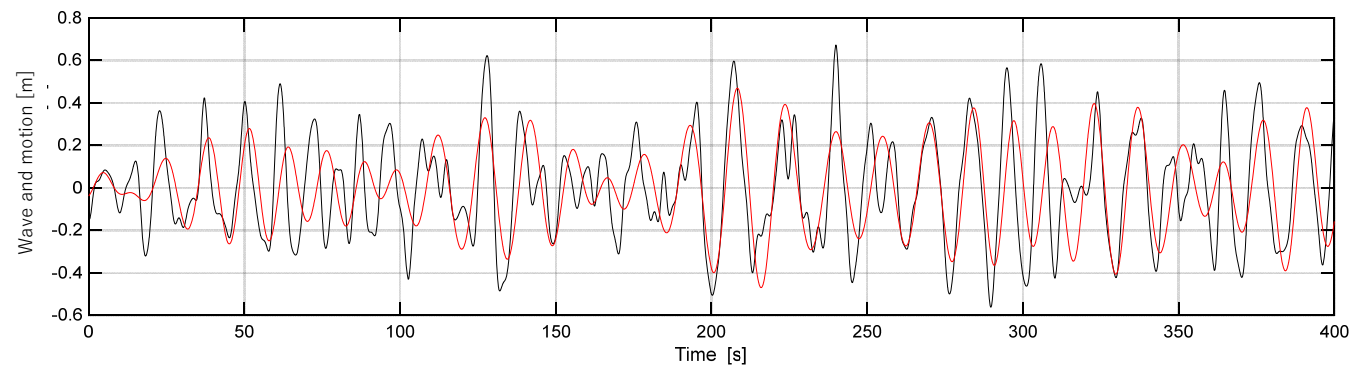


— 海洋波

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2S_{xx}(n\Delta\omega)\Delta\omega} \cos(n\Delta\omega t + \varepsilon_n)$$

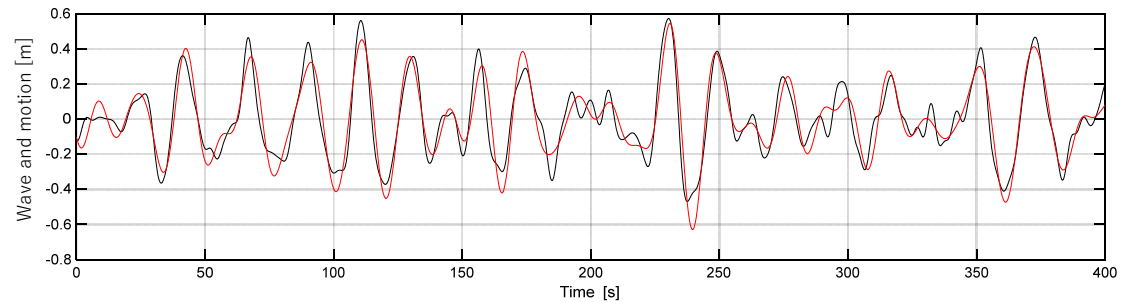
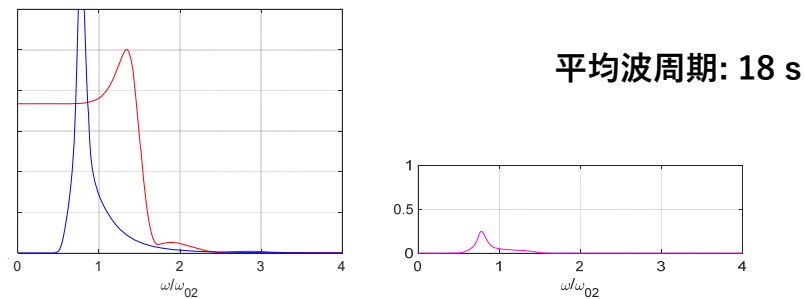
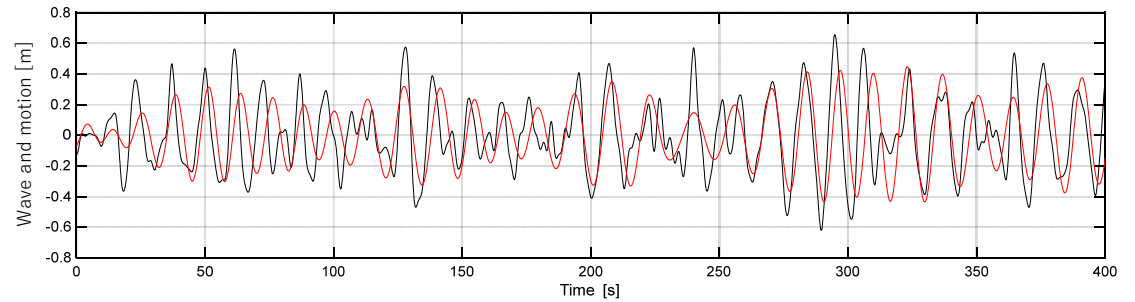
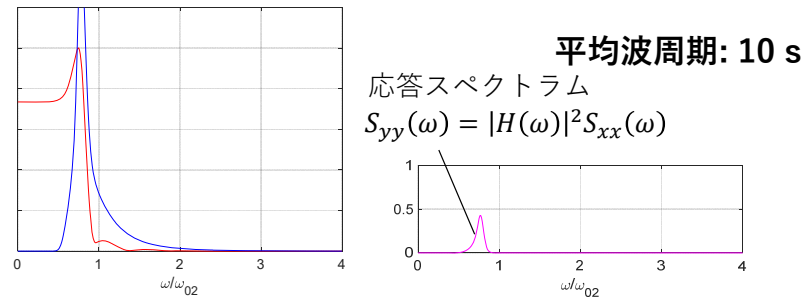
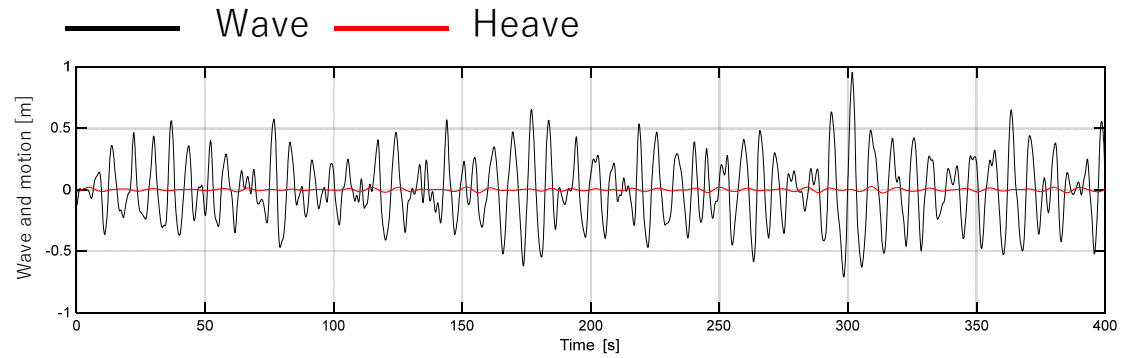
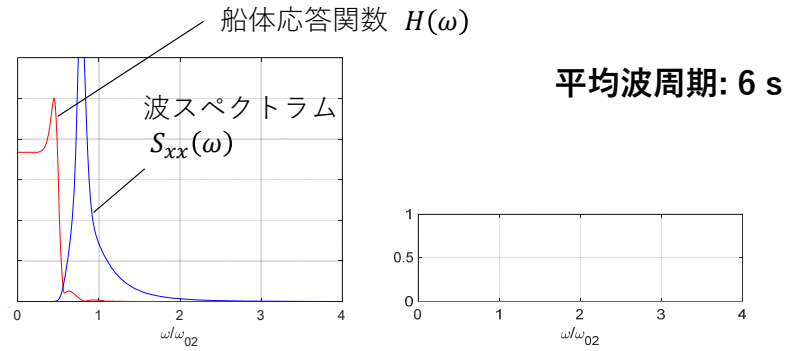
— 船体運動

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |H(n\Delta\omega)| \sqrt{2S_{xx}(n\Delta\omega)\Delta\omega} \cos(n\Delta\omega t + \varepsilon_n - \psi_n)$$



船体運動の線形応答スペクトラムより得られる時系列シミュレーション

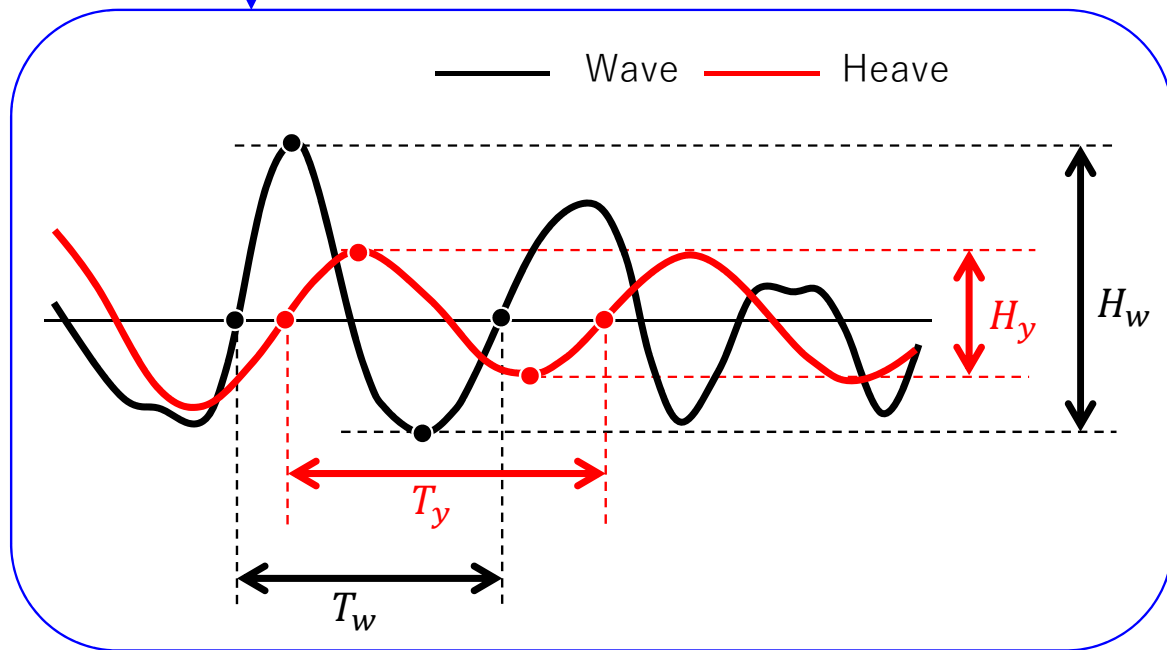
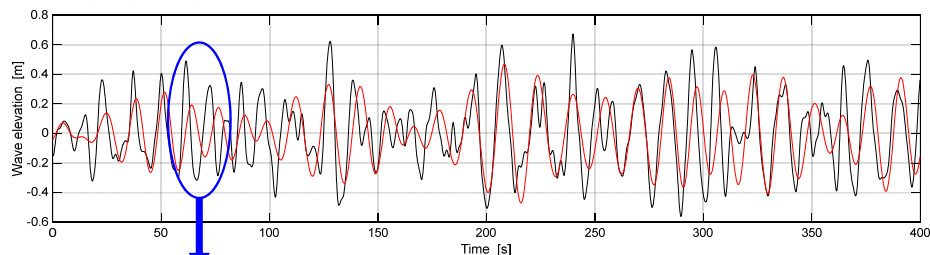
KCS船型、 $F_n = 0.26$ ($V = 24$ [knot])、向かい波、Heave運動、ITTC波スペクトラム、有義波高：1m



遭遇する一波と船体運動の同時発現の定義

波と運動の同時発現の直感的理解

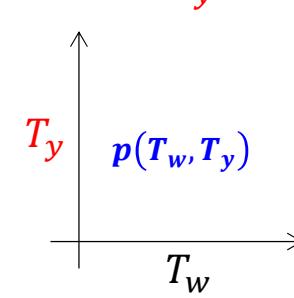
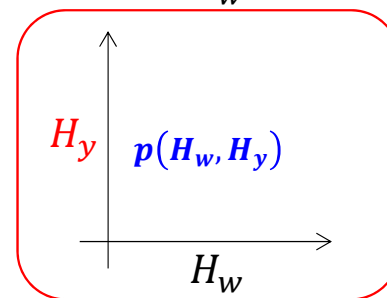
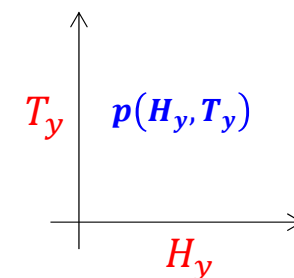
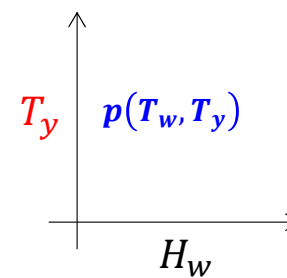
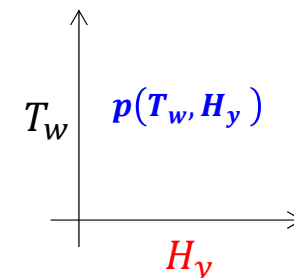
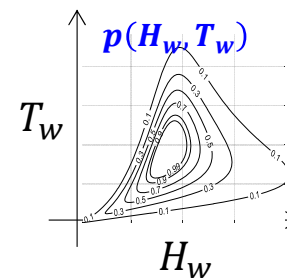
平均波周期: 10 s



(確率モデル化)

波と運動の同時発現確率密度関数

$$p(H_w, T_w, H_y, T_y)$$

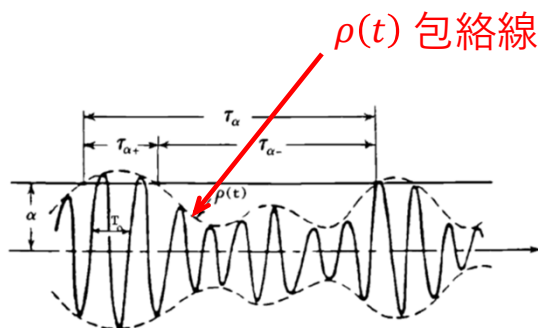


波高と波周期の同時発現の確率モデル

海洋波は狭帯域の定常ガウス過程に従うと仮定する (Longuet-Higgins(1975, 1983))

- ランダム位相を有する多数の規則波の重ね合わせで表す (定常ガウス過程の条件)
- 波成分は平均波周期のまわりにガウス分布で存在する (狭帯域の条件)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \omega_m t + \varepsilon_n\} \\
 &= x_c(t) \cos \omega_m t - x_s(t) \sin \omega_m t \\
 &= \rho(t) \cos(\omega_m t + \phi(t))
 \end{aligned}$$



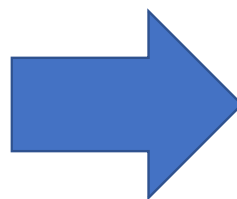
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d}, \quad \omega_n = n\omega_0$$

T_d : 対象とする時間区間

ε_n : 独立な $0 \sim 2\pi$ の一様ランダム位相

ω_m : 平均波周波数

$$\begin{cases}
 x_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n\} = \rho(t) \cos \phi(t) \\
 x_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n\} = \rho(t) \sin \phi(t)
 \end{cases}$$



(ガウス分布の仮定)

$$f(x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

$$\mathbf{x} = [x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s]^T \quad \Sigma = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

瞬間的な波高 $\rho(t)$
 瞬間的な波周期 $\dot{\phi}(t)$

m_0, m_2 : 波スペクトラムの0次、2次モーメント

波高と波周期の同時発現の確率モデル

変数変換を経て波高と波周期の同時発現確率密度関数が求められる

$$f(x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

$$f(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi}) = \frac{\rho^2}{4\pi^2 \mu_0 \mu_2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\mu_0}\right) \exp\left(-\frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2}{2\mu_2}\right)$$

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{m_0}}{2} \zeta(t), \quad \dot{\phi}(t) = \left(\frac{1}{\eta(t)} - 1\right) \omega_m$$

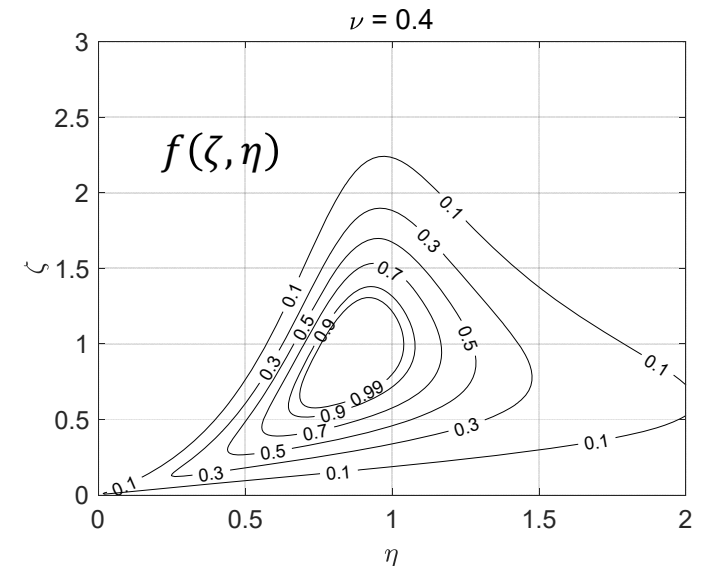
$$f(\rho, \dot{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi}) d\phi d\dot{\rho} = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi\mu_2\mu_0}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\mu_0}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2 \dot{\rho}^2}{2\mu_2}\right)$$

波高と波周期の同時発現確率密度関

$$f(\zeta, \eta) = \frac{L}{8\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^2 \exp\left\{-\frac{1}{8}\zeta^2 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)^2 \frac{1}{\nu^2}\right)\right\}$$

$$\zeta = 4 \frac{H}{H_{1/3}}, \quad \eta = \frac{T}{T_{01}}, \quad L = 1 + \frac{\nu^2}{4}, \quad \nu = \left(\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Longuet-Higgins(1975, 1983)



波高と波周期の同時発現確率密度

波と船体運動の同時発現の確率モデル

波高と波周期の同時発現確率密度関数の導出に倣い、波高、波周期、船体運動の大きさ、運動周期をモデル化し、それらの同時発現確率密度を定式化する。

$$\text{波} \quad x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \omega_m)t + \omega_m t + \varepsilon_n) = x_c(t) \cos \omega_m t - x_s(t) \sin \omega_m t$$

$$\text{運動} \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n - \psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n a_n \cos((\omega_n - \omega_m)t + \omega_m t + \varepsilon_n - \psi_n) = y_c(t) \cos \omega_m t - y_s(t) \sin \omega_m t$$

$$x_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n\}$$

$$x_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n\}$$

$$y_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n a_n \cos\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n - \psi_n\}$$

$$y_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n a_n \sin\{(\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n - \psi_n\}$$

(ガウス分布の仮定)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_d}, \quad \omega_n = n\omega_0$$

T_d : 対象とする時間区間

ε_n : 独立な $0 \sim 2\pi$ の一様ランダム位相

ω_m : 平均波周波数

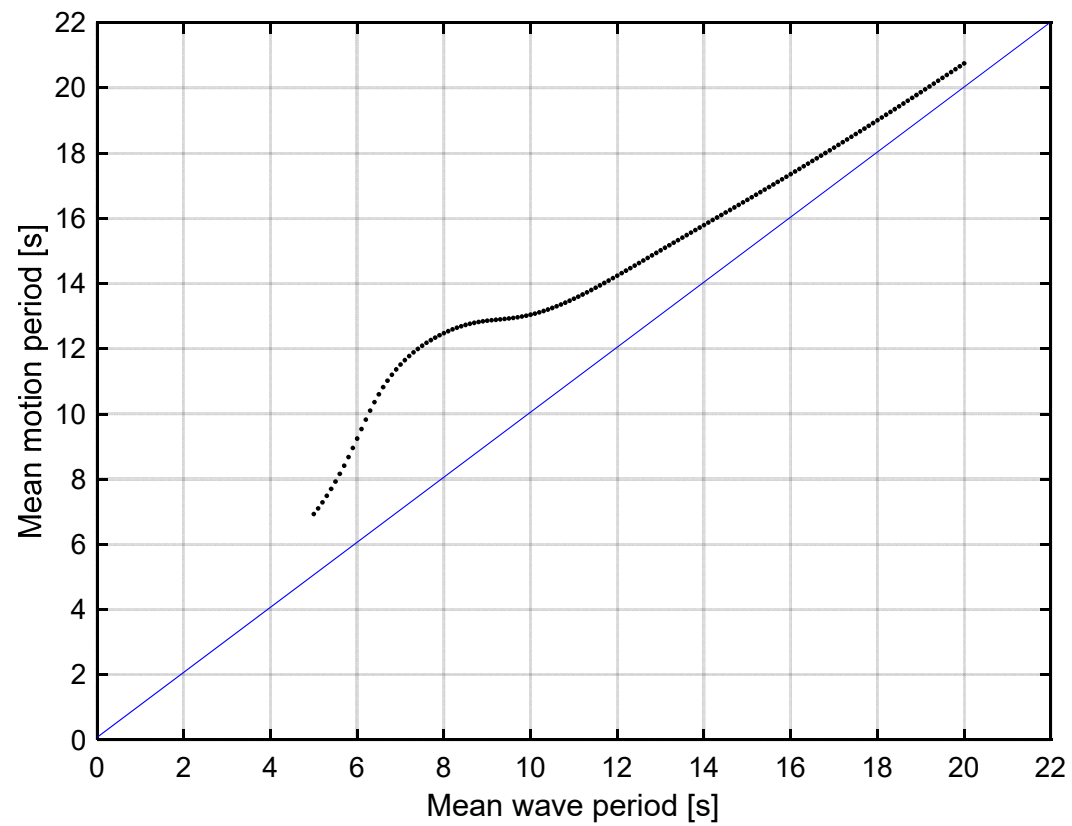
h_n, ψ_n : 波に対する運動の応答振幅と位相遅れ

$$f(x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s, y_c, y_s, \dot{y}_c, \dot{y}_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^8 \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

$$\mathbf{x} = [x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s, y_c, y_s, \dot{y}_c, \dot{y}_s]^T$$

波と船体運動の平均周期の比較（参考）

KCS船型、 $F_n = 0.26$ ($V = 24$ [knot])、向かい波、Heave運動、ITTC波スペクトラム



波と船体運動の同時発現の確率モデル

- 共分散行列の左上ブロックは波成分、右下ブロックは運動成分を表す。いずれも波の平均周期まわりの成分は独立であるという仮定より対角成分のみ存在する。
- 共分散行列の右上ブロックと左下ブロックに波と運動の相互相関の成分が現れる。
- 右上ブロックと左下ブロックは対称な関係にある。
- いずれの成分も波スペクトラム、応答スペクトラム、クロススペクトラムから求められる。

$$f(x_c, x_s, \dot{x}_c, \dot{x}_s, y_c, y_s, \dot{y}_c, \dot{y}_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^8 \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)$$

前報（第80回）では右上ブロックと左下ブロックが対角行列であった。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{(左上ブロック)} & \text{(右上ブロック)} \\ \text{(左下ブロック)} & \text{(右下ブロック)} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n_0^+ & n_0^- & -n_1^- + \omega_m n_0^- & n_1^+ - \omega_m n_0^+ \\ -n_0^- & n_0^+ & -n_1^+ + \omega_m n_0^+ & -n_1^- + \omega_m n_0^- \\ n_1^- - \omega_m n_0^- & -n_1^+ + \omega_m n_0^+ & n_2^+ - 2\omega_m n_1^+ + \omega_m^2 n_0^+ & n_2^- - 2\omega_m n_1^- + \omega_m^2 n_0^- \\ n_1^+ - \omega_m n_0^+ & n_1^- - \omega_m n_0^- & -n_2^- + 2\omega_m n_1^- - \omega_m^2 n_0^- & n_2^+ - 2\omega_m n_1^+ + \omega_m^2 n_0^+ \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} n_0^+ & -n_0^- & n_1^- - \omega_m n_0^- & n_1^+ - \omega_m n_0^+ \\ n_0^- & n_0^+ & -n_1^+ + \omega_m n_0^+ & n_1^- - \omega_m n_0^- \\ -n_1^- + \omega_m n_0^- & -n_1^+ + \omega_m n_0^+ & n_2^+ - 2\omega_m n_1^+ + \omega_m^2 n_0^+ & -n_2^- + 2\omega_m n_1^- - \omega_m^2 n_0^- \\ n_1^+ - \omega_m n_0^+ & -n_1^- + \omega_m n_0^- & n_1^- - 2\omega_m n_1^- + \omega_m^2 n_0^- & n_2^+ - 2\omega_m n_1^+ + \omega_m^2 n_0^+ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} n_0^+ &= \int_0^\infty \text{Re}[E_{xy}(\omega)] d\omega & n_1^+ &= \int_0^\infty \omega \text{Re}[E_{xy}(\omega)] d\omega & n_2^+ &= \int_0^\infty \omega^2 \text{Re}[E_{xy}(\omega)] d\omega & c_0 &= \int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega & d_0 &= \int_0^\infty S_{yy}(\omega) d\omega & \text{クロススペクトラム} \\ n_0^- &= \int_0^\infty \text{Im}[E_{xy}(\omega)] d\omega & n_1^- &= \int_0^\infty \omega \text{Im}[E_{xy}(\omega)] d\omega & n_2^- &= \int_0^\infty \omega^2 \text{Im}[E_{xy}(\omega)] d\omega & c_2 &= \int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega & d_2 &= \int_0^\infty \omega^2 S_{yy}(\omega) d\omega & E_{xy}(\omega) &= H(\omega) S_{xx}(\omega) \end{aligned}$$

波高と船体運動の大きさの同時発現確率密度関数

波高と運動の大きさの2つに限定して同時発現確率密度関数を求める。

$$\mathbf{x} = [x_c, x_s, y_c, y_s]^T$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & c_{xcyc} & c_{xcys} \\ 0 & c_0 & c_{xsyc} & c_{xsys} \\ c_{ycxc} & c_{ycxs} & d_0 & 0 \\ c_{ysxc} & c_{ysxs} & 0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & n_0^+ & n_0^- \\ 0 & c_0 & -n_0^- & n_0^+ \\ n_0^+ & -n_0^- & d_0 & 0 \\ n_0^- & n_0^+ & 0 & d_0 \end{bmatrix}$$

$$f(\rho_x, \phi_x, \rho_y, \phi_y) = \frac{\rho_x \rho_y}{\sqrt{2\pi}^4 \sqrt{|c_0 d_0 - (n_0^+)^2 - (n_0^-)^2|}} \exp\left\{-\frac{d_0 \rho_x^2 + c_0 \rho_y^2}{2\{c_0 d_0 - (n_0^+)^2 - (n_0^-)^2\}}\right\} \exp\left\{\frac{2\rho_x \rho_y \{n_0^+ \cos(\phi_x - \phi_y) - n_0^- \sin(\phi_x - \phi_y)\}}{2\{c_0 d_0 - (n_0^+)^2 - (n_0^-)^2\}}\right\}$$

ϕ_x と ϕ_y について積分することで 波高と運動の大きさの同時発現確率密度関数 が得られる。

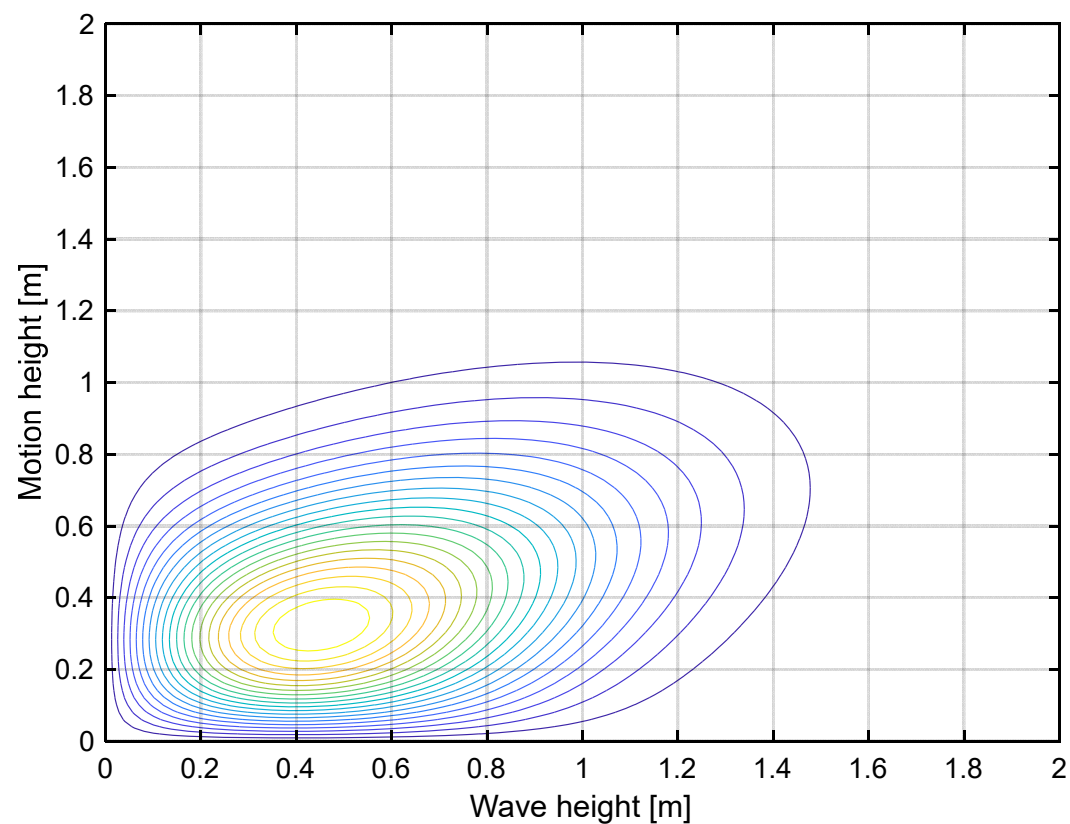
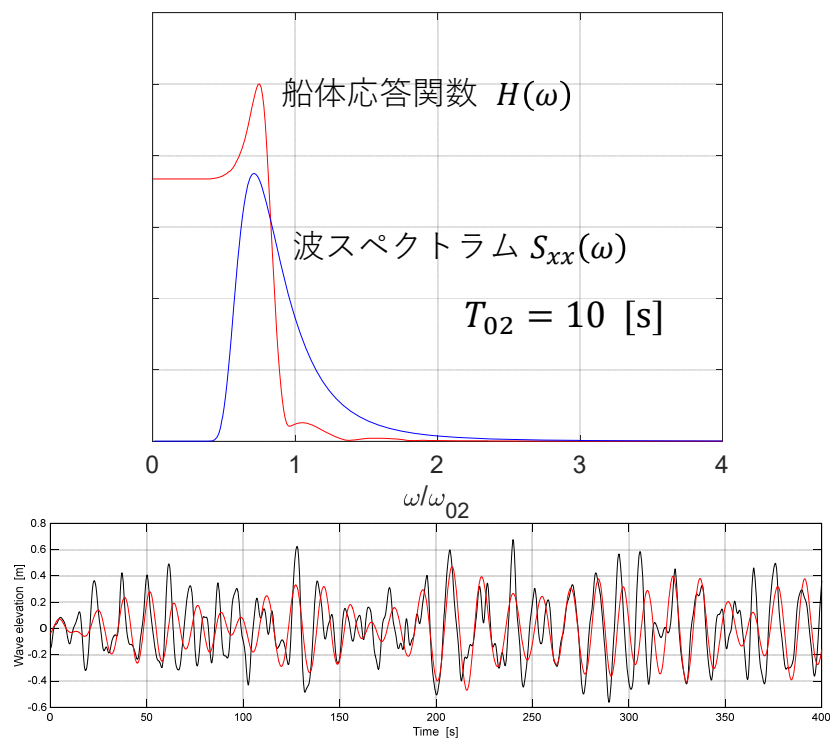
$$f(\rho_x, \rho_y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho_x, \phi_x, \rho_y, \phi_y) d\phi_x d\phi_y \quad (\text{ここでは数値積分により求める})$$

$$H_x = 2\rho_x, \quad H_y = 2\rho_y$$

波高と船体運動の大きさの同時発現確率密度

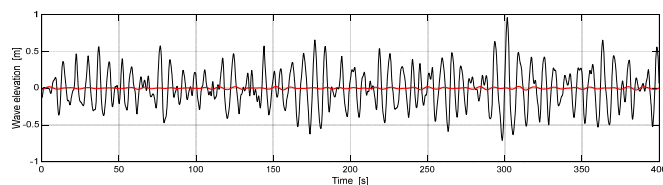
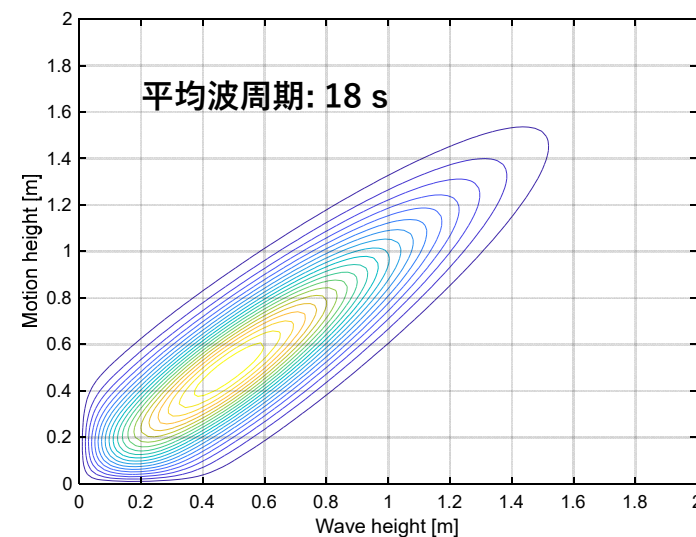
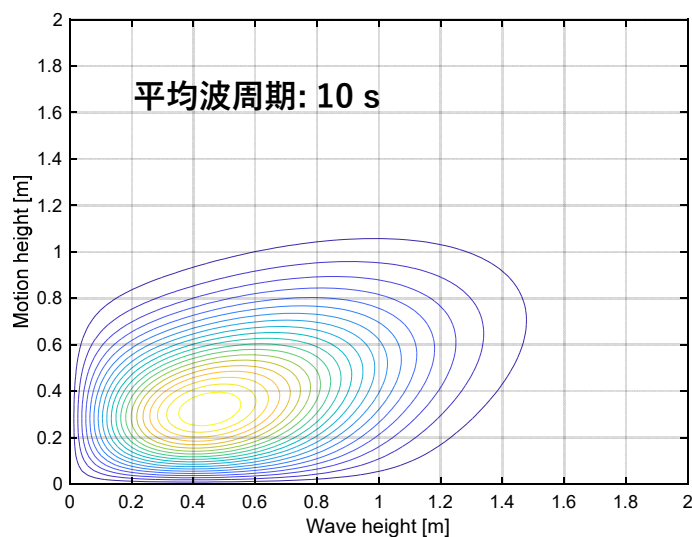
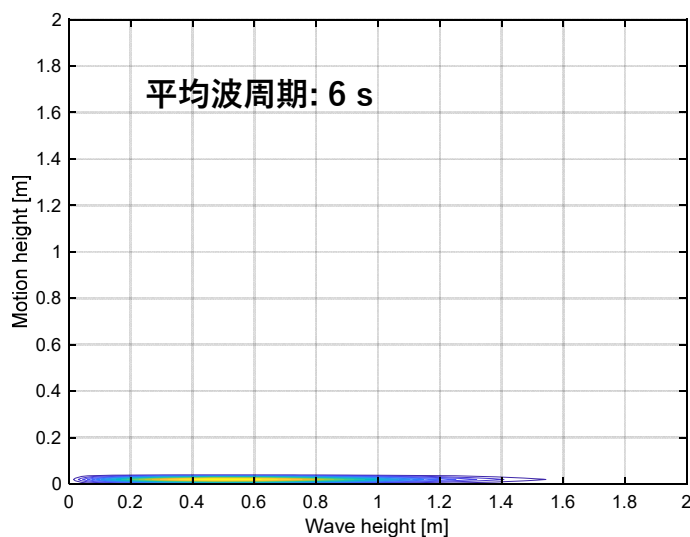
KCS船型、 $F_n = 0.26$ ($V = 24$ [knot])、向かい波、Heave運動、ITTC波スペクトラム、有義波高：1m

平均波周期: 10 s

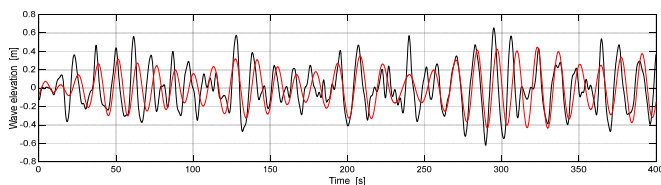


波高と船体運動の大きさの同時発現確率密度

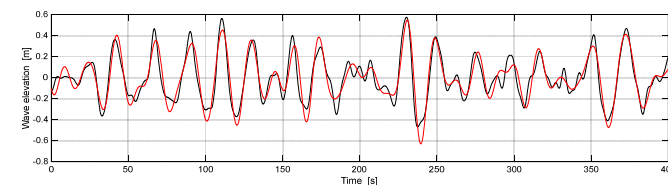
KCS船型、 $F_n = 0.26$ ($V = 24$ [knot])、向かい波、Heave運動、ITTC波スペクトラム、有義波高：1m



船体運動はほとんどなし



船は波に追従するが、ずれも目立つ



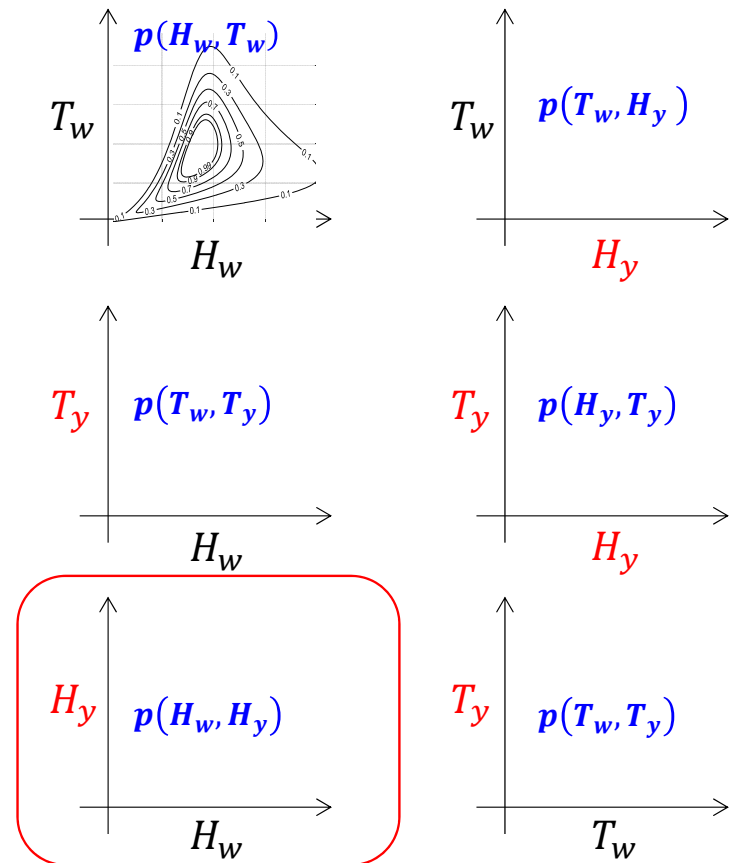
船は波にほぼ追従する

まとめ

- 定常不規則波の一波に対する船体運動の大きさや周期の同時発現確率密度関数の定式化を行った。
- 波高と運動高さの同時発現確率密度関数について具体例を示した。
- 平均波周期が大きくなれば、一波に対する波高と運動高さの相関（同時発現確率）が大きくなることが数値的に示された。
- 今後は波高と運動高さ以外の関係について検討を進める。

波と運動の同時発現確率密度関数

$$p(H_w, T_w, H_y, T_y)$$



-
- Longuet-Higgins, M.S. (1975). On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves. *J. Geophys. Res.*, 80, 18, 2688-94.
- Mickel K, Ochi (1998), Section 4 of *Ocean Waves -The Stochastic Approach-*, Cambridge University Press, pp. 103-122.