

# A New Computation Formula for the Added Resistance and Connection with Lagally's Theorem

Masashi Kashiwagi

Emeritus Professor of Osaka University & Kyushu University  
Technical Advisor of Kansai Design Company, Ltd.

## 1. Introduction

Of critical importance is the development of a practical computation method with reliable accuracy for predicting the added resistance acting on actual ships in waves. With this background, a number of papers have been published recently on computed results of the added resistance by use of Rankine panel method taking account of the effect of steady-disturbance flow around an advancing ship. These computations are based on direct integration of the pressure on the ship-hull surface but taking only the time average, which is known as the near-field method. The resultant computation formula is rather complicated and hence not easy to keep higher accuracy and to understand physical relations between ship-generated waves and added resistance.

On the other hand, the so-called far-field method based on the momentum and energy conservation principles, established by Maruo [1], is expedient in understanding the importance of unsteady wave-making component in the added resistance. However, Maruo's formula based on the far-field method is not suitable for numerical computations with Rankine panel method or CFD method. From this reason, the middle-field method [2] is also developed and applied recently with Rankine panel method.

Although it is not popular, it is possible to compute the time-averaged steady force on a body by using Lagally's theorem [3] particularly for the zero-speed case [4, 5], which correlates the force with hydrodynamic singularities representing a body and the induced-velocity field at those singularity points. The derivation of Lagally's theorem is based primarily on the pressure integration on the body surface, but by applying Gauss theorem and Green's identity we can prove a relation between Maruo's formula to be evaluated at a far field and Lagally's theorem to be applied on the body surface. In fact, Tsubogo [7, 8, 9] derived a calculation formula for the zero-speed drift force by applying the Green's 2nd identity to a combination of the total velocity potential  $\phi$  and its derivative in complex conjugate  $\nabla\phi^*$ ; which can be interpreted as equivalent to Lagally's theorem.

In this short note, with a premise that a Rankine panel method will be used, we will start with a review on the momentum-conservation principle for computing the wave drift force and apply the Stokes and Green theorems to derive a calculation formula developed by Tsubogo. Through this review study, a relationship of Tsubogo's calculation formula with Lagally's theorem can be explained. (Details for the Lagally's theorem for computing hydrodynamic forces are described in another material written in Japanese.) Then, the analysis will be extended to the forward-speed case to understand in what way the effect of forward speed of a ship appears and to derive consequently a new calculation formula for the added resistance that can be computed on the body surface, which looks much simpler than that using the near-field method.

## 2. Momentum-conservation principle at zero speed

For simplicity, while keeping the essence in deriving the time-averaged steady force consistent to the 2nd-order in the velocity potential, let us focus our attention on the zero-speed case at the outset and consider incompressible fluid of constant density. The forward-speed case will be discussed later.

First, according to Appendix 1 in a paper of Newman [6], the rate of change of linear momentum ( $i$ -th component) in the control volume  $V$  is written as

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho v_i dV = \rho \iiint_V \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \rho \iint_S v_i U_n dS \\ &= -\rho \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + gz \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) \right] dV + \rho \iint_S v_i U_n dS \end{aligned} \quad (1)$$

Here  $U_n$  denotes the normal velocity of the boundary surface, and note that the gravitational potential  $gz$  does not contribute to the horizontal component ( $i = 1, 2$ ), because  $\partial(gz)/\partial x_i = 0$  for  $i = 1$  and  $2$ . Thus, by applying Gauss' theorem, the horizontal component of Eq. (1) can be written as

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho v_i dV = - \iint_S \left[ p n_i + \rho v_i (v_n - U_n) \right] dS \quad (2)$$

where the boundary surface  $S$  is a sum of  $S = S_B + S_F + S_\infty$  surrounding the volume of fluid and this boundary surface is assumed to be nonlinear (exact, instantaneous). Since the motion is periodic and there can be no net increase of the momentum in  $V(t)$  over one period, we can say that the time average over a period (denoted with overbar) of Eq. (2) is zero,

$$\overline{\frac{dM_i}{dt}} = \overline{\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho v_i dV} = 0 \quad (3)$$

Thus,

$$\overline{\iint_{S_B + S_F + S_\infty} \left[ p n_i + \rho v_i (v_n - U_n) \right] dS} = 0 \quad (4)$$

Here, the pressure  $p$ , the velocity potential  $\Phi$ , and the free-surface wave elevation  $\zeta_w$  are written for the zero-speed case as follows:

$$\left. \begin{aligned} p &= -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right) \equiv p^{(1)} + p^{(2)} \\ \text{where} \quad p^{(1)} &= -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right), \quad p^{(2)} = -\rho \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\Phi = \Re[\phi e^{i\omega t}], \quad \zeta_w = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \Re \left[ -\frac{i\omega}{g} \phi e^{i\omega t} \right]_{z=0} \quad (6)$$

In what follows, starting with Eq. (1), a calculation formula will be derived for the wave drift force in terms of two different analyses for treating the boundary surface.

### 3. Analysis with nonlinear boundary of $S_B + S_F$

In this nonlinear case, the boundary conditions satisfied are given as

$$\left. \begin{aligned} v_n &= U_n \quad \text{on } S_B + S_F \\ p &= 0 \quad \text{on } S_F, \quad U_n = 0 \quad \text{on } S_\infty \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Therefore, from Eq. (4) we can obtain the following equation for the  $x$ -component from the momentum-conservation principle:

$$\overline{F_x} \equiv \overline{\iint_{S_B} p n_x dS} = - \overline{\iint_{S_\infty} \left\{ p n_x + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS} \quad (8)$$

This equation is well known and used as the basis of the analysis in References [1] and [6]. Furthermore, as explicitly written in Eq. (43) in Maruo's paper [1] and in page 53 in Newman's paper [6], the range of integration in the vertical  $z$ -axis must be up to  $z = \zeta_w$ , and we will keep 2nd-order terms only and discard the terms higher than and equal to  $O(\Phi^3)$ . With this concept, we can write Eq. (8) in the form

$$\overline{F_x} = - \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \overline{\left\{ p^{(2)} n_x + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}} dl - \int_0^{\zeta_w} dz \int_{C_\infty} p^{(1)} n_x dl + O(\Phi^3) \quad (9)$$

Then we can approximate the last term as follows:

$$\int_0^{\zeta_w} p^{(1)} dz = -\rho \int_0^{\zeta_w} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right) dz \simeq -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \zeta_w + \frac{1}{2} g \zeta_w^2 \right)_{z=0} = \frac{\rho}{2g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}^2 \quad (10)$$

Taking account of this approximation, Eq. (9) can be written as

$$\overline{F_x} = - \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \overline{\left\{ p^{(2)} n_x + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}} dl - \frac{\rho}{2g} \int_{C_\infty} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}^2 n_x dl \quad (11)$$

$$= \frac{\rho}{2} \Re \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right\} dl - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \quad (12)$$

where  $K = \omega^2/g$  is the wavenumber of oscillatory quantities.

This is the correct expression for the wave drift force at zero speed, using the far-field method. It should be noted that there are basically two components in this formula: the first one is the integration of the dynamic pressure of fluid-velocity squared and the second term originates from the square of relative wave height on  $z = 0$ , known as the so-called line-integral term. These two contributing terms are normally opposite in sign and the magnitude is larger in the second term. Without the second term, well-established Maruo's formula for the drift force cannot be obtained; which was re-confirmed by Newman in Reference [6].

To be more specific, the first term (double integral) will be transformed with a cylindrical coordinate system  $(r, \theta, z)$ . Assuming the control surface  $S_\infty$  be located at  $r \rightarrow \infty$ , we can obtain the following:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \simeq \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \simeq \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Furthermore at a large distance ( $r \rightarrow \infty$ ), there exist no local waves, and hence the  $z$ -dependency in the velocity potential is  $\phi \sim A e^{Kz}$ . Thus the integration in  $z$  in Eq. (12) can be performed in advance, with the following result:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = K \phi, \quad \int_{-\infty}^0 (e^{Kz})^2 dz = \frac{1}{2K}$$

Therefore we have the following expression:

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= \frac{\rho}{4K} \int_{C_\infty} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + K^2 \phi \phi^* \right\} \cos \theta - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \cos \theta \right]_{z=0} dl - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \\ &= -\frac{\rho}{8K} \int_{C_\infty} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + K^2 \phi \phi^* \right]_{z=0} \cos \theta dl \end{aligned} \quad (14)$$

This is Eq. (45) in Maruo's paper [1] (where  $dl = r d\theta$  is adopted), and thus we can realize the importance of the line-integral term to be obtained as a contribution from the integral from  $z = 0$  up to  $z = \zeta_w$ .

#### 4. Analysis with linear (flat) boundary of $S_F$

In the analysis for the time-averaged 2nd-order steady force, it is important to distinguish whether the boundary (especially the free surface  $S_F$ ) is treated as exact nonlinear or linearized flat plane (i.e.  $z = 0$ ) in the Taylor-series expansion. It would be possible to consider the momentum-conservation principle for the linearized flat boundary on  $S_F$ , but in this case we should note that the boundary is fixed ( $U_n = 0$ ) and the linearized free-surface condition gives the following relation:

$$v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = K \phi \quad \text{on } z = 0 \quad (15)$$

With this change taken into account, the transformation of Eq. (4) based on the momentum conservation must be performed as follows:

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &\equiv \overline{\iint_{S_{B0}} p^{(2)} n_x dS} \\ &= -\rho \iint_{S_{F0}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \rho \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} dS \\ &= -\frac{\rho}{4} \iint_{S_{F0}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx dy + \frac{\rho}{2} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right\} dS \end{aligned} \quad (16)$$

where  $S_{B0}$  and  $S_{F0}$  denote the linearized boundary of the body and free surfaces, respectively.

The integral on  $S_{F0}$ , denoted as  $\mathcal{F}$ , can be performed further using Eq. (15), with the following result:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{\rho}{4} \iint_{S_{F0}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} K \phi^* + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} K \phi \right)_{z=0} dx dy \\ &= -\frac{\rho}{4} K \iint_{S_{F0}} \frac{d}{dx} [\phi \phi^*]_{z=0} dx dy = -\frac{\rho}{4} K \left[ \int_{C_\infty} + \int_{C_B} \right] \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \end{aligned} \quad (17)$$

where  $C_B$  denotes the peripheral line integration path along the intersection between body and free surfaces, and the positive direction of line integral is taken such that the enclosed surface is viewed on the left-hand side with outward normal vector (which is the ordinary definition in the Gauss theorem).

Substituting Eq. (17) into Eq. (16), we can obtain the result expressed in the form

$$\begin{aligned} & \overline{\iint_{S_{B0}} p^{(2)} n_x dS} + \frac{\rho}{4} K \int_{C_B} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x d\ell \\ &= \frac{\rho}{2} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x d\ell \end{aligned} \quad (18)$$

This is essentially the same as Eq. (12) and we can understand that the right-hand side provides the formula based on the far-field method and the left-hand side the formula of the near-field method to be computed from direct pressure integration on the body surface. We can realize again the importance of 2nd-order line-integral terms, associated with a square of the free-surface elevation, both in the near-field and far-field methods.

It should be noted for the near-field method that, when a floating body is oscillating with small amplitude of the motion, the 2nd-order pressure  $p^{(2)}$  and the relative wave elevation on the free surface  $\zeta_w$  must be modified to include the effect of body movement and also the normal vector must be expanded by taking account of the difference between the body-fixed and space-fixed axes (the effect of body's rotational motion).

## 5. Derivation of Tsubogo's formula, equivalent to Lagally's theorem

The right-hand side of Eq. (12) or equivalently Eq. (18), derived based on the far-field method, can be transformed further ingeniously by using Stokes' theorem. First, the integrand of the double integral will be separated into two parts as follows:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Then, we can see that the first part of the above expression can be written as

$$\begin{aligned} & \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) \\ &= n_x (\phi_x \phi_x^* + \phi_y \phi_y^* + \phi_z \phi_z^*) - \phi_x (\phi_x^* n_x + \phi_y^* n_y + \phi_z^* n_z) - \phi (\phi_{xx}^* n_x + \phi_{xy}^* n_y + \phi_{xz}^* n_z) \\ &= n_x (\phi_y \phi_y^* + \phi_z \phi_z^* - \phi \phi_{xx}^*) - n_y (\phi_x \phi_y^* + \phi \phi_{xy}^*) - n_z (\phi_x \phi_z^* + \phi \phi_{xz}^*) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (20)$$

where

$$\mathbf{A} = \left( 0, -\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z}, \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) \quad (21)$$

With this result substituted in Eq. (12), we can obtain the following result:

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &+ \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x d\ell \end{aligned} \quad (22)$$

The first term on the right-hand side can be transformed further by applying Stokes' formula, which may be written as

$$\iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{C_\infty} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

The reason of minus sign in front of the peripheral line integral along  $C_\infty$  is that the integration direction along  $C_\infty$  (which is defined as positive in the counter clockwise direction from Gauss' theorem, as seen in Eq. (17) for example) is opposite to the conventional definition in the Stokes theorem.

We note that  $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0) = (-n_y d\ell, n_x d\ell, 0)$  along  $C_\infty$  on  $z = 0$  and thus, in terms of Eq. (21) and the linearized free-surface condition written as Eq. (15), we can obtain

$$\iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{C_\infty} \left( -\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \right) n_x d\ell = K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x d\ell \quad (24)$$

Substituting this result into Eq. (22), we can see that the final result can be written as

$$\begin{aligned}
\overline{F_x} &= \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \\
&\quad + \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \\
&= \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS
\end{aligned} \tag{25}$$

and hence the line-integral term cancels exactly. Consequently Eq. (25) does not include the line-integral term and takes a form where the Green's 2nd identity can be applied to convert into the same form of integral (with opposite sign) on the body surface  $S_B$  below the still water surface  $z = 0$ . The proof using the Green's 2nd identity is the same as that for several hydrodynamic relations known in the linear wave-body interaction theory. That is, since both  $\phi$  and  $\nabla\phi^*$  satisfy the same Laplace equation and the boundary condition on the free surface, we can easily derive the following equation:

$$\iint_{S_B+S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS = 0 \tag{26}$$

Therefore, we have

$$\overline{F_x} = -\frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_B} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS \tag{27}$$

One important point to be learnt from the present transformation is a fact that the line-integral term along the intersection between the body and free surfaces can be canceled by a certain double integral on the wetted surface of a floating body in terms of Stokes's theorem. Another thing to be noted is that  $\phi$  in Eq. (27) is the total velocity potential, and thus Eq. (27) can be used even for the motion-free case.

Although the mathematical proof is different from that shown in this note, Eq. (27) is the same as that derived by Tsubogo [7, 8]. Originally he started considering a combination of two different velocity potentials ( $\phi$  and  $\nabla\phi^*$ ) to be used in the Green's 2nd identity, like Eq. (27). Then, through mathematical manipulation, he found that Eq. (27) is equal to the calculation formula derived by Maruo [1] and Newman [6]. However, in his paper [10], he also provided a reverse proof that the Maruo's formula by the far-field method could be transformed into Eq. (27); which is essentially the same as the proof shown here. Furthermore, Tsubogo confirmed in his another paper [9] that computed results based on Eq. (27) for a 3-D floating body are virtually the same as those computed with Maruo's far-field method and also with the near-field pressure integration method.

Despite a simple and compact expression, the numerical computation using Eq. (27) is rather cumbersome, because Eq. (27) requires evaluation of the 2nd derivative of the body-disturbance velocity potential on the body surface, and hence Maruo's formula is much convenient at least for the zero-speed case. Moreover, at zero speed, the velocity potential can be represented with Bessel functions for the  $r$ -dependence and Fourier series for the  $\theta$ -dependence (although their coefficients must be determined numerically for a general-shaped body). Then, the integral with respect to  $\theta$  can be analytically conducted, leading to a formula including only the coefficients of the eigen-function expansion method. Details on this mathematical transformation is summarized in another material prepared as an annex, together with several notes and proofs related to the wave drift force.

## 6. Extension to the forward-speed case

The final objective in the present study is not the zero-speed problem but extension of the analysis in the preceding section to the forward-speed added resistance problem. In this forward-speed problem, however, more careful analysis seems to be necessary especially for the line-integral term (which is 2nd-order in the velocity potential) and also in applying the Green's 2nd identity to convert the integral on  $S_\infty$  into the same one with opposite sign on  $S_B$ , because the free-surface boundary condition includes speed-dependent terms which makes the integral on  $S_F$  not simply zero, unlike the zero-speed case.

In order to consider extension of the analysis, we will start with the momentum-conservation principle to consider correctly the forward-speed effect. Since there is a uniform flow on  $S_\infty$ , an equation corresponding to Eq. (8) must be of the form

$$\overline{F_x} = \overline{\iint_{S_B} p n_x dS} = -\overline{\iint_{S_\infty} \left\{ p n_x + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} - U n_x \right) \right\} dS} \tag{28}$$

where the pressure and the free-surface elevation at  $S_\infty$  can be written as

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right) \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_w &= -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=0} = \Re \left[ -\frac{1}{g} \left( i\omega_e - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi e^{i\omega_e t} \right]_{z=0} \\ \omega_e &= \omega - \frac{\omega^2}{g} U \cos \beta = \omega + \frac{\omega^2}{g} U \quad (\text{for } \beta = \pi) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Therefore, the formula for the  $x$ -component of the 2nd-order force can be obtained as follows:

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= \rho \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \overline{\left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}} dl \\ &\quad + \rho U \int_{C_\infty} \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \zeta_w n_x} dl + \rho \int_{C_\infty} \overline{\left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \zeta_w + \frac{1}{2} g \zeta_w^2 \right\}}_{z=0} n_x dl \\ &= \rho \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \overline{\left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\}} dl - \frac{\rho}{2g} \int_{C_\infty} \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}_{z=0} n_x dl \\ &= \frac{\rho}{2} \Re \int_{-\infty}^0 dz \int_{C_\infty} \overline{\left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}} dl - \frac{\rho}{4} \int_{C_\infty} \overline{\left( K_e \phi \phi^* - \frac{1}{K_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right)}_{z=0} n_x dl \end{aligned} \quad (31)$$

where  $K_e = \omega_e^2/g$ ,  $\tau = U\omega_e/g$  (which will be used later), and  $K_0 = g/U^2$ .

Then, regarding the first term on the right-hand side of Eq. (31), the same transformation as that for the zero-speed case, i.e. Eq. (20) through Eq. (27), can be used, although the velocity potential  $\phi$  includes implicitly the forward-speed effects. That is,

$$\frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{2} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (32)$$

where

$$\mathbf{A} = \left( 0, -\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z}, \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) \quad (33)$$

Substituting this result into Eq. (31), we can write as follows:

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS \\ &\quad + \frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS - \frac{\rho}{4} \int_{C_\infty} \overline{\left( K_e \phi \phi^* - \frac{1}{K_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right)}_{z=0} n_x dl \end{aligned} \quad (34)$$

It should be noted that the free-surface condition satisfied by  $\Phi$  on  $C_\infty$  located far from a body is given as

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \quad \text{on } z = 0 \quad (35)$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = K_e \phi^* - i2\tau \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \quad \text{on } z = 0 \quad (36)$$

Therefore, as previously, the second term on the right-hand side of Eq. (34) can be transformed with Stokes' formula in terms of the linearized uniform-flow free-surface condition, Eq. (36), valid at a far field. The result must have the following form

$$\begin{aligned} \iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS &= - \int_{C_\infty} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_\infty} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z} dy \quad \leftarrow dy = n_x dl \\ &= \int_{C_\infty} \phi \left\{ K_e \phi^* - i2\tau \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \right\}_{z=0} n_x dl \quad \leftarrow \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \equiv \phi_x^* \\ &= \int_{C_\infty} \phi \left\{ K_e \phi^* - i2\tau \phi \phi_x^* - \frac{1}{K_0} \phi \phi_{xx}^* \right\}_{z=0} n_x dl \end{aligned} \quad (37)$$

Substituting this in Eq. (34) and applying the Green's 2nd identity for the first term on the right-hand side of Eq. (34), it follows that

$$\begin{aligned}\overline{F_x} = & -\frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_B+S_F} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_x^* \right\} dS \\ & + \frac{\rho}{4} \Re \int_{C_\infty} \left\{ -i2\tau \phi \phi_x^* + \frac{1}{K_0} (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) \right\}_{z=0} n_x dl\end{aligned}\quad (38)$$

Then, in what follows, we will consider the surface integral on  $S_F$  appearing in the first line on the right-hand side for both the Neumann-Kelvin and double-body-flow formulations.

### 6.1 Neumann-Kelvin formulation

In this case, the free-surface boundary condition is the same as Eq. (36); that is,

$$\frac{\partial \phi_x^*}{\partial z} = K_e \phi_x^* - i2\tau \phi_{xx}^* - \frac{1}{K_0} \phi_{xxx}^*, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = K_e \phi + i2\tau \phi_x - \frac{1}{K_0} \phi_{xx}\quad (39)$$

Therefore, with Gauss' theorem and a relation of  $dy = n_x dl$ , we have the following

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_f \equiv & -\iint_{S_F} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_x^* \right\} dS = -\iint_{S_F} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \phi_x^* \right\} dx dy \\ = & -\iint_{S_F} \left[ \phi \left\{ K_e \phi_x^* - i2\tau \phi_{xx}^* - \frac{1}{K_0} \phi_{xxx}^* \right\} - \left\{ K_e \phi + i2\tau \phi_x - \frac{1}{K_0} \phi_{xx} \right\} \phi_x^* \right] dx dy \\ = & \iint_{S_F} \left[ i2\tau \frac{d}{dx} (\phi \phi_x^*) - \frac{1}{K_0} \frac{d}{dx} (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) \right] dx dy \\ = & \left[ \int_{C_B} + \int_{C_\infty} \right] \left\{ i2\tau \phi \phi_x^* - \frac{1}{K_0} (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) \right\}_{z=0} n_x dl\end{aligned}\quad (40)$$

By substituting this result into Eq. (38), we can see that the line-integral term on  $C_\infty$  cancels exactly with the last term in Eq. (38), but instead another line-integral term along  $C_B$  must be included as in the following form

$$\begin{aligned}\overline{F_x} = & -\frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_B} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_x^* \right\} dS \\ & + \frac{\rho}{4} \Re \int_{C_B} \left\{ i2\tau \phi \phi_x^* - \frac{1}{K_0} (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) \right\}_{z=0} n_x dl\end{aligned}\quad (41)$$

This is an extension of Eq. (27) to the case of Neumann-Kelvin formulation taking account of the uniform flow only as the forward-speed effect.

The second-line in this expression becomes zero for the zero-speed case and also for a submerged body even with forward speed. In fact, it is shown that computed results using Eq. (27) for a submerged spheroid with forward speed agree well with corresponding results using the direct pressure integration. However, once Eq. (27) has been applied for a surface-piercing ship, the discrepancy tends to deteriorate with increasing the forward speed and the ship's bluntness, due to existence of the speed-dependent line-integral term along  $C_B$ .

### 6.2 Double-body-flow formulation

In this case, the most commonly-used equation as the free-surface boundary condition may be written in the following form

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial z} = & K_e \phi - i2\tau \nabla \Phi_S \cdot \nabla \phi - \frac{1}{K_0} \nabla \Phi_S \cdot \nabla (\nabla \Phi_S \cdot \nabla \phi) \\ & - \frac{1}{K_0} \nabla \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi_S \cdot \nabla \Phi_S \right) \cdot \nabla \phi - \nabla^2 \Phi_S \left( i\tau \phi + \frac{1}{K_0} \nabla \Phi_S \cdot \nabla \phi \right) \quad \text{on } z = 0\end{aligned}\quad (42)$$

where  $K_e = \omega_e^2/g$ ,  $\tau = U \omega_e/g$ , and  $K_0 = g/U^2$ , with following expressions adopted

$$\left. \begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}, t) &= U \Phi_S(\mathbf{x}) + \Re \left[ \phi(\mathbf{x}) e^{i\omega_e t} \right] \\ \Phi_S(\mathbf{x}) &= -x + \varphi_S(\mathbf{x})\end{aligned} \right\} \quad (43)$$

We note that the second line in Eq. (42) originates from the Taylor-series expansion as an interaction between steady-disturbance and unsteady flows (in particular, the last term is a first-order correction of the difference between  $z = \zeta_w$  and  $z = 0$ ); which vanishes in the Neumann-Kelvin formulation. Since the rigid-wall boundary condition is satisfied by  $\Phi_S$  on  $z = 0$ , the differential operator  $\nabla$  in Eq. (42) must be interpreted as two dimensional; that is, only with respect to  $x$  and  $y$  in the horizontal plane  $z = 0$ .

The body boundary condition for the double-body velocity potential  $\Phi_S(\mathbf{x})$  is expressed as

$$\frac{\partial \Phi_S}{\partial n} = 0 \quad \left( \text{or } \frac{\partial \varphi_S}{\partial n} = n_x \right) \quad \text{on } S_B \quad (44)$$

Eq. (42) can be written with indicial notation in the form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} = & K_e \phi - i2\tau \left\{ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_j^2} \phi \right\} \\ & - \frac{1}{K_0} \left[ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_j^2} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

where the Einstein's summation convention is adopted.

Using this boundary condition, the integrand in the surface integral on  $S_F$ , corresponding to Eq. (40), may be transformed as follows:

$$\begin{aligned} & - \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \phi_x^* \right\} \\ & = - \phi \left[ K_e \phi_x^* + i2\tau \left\{ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_j^2} \phi_x^* \right\} - \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \right\} \right] \\ & + \phi_x^* \left[ K_e \phi - i2\tau \left\{ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_j^2} \phi \right\} - \frac{1}{K_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\} \right] \\ & = - i2\tau \left\{ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \left( \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} + \phi_x^* \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_j^2} \phi \phi_x^* \right\} \\ & - \frac{1}{K_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \phi_x^* - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_k} \right) \phi + \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \phi_x^* - \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \phi \right\} \right] \\ & = - i2\tau \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \phi \phi_x^* \right] - \frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \left\{ \phi_x^* \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_k} \right\} \right] \\ & \quad - \frac{1}{K_0} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \phi_x^* - \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \phi \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

Therefore, in the surface integral  $\mathcal{I}_f$  corresponding to Eq. (40) on  $S_F$ , we can apply the Gauss theorem for the first and second terms on the right-hand side of Eq. (46), with the result

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_f & \equiv - \iint_{S_F} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_x^* \right\} dS \\ & = - i2\tau \left[ \int_{C_B} + \int_{C_\infty} \right] \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} \phi \phi_x^* d\ell - \frac{1}{K_0} \left[ \int_{C_B} + \int_{C_\infty} \right] \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \left\{ \phi_x^* \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_k} \right\} d\ell \\ & \quad - \frac{1}{K_0} \iint_{S_F} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \phi_x^* - \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \phi \right\} dx dy \end{aligned} \quad (47)$$

Here, we note that the line-integral term on  $C_B$  must be zero because of the body boundary condition for  $\Phi_S$  as given by Eq. (44) and that the line-integral term on  $C_\infty$  can be rewritten by assuming  $\varphi_S(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  at  $C_\infty$  (which is the case!) and hence

$$\Phi_S \simeq -x, \quad \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} = -\delta_{k1}, \quad \frac{\partial \Phi_S}{\partial n} \simeq -n_x \quad \text{on } C_\infty \quad (48)$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_f &= -i2\tau \int_{C_\infty} (-n_x) \phi \phi_x^* dl - \frac{1}{K_0} \int_{C_\infty} n_x (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) dl \\
&\quad - \frac{1}{K_0} \iint_{S_F} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \phi_x^* - \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \phi \right\} dx dy \\
&= \int_{C_\infty} \left\{ i2\tau \phi \phi_x^* - \frac{1}{K_0} (\phi_x \phi_x^* - \phi \phi_{xx}^*) \right\}_{z=0} n_x dl \\
&\quad - \frac{1}{K_0} \iint_{S_F} \nabla \left( \frac{1}{2} \nabla \Phi_S \cdot \nabla \Phi_S \right) \left\{ \phi_x^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi_x^* \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{49}$$

Substituting this into Eq.(47), we can see that the line-integral term on  $C_\infty$  cancels with the last term in Eq.(47), as in the Neumann-Kelvin problem, and thus the resulting expression for the time-averaged steady force takes the following form

$$\begin{aligned}
\overline{F_x} &= -\frac{\rho}{4} \Re \iint_{S_B} \left\{ \phi \frac{\partial \phi_x^*}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_x^* \right\} dS \\
&\quad - \frac{\rho}{4K_0} \Re \iint_{S_F} \frac{\partial \Phi_S}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi_S}{\partial x_k \partial x_j} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \phi_x^* - \frac{\partial \phi_x^*}{\partial x_j} \phi \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{50}$$

What is important and interesting here is that there is no line-integral term along  $C_B$  in the double-body-flow formulation because of satisfaction of the body boundary condition by the double-flow velocity potential, Eq.(44), but instead a partial integration on the free surface shown as the second line of Eq.(50) must be evaluated. The reason of ‘*partial*’ integral is that the double-body velocity potential  $\Phi_S$  may be represented with a doublet (because the sum of hydrodynamic sources and sinks must be zero for a rigid closed body), and hence at a distance from the body, the order of the velocity potential and its derivatives becomes

$$\Phi_S \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right) \longrightarrow \nabla \Phi_S \sim O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \nabla^2 \Phi_S \sim O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{51}$$

This implies that the order of integrand in the last term of Eq.(50) becomes  $O(1/r^7)$ , which decays rapidly as the distance from the body,  $r$ , increases.

As we can see from Eq.(42), this remaining integral on  $S_F$  in Eq.(50) originates from the Taylor-series expansion of the dynamic steady pressure  $\frac{1}{2} \nabla \Phi_S \cdot \nabla \Phi_S$ . Hence, if a solution of the Rankine panel method would be obtained without this term in the free-surface boundary condition, there is no need to include the last term in Eq.(50); that is, the last term disappears in the free-surface integral in the Green’s second identity. However, this kind of solution is rare and inconsistent, and the usual Rankine panel method adopts the full expression of Eq.(42) in the framework of the double-body-flow formulation. Therefore it seems plausible to evaluate the last term in Eq.(50) in the Rankine panel method using the double-body-flow formulation.

## References

- [1] Maruo, H.: The Drift of a Body Floating on Waves, *Journal of Ship Research*, Vol. 4, pp. 1–10, 1960.
- [2] Xingyu Song, Xinshu Zhang, Robert F. Beck: Numerical Computations of Ship Added Resistance in Time Domain, *Proc. of the 35th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies (IWWWFB)*, Seoul, Korea, 2021. <http://www.iwwwfb.org/Abstracts/iwwwfb36/IWWWFB36GLOBAL036.pdf>
- [3] Landweber, L. and Yih, C.S.: Forces, moments, and added masses for Rankine bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 319–336, 1956.
- [4] Bessho, M.: On the Wave Pressure Acting on a Fixed Cylindrical Body (別所正利: 固定筒体に及ぼす波の圧力に就いて), 造船協会論文集, 第 101 号, pp. 1–9, 1957.
- [5] Ledoux, A., Molin, B., Delhommeau, G. and Remy, F.: A Lagally formulation of the wave drift force, *Proc. of the 21st Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies (IWWWFB)*, Loughborough, UK, 2006. [http://www.iwwwfb.org/Abstracts/iwwwfb21/iwwwfb21\\_27.pdf](http://www.iwwwfb.org/Abstracts/iwwwfb21/iwwwfb21_27.pdf)
- [6] Newman, J.N.: The Drift Force and Moment on Ships in Waves, *Journal of Ship Research*, Vol. 11., No. 1, pp. 51–60, 1967.

- [7] Tsubogo, T.: The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves, *Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers (JASNAOE)*, in Japanese, No. 5, pp. 143–153, 2007.
- [8] Tsubogo, T.: The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves (2nd Report), *Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers (JASNAOE)*, in Japanese, No. 6, pp. 347–350, 2007.
- [9] Tsubogo, T.: The Drift Force Acting on a Floating Body in Waves (3rd Report), *Journal of the Japan Society of Naval Architects and Ocean Engineers (JASNAOE)*, in Japanese, No. 8, pp. 219–224, 2008.  
[https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjasnaoe/8/0/8\\_0\\_219/\\_pdf/-char/ja](https://www.jstage.jst.go.jp/article/jjasnaoe/8/0/8_0_219/_pdf/-char/ja)
- [10] Tsubogo, T.: Reciprocal Form of the Wave Drift Force and Moment Acting on Floating Body, *Proceedings of the 27th OMAE Conference*, Estoril, Portugal, (OMAE2008-57694), 2008.

# 付加質量に関するTaylorの定理と流体力に関するLagallyの定理

関西設計株式会社 柏木 正

## 1. はじめに

物体の運動に伴う流体の攪乱によって流体圧が変化すると、その圧力を物体表面で積分することによって動的な流体力を計算することができる。この原理的な基本式は、運動量保存則にガウスの定理を用いたり、境界条件を考慮しながらグリーンの公式を適用したりすることによって、より簡単に精度良く計算できる式に変換することができる。またそれによって物体の存在を示す流体力学的特異点と流体力の関係や、流体力と物体が造る波との関係などを理解することができる。

物体の加速度に比例する流体力である付加質量に関しては古くから計算法や基本特性が知られているが、最近では、波漂流力など非定常問題における時間平均値としての非線形（2次の）流体力の計算にLagallyの定理を適用した論文も目にするがある。そこで本稿では、付加質量に関するTaylorの定理、物体に働く流体力に関するLagallyの定理について、以下の参考論文を参照しながら基本知識を整理しておく。

## 参考文献

- [1] Landweber, L. and Yih, C.S.: Forces, moments, and added masses for Rankine bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 319–336, 1956.
- [2] 船舶流体力学ノート(7), 日本造船学会誌, 第565号, pp. 349–359, 1976.

## 2. 定式化, 境界条件

Fig. 1のように物体が流体領域内に在り、その表面を $S_B$ と表す。この物体の存在を流体力学的に表すには、物体内部および表面上にわき出し（吸い込み）、二重わき出しなどの流体力学的特異点（場合によってはその連続分布）が置かれる。それらを数学的に取り扱うために、内部特異点は半径 $\epsilon$ （ $\epsilon$ は小さいと考え、最終的には $\epsilon \rightarrow 0$ とする）の小球で取り囲まれており、その表面を $S'$ と表す。法線ベクトル $\mathbf{n}$ は物体内の

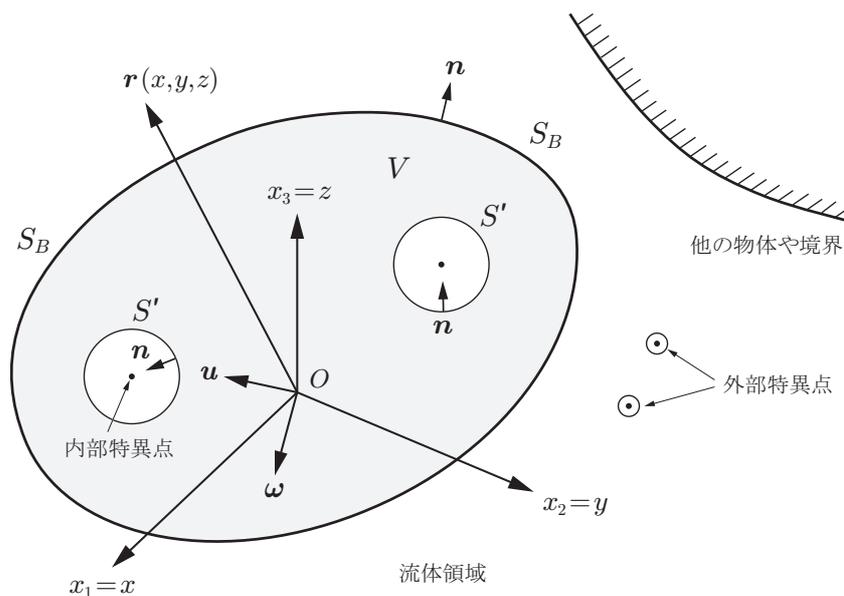


Fig. 1 Lagally の定理における座標系と関連の記号

領域 ( $V$ ) から外向きを正方向と定義する. また物体より外側には他の物体や境界面, あるいはそれらに  
関係した外部特異点も存在していると仮定し, それらによる流れは場所によって異なる非一様流れになっ  
ているという前提で考えることにしよう.

さて, 物体は直線運動  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  と回転運動  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \equiv (u_4, u_5, u_6)$  をしていると考えると,  
物体表面での速度ポテンシャルに関する境界条件は以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= (\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \sum_{\alpha=1}^6 u_{\alpha} n_{\alpha} \equiv u_{\alpha} n_{\alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= (n_1, n_2, n_3) \\ \mathbf{r} \times \mathbf{n} &= (n_4, n_5, n_6) \longrightarrow n_{i+3} = \varepsilon_{ijk} x_j n_k \quad (i = 1, 2, 3) \\ &= (x_2 n_3 - x_3 n_2, x_3 n_1 - x_1 n_3, x_1 n_2 - x_2 n_1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表す. (1) 式での和の記号は省略し, 同じ添え字が 2 個あればそれについて 1~3 の和を考えるというベ  
クトルの内積に関する総和規約 (Einstein's summation convention) とする. また (2) 式の  $\varepsilon_{ijk}$  はベクトルの  
外積を表す交代テンソルであり,  $(i, j, k)$  が  $(1, 2, 3)$   $(2, 3, 1)$   $(3, 1, 2)$  のような cyclic の場合には  $\varepsilon_{ijk} = 1$ ,  
逆回りの acyclic の場合には  $\varepsilon_{ijk} = -1$ ,  $i, j, k$  の中に同じ値があるときには  $\varepsilon_{ijk} = 0$  という意味である. ま  
た Kronecker のデルタ記号  $\delta_{ij}$  を用いて, 次の関係式を用いることがある.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (3)$$

(1) 式を満たすために, 速度ポテンシャルを次のように表す.

$$\phi \equiv u_{\alpha} \phi_{\alpha} + \phi_0 \quad (4)$$

$\phi_{\alpha}$  は  $\alpha$  方向の速度  $u_{\alpha}$  の運動による (単位速度の) radiation ポテンシャル,  $\phi_0$  は物体が静止 ( $u_{\alpha} = 0$ ) し  
ているときの外乱による速度ポテンシャルとする. このとき (1) 式から

$$\frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial n} = n_{\alpha}, \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_B \quad (5)$$

を満たす必要がある. また (1) 式は次のように表すこともできる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &\equiv v_i \longrightarrow v_i n_i = (u_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k) n_i \\ \longrightarrow V_i n_i &= 0 \quad \text{where } V_i \equiv u_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k - v_i \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ベルヌーイの圧力方程式は, 物体固定の動座標系で表すと次式のように書ける.

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= -\frac{\partial \phi}{\partial t} - W \\ W &= \frac{1}{2} (v_j^2 + u_j^2) - v_j (u_j + \varepsilon_{jkl} \omega_k x_l) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

付加質量は, 流体の運動エネルギー  $T_L$  によって定義できる.  $\mathbf{n}$  は流体の内向きとなっているので,

$$\begin{aligned} 2T_L &= \rho \iiint_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV = \rho \iiint_V \nabla(\phi \nabla \phi) dV \\ &= -\rho \iint_{S_B} \mathbf{n} \phi \nabla \phi dS = -\rho \iint_{S_B} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &= -\rho \iint_{S_B} u_{\alpha} \phi_{\alpha} u_{\beta} n_{\beta} dS = \left[ -\rho \iint_{S_B} \phi_{\alpha} n_{\beta} dS \right] u_{\alpha} u_{\beta} \equiv A_{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

すなわち

$$A_{\alpha\beta} = -\rho \iint_{S_B} \phi_{\alpha} n_{\beta} dS = -\rho \iint_{S_B} \phi_{\alpha} \frac{\partial \phi_{\beta}}{\partial n} dS \quad (9)$$

が radiation ポテンシャル  $\phi_\alpha$  を用いた定義式となる．またグリーンの公式を用いると，次に示す付加質量の対称性を容易に証明することができる．

$$\iint_{S_B} \left\{ \phi_\alpha \frac{\partial \phi_\beta}{\partial n} - \phi_\beta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} \right\} dS = 0 \quad \longrightarrow \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \quad (10)$$

また後の解析で必要になるので，(8) 式に対応して，物体と見なしている排除流体の持つ運動エネルギー  $T_B$  について次のように表しておく．

$$2T_B = \rho \iiint_V (u_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k)(u_i + \varepsilon_{ilm} \omega_\ell x_m) dV \equiv B_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{\alpha\beta} &= B_{\beta\alpha}, \quad B_{ij} = B \delta_{ij}, \quad B_{i,3+j} = B \varepsilon_{ijk} \bar{x}_k \\ B &= \rho \iiint_V dV, \quad B \bar{x}_k = \rho \iiint_V x_k dV, \quad B_{3+i,3+j} = \rho \iiint_V (x_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### 3. 速度ポテンシャルの展開式

これも後の解析で必要になるので，速度ポテンシャルとその微分に関する表示式について整理しておく．まず特異点を含まない領域ではラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 0 \quad (13)$$

を満たすが，強さ  $m$  (わき出し量  $Q = 4\pi m$ ) の孤立わき出しの場合，及び密度  $\sigma$  の連続分布の場合には次のように表される．

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 4\pi m \delta(\mathbf{r}_s), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 4\pi \sigma(\mathbf{r}) \quad (14)$$

ここで  $\delta(\mathbf{r}_s)$  は特異点  $(x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$  を原点とするデルタ関数であり， $\mathbf{r}_s = (x_i - x_{is})$  と表す．

#### 3.1 わき出しの近傍での展開式

速度ポテンシャル及びその微分は次のような展開式となる．

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\frac{m}{r_s} + (\phi')_s + (x_j - x_{js}) \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \right)_s + \dots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \equiv v_i &= -\frac{m}{r_s^2} n_i + (v'_i)_s + (x_j - x_{js}) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)_s + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで

$$v'_i = \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} \right)_s, \quad n_i \equiv \frac{x_{is} - x_i}{r_s} \quad (\mathbf{n} \text{ の正方向に注意, Fig.1 参照}) \quad (16)$$

#### 3.2 二重わき出しの近傍での展開式

$x_{jd}$  に在る孤立二重わき出しの強さが  $\bar{\mu}$  (軸を持つので各座標軸成分を  $\mu_j$  と表す) とすると， $r_d^2 = (x_j - x_{jd})^2$  として次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu_j n_j}{r_d^2} + (\phi')_d + (x_j - x_{jd}) \left( \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} \right)_d + \dots \\ &= \frac{\mu_j (x_{jd} - x_j)}{r_d^3} + (\phi')_d + (x_j - x_{jd}) (v'_j)_d + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \equiv v_i &= \frac{3\mu_j (x_{jd} - x_j)}{r_d^4} n_i - \frac{\mu_j \delta_{ij}}{r_d^3} + (v'_i)_d + (x_j - x_{jd}) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)_d + \dots \\ &= \frac{1}{r_d^3} (3\mu_j n_j n_i - \mu_i) + (v'_i)_d + (x_j - x_{jd}) \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)_d + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

## 4. 数式変形の準備

### 4.1 ガウスの定理とグリーンの公式

Fig.1 を参照し、物体表面  $S_B$  と内部特異点の表面  $S'$  で取り囲まれた内部領域  $V$  に対してガウスの定理を適用すると次式を得る.

$$\iint_{S_B} \phi n_i dS = \iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV - \iint_{S'} \phi n_i dS' \quad (19)$$

グリーンの公式は次のように表される.

$$\iint_{S_B} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \left( \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} - \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} \right) dV - \iint_{S'} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS'$$

よって  $\phi$  がポアソン方程式,  $\psi$  がラプラス方程式を満たすなら

$$\iint_{S_B} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = -4\pi \iiint_V \sigma \psi dV - \iint_{S'} \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS' \quad (20)$$

を得る.  $S'$  は半径  $r = \epsilon$  の微小球 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) と考えるので, 内部特異点に球座標の原点を取れば

$$\left. \begin{aligned} dS' &= \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \iint_{S'} \frac{dS'}{r} &= 0, \quad \iint_{S'} \frac{dS'}{r^2} = 4\pi, \quad \iint_{S'} \frac{x_i^2}{r^4} dS' = \frac{4}{3}\pi \quad (\text{for } i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

のような積分値を得ることができ, これらの計算が後で使われる.

### 4.2 Lagally の定理で用いる微分

まず, (6) 式の  $V_i$  に対する  $x_k$  の微分は

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \omega_j \quad (22)$$

となり, よって  $k = i$  のときは  $\varepsilon_{iji} = 0$  であるから,  $\phi$  がポアソン方程式を満たすなら次式を得る.

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = -4\pi\sigma \quad (23)$$

次に (7) 式の  $W$  に対する  $x_i$  の微分は次のように計算できる.

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} (u_j + \varepsilon_{jkl} \omega_k x_\ell) - v_j \varepsilon_{jkl} \omega_k \delta_{li}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) &= v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad \leftarrow \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = 4\pi\sigma \\ &= v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_i 4\pi\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_i \left\{ v_j - u_j - \varepsilon_{jkl} \omega_k x_\ell \right\} - \varepsilon_{ijk} \phi \omega_k \right] - 4\pi\sigma v_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -v_i V_j - \varepsilon_{ijk} \phi \omega_k \right] - 4\pi\sigma v_i \end{aligned} \quad (24)$$

次にモーメントの計算に関連して以下の式変形を考える. まず(24)式で  $(i, j, k) \rightarrow (k, \ell, m)$  と書き換えておき, 次の式変形を考える.

$$M_i \equiv \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial W}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \left[ -x_j \frac{\partial}{\partial x_\ell} (v_k V_\ell) - x_j \varepsilon_{klm} v_\ell \omega_m - 4\pi\sigma x_j v_k \right]$$

ここで

$$-x_j \frac{\partial}{\partial x_\ell} (v_k V_\ell) = -\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_j v_k V_\ell) + v_k V_j$$

$$M_i = \varepsilon_{ijk} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_j v_k V_\ell) + V_j v_k - x_j \varepsilon_{k\ell m} v_\ell \omega_m - 4\pi\sigma x_j v_k \right] \quad (25)$$

ここで

$$\begin{aligned} N_i &\equiv \varepsilon_{ijk} \{ V_j v_k - x_j \varepsilon_{k\ell m} v_\ell \omega_m \} \longleftarrow V_j = u_j + \varepsilon_{j p q} \omega_p x_q - v_j \\ &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k + \varepsilon_{jki} \varepsilon_{j p q} \omega_p x_q v_k - x_j \varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m} v_\ell \omega_m \longleftarrow \varepsilon_{ijk} v_j v_k = 0 \\ &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k + \omega_k x_i v_k - \omega_i x_k v_k - x_j v_i \omega_j + x_j v_j \omega_i \\ &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k + \omega_j (x_i v_j - x_j v_i) \\ &= \varepsilon_{ijk} u_j v_k + \omega_j \varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m} x_\ell v_m = \varepsilon_{ijk} \left\{ u_j v_k - \omega_j \varepsilon_{k\ell m} v_\ell x_m \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

よって

$$\begin{aligned} M_i &= \varepsilon_{ijk} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_j v_k V_\ell) - 4\pi\sigma x_j v_k \right] + N_i \\ &= \varepsilon_{ijk} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_j v_k V_\ell) + u_j v_k - \omega_j \varepsilon_{k\ell m} v_\ell x_m - 4\pi\sigma x_j v_k \right] \end{aligned} \quad (27)$$

## 5. 付加質量に関する Taylor の定理

### 5.1 二次元流れ

付加質量の計算式は(9)式であるが、2次元問題では複素速度ポテンシャル  $f(z)$  を用いて式変形を行う。

$$f(z) = \phi_\alpha(x_1, x_2) + i\psi_\alpha(x_1, x_2), \quad z \equiv x_1 + ix_2 (= x + iy) \quad (28)$$

(9)式より

$$\begin{aligned} A_{\alpha 1} + iA_{\alpha 2} &= -\rho \int_C \phi_\alpha (n_1 + in_2) ds \longleftarrow dz = i ds (n_1 + in_2) \\ &= i\rho \int_C \phi_\alpha dz = i\rho \left\{ \int_C f(z) dz - i \int_C \psi_\alpha dz \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$\psi$  に関する最後の項は、部分積分とガウスの定理を用いると以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \rho \int_C \psi_\alpha dz &= -\rho \int_C z \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} ds \longleftarrow \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial s} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} = n_\alpha \\ &= -\rho \iint_S \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (z) dS = -\rho \iint_S \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (x_1 + ix_2) dS \\ &= -\{ B \delta_{\alpha 1} + i B \delta_{\alpha 2} \} = -\{ B_{\alpha 1} + i B_{\alpha 2} \} \end{aligned} \quad (30)$$

排水容積（面積）に関しては(12)式の記法を用いた。これを(29)式に代入すると次の式を得る。

$$A_{\alpha 1} + iA_{\alpha 2} + B_{\alpha 1} + iB_{\alpha 2} = i\rho \int_C f(z) dz \quad (31)$$

具体的に  $f(z)$  を考えてみると、以下のように計算することができる。

#### (1) 二重わき出し (ダブルット)

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= -\frac{\mu_\alpha}{z - z_d} \\ i\rho \int_C f(z) dz &= -i\rho \mu_\alpha 2\pi i = 2\pi\rho \mu_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで  $\mu_\alpha$  は大きさ（強さ）だけでなく、方向も表す複素数であることに注意のこと。

#### (2) わき出し

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= m_\alpha \log(z - z_s) \\ \log(z - z_s) &= \log z \left( 1 - \frac{z_s}{z} \right) = \log z + \log \left( 1 - \frac{z_s}{z} \right) = \log z - \frac{z_s}{z} + \dots \\ i\rho \int_C f(z) dz &= -i\rho m_\alpha z_s 2\pi i = 2\pi\rho (m_\alpha z_s) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

### (3) わき出しの連続分布

(33) 式の  $m_\alpha$  を密度  $\sigma_\alpha(z)$  と置き換えることによって次式となる.

$$i\rho \int_C f(z) dz = 2\pi\rho \iint_S \sigma_\alpha z dS \quad (34)$$

以上の結果をまとめると次のように表される.

$$A_{\alpha 1} + B_{\alpha 1} + i(A_{\alpha 2} + B_{\alpha 2}) = 2\pi\rho \left[ \iint_S \sigma_\alpha z dS + \sum (m_\alpha z_s + \mu_\alpha) \right] \quad (35)$$

## 5.2 三次元流れ

(9) 式の計算を物体内の特異点まわりの計算に置き換えるために, 3次元問題ではグリーンの公式(20)式を用いる.

$$\begin{aligned} A_{\alpha j} &= -\rho \iint_{S_B} \phi_\alpha n_j dS = -\rho \iint_{S_B} \phi_\alpha \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= -\rho \underbrace{\iint_{S_B} x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} dS}_{-B_{\alpha j}} + 4\pi\rho \iiint_V x_j \sigma_\alpha dV + \rho \iint_{S'} \left( \phi_\alpha n_j - x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} \right) dS' \end{aligned} \quad (36)$$

$$= -\rho \iint_{S_B} x_j n_\alpha dS = -\rho \iiint_V \delta_{\alpha j} dV = -B \delta_{\alpha j} \equiv -B_{\alpha j}$$

よって

$$A_{\alpha j} + B_{\alpha j} = 4\pi\rho \iiint_V x_j \sigma_\alpha dV - \rho \iint_{S'} \left( x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} - \phi_\alpha n_j \right) dS' \quad (37)$$

### (1) わき出し

速度ポテンシャルは内部特異点の近傍で (15) 式のように表すことができる. (37) 式の面積分を行う際には, 内部特異点の位置に球座標の原点を取るように座標変換して考えると (21) 式を適用することができ, 次のように計算できる. (ただし, 法線方向が  $-r$  方向であることを注意のこと.)

$$\begin{aligned} x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} &= x_j n_k \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \rightarrow (x_{js} - r n_j) \left\{ -\frac{m_\alpha}{r^2} + (v'_k)_s n_k + \dots \right\} \\ &\left. \begin{aligned} \iint_{S'} x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} dS' &= -x_{js} m_\alpha 4\pi \\ - \iint_{S'} \phi_\alpha n_j dS' &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

### (2) 二重わき出し (ダブルット)

$$\begin{aligned} x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} &= x_j n_k \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \rightarrow (x_{jd} - r n_j) \left\{ \frac{1}{r^3} (3\mu_\ell n_\ell - \mu_k n_k) + (v'_k)_d n_k + \dots \right\} \\ &= (x_{jd} - r n_j) \left\{ \frac{2}{r^3} \mu_k n_k + (v'_k)_d n_k + \dots \right\} \\ &\left. \begin{aligned} \iint_{S'} x_j \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial n} dS' &= -2 \iint_{S'} \frac{\mu_k}{r^2} n_j n_k dS' = -\frac{2}{3} \mu_j 4\pi \\ - \iint_{S'} \phi_\alpha n_j dS' &= - \iint_{S'} \frac{\mu_k n_k}{r^2} n_j dS' = -\frac{1}{3} \mu_j 4\pi \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

以上の結果をまとめると次のように表される.

$$A_{\alpha j} + B_{\alpha j} = 4\pi\rho \left[ \iiint_S \sigma_\alpha x_j dV + \sum (m_\alpha x_{js} + \mu_{\alpha j}) \right] \quad (40)$$

この式が付加質量に関する Taylor の定理と言われている.

ところが、これまでに考えてきた内部特異点は radiation ポテンシャル  $\phi_\alpha$  に関するものであった。他の境界や外部特異点（他の物体）がある時、それらの影響は (4) 式の  $\phi_0$  の項として考慮されるので、それについて考えよう。  $\phi_0$  を次のように分離する。

$$\phi_0 = \phi'_0 + \phi''_0 \quad (41)$$

ここで  $\phi'_0$  は本来の外部特異点と他の境界の運動を表す特異点による成分、  $\phi''_0$  はそれらの外部特異点が鏡像の原理によって物体内部にできる特異点による成分とする。

(4), (5) 式より

$$\phi = u_\alpha \phi_\alpha + \phi_0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\phi'_0 + \phi''_0) = 0 \quad \text{on } S_B \quad (42)$$

であるから、全部の速度ポテンシャル  $\phi$  による付加質量は

$$\mathcal{L}_j \equiv -\rho \iint_{S_B} \phi n_j dS = u_\alpha A_{\alpha j} - \rho \iint_{S_B} (\phi'_0 + \phi''_0) n_j dS \quad (43)$$

(42) 式の境界条件式を考慮し、グリーンの公式によって物体内部だけを考えて

$$-\rho \iint_{S_B} (\phi'_0 + \phi''_0) n_j dS = 4\pi\rho \iiint_V x_j \sigma_0 dV - \rho \iint_{S'} \left( x_j \frac{\partial \phi''_0}{\partial n} - \phi''_0 n_j \right) dS'$$

ここで  $\sigma_0$  は鏡像特異点によるわき出し分布密度である。右辺第 2 項と  $S'$  上での積分は (40) 式の計算と同様に考えればよいので、(43) 式は以下の式となる。

$$\mathcal{L}_j = u_\alpha A_{\alpha j} + 4\pi\rho \left[ \iiint_V \sigma_0 x_j dV + \sum (m_0 x_{js} + \mu_{0j}) \right] \quad (44)$$

(40) 式の  $A_{\alpha j}$  を上式に代入して整理すると、次のように表すこともできる。

$$-\rho \iint_{S_B} \phi n_j dS + u_\alpha B_{\alpha j} = 4\pi\rho \left[ \iiint_V \sigma x_j dV + \sum (m x_{js} + \mu_j) \right] \quad (45)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= u_\alpha \sigma_\alpha + \sigma_0 \\ m &= u_\alpha m_\alpha + m_0, \quad \mu_j = u_\alpha \mu_{\alpha j} + \mu_{0j} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

回転運動モードによる付加慣性モーメントも次式によって同様に考えることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3+j} &\equiv -\rho \iint_{S_B} \phi n_{3+j} dS \quad \leftarrow n_{3+j} = \varepsilon_{jkl} x_k n_l \\ &= u_\alpha \left[ -\rho \iint_{S_B} \phi_\alpha n_{3+j} dS \right] - \rho \iint_{S_B} \phi_0 n_{3+j} dS \end{aligned} \quad (47)$$

しかしこの式変形は結構複雑であり、(45) 式のような簡単な形にはなっていない。詳細は参考文献[1]に譲り、本稿では省略することにする。

## 【 Note 1 】 円柱および球の付加質量

2次元および3次元の各々代表的な簡単な問題として円柱および球の付加質量を Taylor の定理によって求めてみよう。まず2次元の円柱まわりの流れは複素速度ポテンシャルが

$$f(z) = -U \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (\text{N-1})$$

と表されることから分かるように、原点にあり  $x$  軸正方向に軸を持つ二重わき出し ( $\mu = Ua^2$ ) で表される。また円の面積（排除流体）は  $B = \rho\pi a^2$  である。これらを(35)式に代入すると、

$$\begin{aligned} A_{11} &= -B_{11} + 2\pi\rho\mu \quad \leftarrow U = 1 \\ &= -\rho\pi a^2 + 2\pi\rho a^2 = \rho\pi a^2 = B_{11} \end{aligned} \quad (\text{N-2})$$

が得られる．これは攪乱速度ポテンシャルを用いて定義式から計算した値

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -a^2 \frac{\cos \theta}{r} = -a^2 \frac{x}{r^2}, \quad n_1 = \cos \theta \\ A_{11} &= -\rho \int_C \phi_1 n_1 ds = \rho a^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos \theta d\theta = \rho \pi a^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{N-3})$$

と同じになっていることが分かる．

次に一様流中に置かれた 3 次元の球まわりの流れは速度ポテンシャル

$$\phi = -U \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta = -U \left( x + \frac{a^3 x}{2r^3} \right) \quad (\text{N-4})$$

で表されるので，原点にある二重わき出し（強さ  $\mu = a^3/2$ ，軸は  $x$  軸の正方向）を考えればよい．球の排除流体容積は  $B = \rho 4\pi a^3/3$  であるから (40) 式に代入すると

$$\begin{aligned} A_{11} &= -B_{11} + 4\pi\rho\mu \\ &= -\rho \frac{4}{3}\pi a^3 + 4\pi\rho \frac{a^3}{2} = \rho \frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{1}{2}B_{11} \end{aligned} \quad (\text{N-5})$$

が得られる．これに対しても (N-4) 式の攪乱速度ポテンシャルを使って定義式から計算すると

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{a^3 \cos \theta}{2r^2}, \quad n_1 = \cos \theta \\ A_{11} &= -\rho \iint_S \phi_1 n_1 dS = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \cos^2 \theta a^2 \sin \theta d\theta = \rho \frac{2}{3}\pi a^3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{N-6})$$

となり，同じ結果となることが分かる．

## 6. 流体力に関する Lagally の定理

流体力は物体表面上での圧力積分によって求められるが，その圧力として物体固定の動座標で表した (7) 式を用いると， $i$  方向に働く流体力は

$$F_i = - \iint_{S_B} p n_i dS = \rho \frac{d}{dt'} \iint_{S_B} \phi n_i dS + \rho \iint_{S_B} W n_i dS \quad (48)$$

と表すことができる．動座標での時間微分であることを強調するために  $t'$  を用いていることに注意されたい．(48) 式の時間に関係しない最後の項は，付加質量の計算と同様にガウスの定理を用いて物体内部の積分に変換する．このとき (24) 式を用いると

$$\begin{aligned} \iint_{S_B} W n_i dS &= \iiint_V \frac{\partial W}{\partial x_i} dV - \iint_{S'} W n_i dS' \\ &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -v_i V_j - \varepsilon_{ijk} \phi \omega_k \right] dV - 4\pi \iiint_V \sigma v_i dV - \iint_{S'} W n_i dS' \end{aligned}$$

となる．右辺第 1 項に再度ガウスの定理を使い， $S_B$  上での境界条件  $V_j n_j = 0$  を考慮すると次式を得る．

$$\begin{aligned} \iint_{S_B} W n_i dS &= -\varepsilon_{ijk} \omega_k \iint_{S_B} \phi n_j dS + \iint_{S'} \left[ -v_i V_j - \varepsilon_{ijk} \phi \omega_k \right] n_j dS' \\ &\quad - 4\pi \iiint_V \sigma v_i dV - \iint_{S'} W n_i dS' \end{aligned} \quad (49)$$

これを (48) 式に代入するが，空間静止座標系での時間微分 ( $d/dt$ ) と動座標系での時間微分 ( $d/dt'$ ) との関係は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \frac{d\mathbf{F}}{dt'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} \\ \rightarrow \frac{dF_i}{dt} &= \frac{dF_i}{dt'} + \varepsilon_{ijk} \omega_j F_k = \frac{dF_i}{dt'} - \varepsilon_{ijk} \omega_k F_j \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

であることを用いると次式が得られる.

$$F_i = \rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi n_i dS - 4\pi\rho \iiint_V \sigma v_i dV + \rho \iint_{S'} \underbrace{\left[ -(v_i V_j + \varepsilon_{ijk} \phi \omega_k) n_j - W n_i \right]}_{\equiv \mathcal{I}_i} dS' \quad (51)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i &= -v_i V_j n_j + \phi \varepsilon_{ijk} \omega_j n_k - W n_i \\ &= -v_i \left\{ (u_k + \varepsilon_{klm} \omega_l x_m) n_k - v_k n_k \right\} + \phi \varepsilon_{ijk} \omega_j n_k - \frac{1}{2} v_k^2 n_i + v_k (u_k + \varepsilon_{kpq} \omega_p x_q) n_i \\ &= (u_k + \varepsilon_{klm} \omega_l x_m) \{ v_k n_i - v_i n_k \} + \phi \varepsilon_{ijk} \omega_j n_k + v_i v_k n_k - \frac{1}{2} v_k^2 n_i \end{aligned} \quad (52)$$

これを半径  $r = \epsilon$  の微小球面 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) に対して面積分する. このとき, 対称性によって (52) 式の第 1 項, 第 2 項からの寄与は無いので, 第 3 項, 第 4 項に対して, (15) 式のわき出し, (18) 式のダブレットの和について考えよう. 内部特異点の位置に球座標の原点を取るよう座標変換を考え,  $\epsilon \rightarrow 0$  で寄与の残る項を考えると, 以下のようなになるであろう.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i^{(3)} \equiv v_i v_k n_k &\longrightarrow -\frac{m}{r^2} v'_i - \frac{m}{r^2} n_i n_k v'_k \\ &\quad - \frac{1}{r^2} (3\mu_\ell n_\ell n_i - \mu_i) n_k n_p \left( \frac{\partial v'_k}{\partial x_p} \right) - \frac{1}{r^2} (3\mu_\ell n_\ell - \mu_k n_k) n_p \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_p} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\mathcal{I}_i^{(4)} \equiv -\frac{1}{2} v_k^2 n_i \longrightarrow +\frac{m}{r^2} n_i n_k v'_k + \frac{1}{r^2} (3\mu_\ell n_\ell n_k - \mu_k) n_i n_p \left( \frac{\partial v'_k}{\partial x_p} \right) \quad (54)$$

ここで  $v'_i$  は内部特異点が在る各々の位置における, それ以外の外乱 (物体外の特異点) による流速の  $i$  方向成分を表している. 下線を引いた  $\mathcal{I}_i^{(3)}$  の第 2 項と  $\mathcal{I}_i^{(4)}$  の第 1 項はキャンセルするので考えないことにし, 微小球面での面積分は (21) 式を用いることにすると, 次のような結果になるであろう.

$$\left. \begin{aligned} \iint_{S'} \mathcal{I}_i^{(3)} dS' &= -4\pi m v'_i - 4\pi \left\{ \mu_i - \frac{1}{3} \mu_i \right\} (4\pi\sigma) - 4\pi (2\mu_k) \frac{1}{3} \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \\ \iint_{S'} \mathcal{I}_i^{(4)} dS' &= 4\pi \left\{ \mu_i (4\pi\sigma) - \mu_k \left( \frac{\partial v'_k}{\partial x_i} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

これらの和を考えると次の結果が得られる.

$$\rho \iint_{S'} \left\{ \mathcal{I}_i^{(3)} + \mathcal{I}_i^{(4)} \right\} dS' = -4\pi\rho \sum \left[ m v'_i + \mu_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - \frac{4\pi}{3} \sigma \mu_i \right] \quad (56)$$

よって (51) 式に代入すると次式を得ることができる.

$$F_i = \rho \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi n_i dS - 4\pi\rho \iiint_V \sigma v_i dV - 4\pi\rho \sum \left[ m v'_i + \mu_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - \frac{4\pi}{3} \sigma \mu_i \right] \quad (57)$$

この式の右辺第 1 項は, 第 5 節で示した付加質量の計算に関係しているから, (45) 式の結果を代入しても良い. このときは (12) 式を用いて

$$u_\alpha B_{\alpha i} = (u_j B_{j,i} + \omega_j B_{3+j,i}) = B(u_i + \varepsilon_{ijk} \omega_j \bar{x}_k) \equiv B \bar{u}_i \quad (58)$$

と表せること (ここで  $\bar{u}_i$  は重心速度の  $i$  方向成分) に注意すると

$$\begin{aligned} F_i &= B \frac{d\bar{u}_i}{dt} - 4\pi\rho \frac{d}{dt} \left[ \iiint_V \sigma x_i dV + \sum (m x_{is} + \mu_i) \right] \\ &\quad - 4\pi\rho \left[ \iiint_V \sigma v_i dV + \sum \left\{ m v'_i + \mu_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} - \frac{4\pi}{3} \sigma \mu_i \right\} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

のように表すこともできることが分かる.

続いて物体に働く  $i$  軸まわりのモーメントについても同様に考えてみよう。物体固定の動座標で表した圧力方程式の (7) 式を用いて次式から始める。

$$\begin{aligned} M_i &= - \iint_{S_B} p(\mathbf{n} \times \mathbf{n})_i dS = - \varepsilon_{ijk} \iint_{S_B} p x_j n_k dS \\ &= \rho \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{d}{dt'} \iint_{S_B} \phi x_j n_k dS + \iint_{S_B} W x_j n_k dS \right] \end{aligned} \quad (60)$$

最後の項に対してガウスの定理を適用し、さらに以前に求めた (27) 式ならびに物体表面での境界条件  $V_\ell n_\ell = 0$  on  $S_B$  を用いると次のように式変形できる。

$$\begin{aligned} W_i &\equiv \varepsilon_{ijk} \iint_{S_B} W x_j n_k dS = \varepsilon_{ijk} \left[ \iiint_V x_j \frac{\partial W}{\partial x_k} dV - \iint_{S'} W x_j n_k dS' \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} \left[ \iiint_V \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_j v_k V_\ell) + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \omega_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} x_m - 4\pi \sigma x_j v_k \right\} dV - \iint_{S'} W x_j n_k dS' \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} \left[ - \iint_{S'} x_j v_k V_\ell n_\ell dS' + \iint_{S_B} \phi u_j n_k dS + \iint_{S'} \phi u_j n_k dS' \right. \\ &\quad \left. + \omega_j \varepsilon_{klm} \left\{ \iint_{S_B} \phi x_\ell n_m dS + \iint_{S'} \phi x_\ell n_m dS' \right\} - \iint_{S'} W x_j n_k dS' - 4\pi \iiint_V \sigma x_j v_k dV \right] \\ &= \varepsilon_{ijk} \left[ u_j \iint_{S_B} \phi n_k dS + \omega_j \iint_{S_B} \phi n_{k+3} dS - 4\pi \iiint_V \sigma x_j v_k dV \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_{ijk} \iint_{S'} \left\{ x_j v_k V_\ell n_\ell - (u_j n_k + \omega_j n_{k+3}) \phi + W x_j n_k \right\} dS' \right] \end{aligned} \quad (61)$$

この式を (60) 式に代入すると次式を得る。

$$M_i = \rho \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{d}{dt'} \iint_{S_B} \phi x_j n_k dS + \omega_j \iint_{S_B} \phi n_{k+3} dS + u_j \iint_{S_B} \phi n_k dS \right] + M_{iL}(v) \quad (62)$$

ここで

$$\begin{aligned} M_{iL}(v) &\equiv -4\pi \rho \varepsilon_{ijk} \iiint_V \sigma x_j v_k dV \\ &\quad - \rho \varepsilon_{ijk} \iint_{S'} \left\{ x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k} V_\ell n_\ell - (u_j n_k + \omega_j n_{k+3}) \phi + W x_j n_k \right\} dS' \end{aligned} \quad (63)$$

は定常流中での Lagally モーメントの計算式である。さらに

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_j n_k) &= \frac{d}{dt'} (\varepsilon_{ijk} x_j n_k) + \varepsilon_{ipq} \omega_p (\varepsilon_{qlm} x_\ell n_m) \\ &= \frac{d}{dt'} (\varepsilon_{ijk} x_j n_k) + \varepsilon_{ijk} \omega_j n_{k+3} \end{aligned} \quad (64)$$

を用いると、空間固定座標での時間微分を用いて (62) 式は以下のように書くことができる。

$$M_i = \rho \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{d}{dt} \iint_{S_B} \phi x_j n_k dS + u_j \iint_{S_B} \phi n_k dS \right] + M_{iL}(v) \quad (65)$$

(63) 式の微小球面上の積分は Lagally Force の時と同じようにして内部特異点の情報だけで表すことができる。Landweber らによる参考論文 [1] の結果のみを示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned} M_{iL}(v) &= -4\pi \rho \varepsilon_{ijk} \left[ \iiint_V \sigma x_j v_k dV \right. \\ &\quad \left. + \sum \left( m x_j v'_k + \mu_j v'_k + x_j \mu_\ell \frac{\partial v'_k}{\partial x_\ell} - \frac{4}{3} \pi \sigma x_j \mu_k \right) \right] \end{aligned} \quad (66)$$

また (65) 式の慣性力に関係している右辺第 1 項の計算は、Lagally Force に対する (59) 式の変形と同様に物体の排除流体  $B$  を用いて書くことができるが、式変形がやや複雑となるので、本稿ではそれを省略することにする。

## 7. 波漂流力に対する Lagally の定理の適用

Lagally の定理は、波振幅  $\zeta_a$  の 2 乗に比例し、時間平均を取ったときに得られる波浪定常流体力の計算にも適用することができる。その具体的な解析例を示すために、別所の論文[3]を参照しながら、解析解が得られている無限噴水の垂直円筒コラムに働く波漂流力について考えてみよう。

Lagally の定理は (57) 式あるいは (59) 式で与えられるが、ここではわき出しと法線方向に軸を持つ二重わき出しの物体表面分布を念頭に置き、それらの強さが周期的に変動する場合を考える。すなわち

$$\mathcal{S}(P, t) = \text{Re}[\sigma(P) e^{i\omega t}], \quad \mathcal{D}(P, t) = \text{Re}[\mu(P) e^{i\omega t}] \quad (67)$$

と表し、以下の解析では  $P = (x, y, z)$ ,  $Q = (x', y', z')$  の記号を用いる。  $i$  方向の流速  $v'_i$  は

$$\left. \begin{aligned} v'_i &= \text{Re} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_i} e^{i\omega t} \right] \\ \phi(P) &= \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \left\{ \varphi_0(x, y) + \varphi_B(x, y) \right\}, \quad \varphi_0 = e^{iKx}, \quad K = \frac{\omega^2}{g} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

と表すことにする。ここでの入射波は、以前と同様に  $x$  軸の負方向に進行していると考えている。

このときの時間平均を取った時の定常流体力  $\bar{F}_i$  は、時間平均の計算公式を適用すると、(57) 式より

$$\bar{F}_i = -4\pi\rho \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \sum \left\{ \sigma(P) \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} + \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x_i} \right) \right\} \right] \quad (69)$$

と計算することができるだろう。上式の和を取る記号  $\sum$  は物体表面の連続分布を考える際には表面積分に置き換えられる。また以前の計算式と同じになることを示すために、入射波の進行方向である  $-x$  方向に働く波漂流力を  $F_D \equiv -\bar{F}_1$  と表すことにすれば ( $x_1 = x$  と書いて) 次式のような計算式となる。

$$\begin{aligned} F_D &= 2\pi\rho \text{Re} \iint_{S_B} \left\{ \sigma(P) \frac{\partial \phi^*}{\partial x} + \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) \right\} dS \\ &= 2\pi\rho \text{Re} \iint_{S_B} \left\{ \sigma^*(P) \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu^*(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} dS \end{aligned} \quad (70)$$

### 7.1 無限噴水円筒コラムの解析

別所の論文[3]で考えた無限噴水の円筒コラムではわき出し分布だけを考慮して次のように表した。

$$\left. \begin{aligned} \sigma(P) &= m(x, y) e^{Kz}, \quad m(x, y) = \frac{\zeta_a \omega}{2\pi} M(x, y) \\ M(\theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta = -\frac{1}{\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \frac{J'_n(\kappa)}{J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa)} \cos n\theta, \quad \kappa \equiv Ka \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

また、このわき出し分布を使って物体の攪乱による速度ポテンシャル  $\varphi_B(x, y)$  は

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \pi i e^{Kz} \int_C \frac{\zeta_a \omega}{2\pi} M(x', y') H_0^{(2)}(KR) ds' \\ &= \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \left[ \frac{K}{2} \int_C M(\theta') H_0^{(2)}(KR) ds' \right], \quad ds' = a d\theta' \end{aligned} \quad (72)$$

よって

$$\varphi_B(x, y) = \frac{K}{2} \int_C M(\theta') H_0^{(2)}(KR) ds' = -\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \frac{J'_n(\kappa)}{H_n^{(2)'}(\kappa)} H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \quad (73)$$

ここで

$$\begin{aligned} KR &= K\sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + r'^2} \quad \leftarrow r = r' = a \\ &= Ka\sqrt{2\{1 - \cos(\theta - \theta')\}} = 2\kappa \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| \quad (\kappa = Ka) \end{aligned} \quad (74)$$

と表される．これらを (70) 式に適用すると次のように表すことができる．

$$F_D = \rho g \zeta_a^2 \operatorname{Re} \iint_{S_B} e^{2Kz} M^*(x, y) i \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi_0(x, y) + \varphi_B(x, y) \right\} ds \quad (75)$$

垂直円筒なので  $z$  に関する積分は先に行うことができる．

$$\int_{-\infty}^0 e^{2Kz} dz = \frac{1}{2K}$$

の結果を代入し， $\varphi_0 = e^{iKx}$  ならびに (72) 式を用いると，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \operatorname{Re} \int_C M^*(P) \frac{i}{K} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varphi_0(P) + \varphi_B(P) \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \operatorname{Re} \int_C M^*(P) \left\{ -e^{iKx} + \frac{i}{2} \int_C M(Q) \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(2)}(KR) ds' \right\} ds \end{aligned} \quad (76)$$

ここで簡単のため，水平面内の円柱上の位置を  $P = (x, y)$ ， $Q = (x', y')$  と表している．線積分は  $ds = ad\theta$ ， $ds' = ad\theta'$  であるから，実際には  $\theta, \theta'$  に関するフーリエ級数の積分となる．

(75) 式の積分は入射波成分  $e^{iKx}$  に関しては比較的容易に行うことができるが，攪乱速度ポテンシャル  $\varphi_B(P)$  の項に関しては注意を要する．まず，ハンケル関数の  $x_p$  に関する微分には以下の関係があるので， $P$  点での  $x_p$  について微分しても， $Q$  点での  $x_q$  について微分しても計算は可能である．

$$\frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(2)}(KR) = -\frac{\partial}{\partial x_q} H_0^{(2)}(KR), \quad \text{ここで } R = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{また} \quad M(P) &\equiv S_P + iT_P, \quad M(Q) = S_Q + iT_Q \\ iM^*(P)M(Q) &= (T_P + iS_P)(S_Q + iT_Q) = (T_P S_Q - T_Q S_P) + i(S_P S_Q + T_P T_Q) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

の関係から

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \int_C iM^*(P) \int_C M(Q) \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ J_0(KR) - iY_0(KR) \right\} ds' ds \right] \\ = \int_C ds \int_C ds' \left\{ (T_P S_Q - T_Q S_P) \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) + (S_P S_Q + T_P T_Q) \frac{\partial}{\partial x_p} Y_0(KR) \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

となるが， $P$  と  $Q$  を入れ替えて積分を行った式を考えれば分かるように， $Y_0(KR)$  が関係する項は最終的に寄与しないことが理解できる (別所 [3])．このことから，ハンケル関数  $H_0^{(2)}(KR)$  の  $x$  微分においては，実数部分の第 1 種ベッセル関数  $J_0(KR)$  の  $x$  微分を考えれば十分であることが分かる．ということは，(72) 式の  $ds' = ad\theta'$  に関する積分を

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_B(P) &= \frac{K}{2} \int_C M(Q) J_0(KR) ds' \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n \frac{J_n'(\kappa)}{H_n^{(2)'}(\kappa)} J_n(Kr) \cos n\theta \end{aligned} \quad (80)$$

のように行った後で  $x_p$  に関する微分を行い，(76) 式の計算を

$$F_D = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \operatorname{Re} \int_C M^*(P) \left\{ -e^{iKx} + \frac{i}{K} \frac{\partial}{\partial x_p} \tilde{\varphi}_B(P) \right\} ds \quad (81)$$

によって行っても良いということになる．実際，この式による解析積分の方が (76) 式のように微分してから積分するより簡単である．もちろん

$$F_D = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \operatorname{Re} \int_C M^*(P) \left\{ -e^{iKx} + \frac{i}{2} \int_C M(Q) \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) ds' \right\} ds \quad (82)$$

の計算によっても同じ結果を得ることは可能であり，その詳細は後で **Note 2** に示すことにしよう．

以下の説明では、(1) 入射波と浮体による散乱波の干渉項  $\mathcal{F}^{(1)}$ 、(2) 散乱波の積による項  $\mathcal{F}^{(2)}$  に分けて式変形する．すなわち (81)–(82) 式を

$$\left. \begin{aligned} F_D &= \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 a \operatorname{Re} \left[ \mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{(2)} \right] \\ \mathcal{F}^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} M^*(\theta) \{ -e^{iKx} \} d\theta, \quad \mathcal{F}^{(2)} \equiv \int_0^{2\pi} M^*(\theta) \frac{i}{K} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_B(r, \theta) d\theta \\ \text{ここで } x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

のように表しておく．

## 7.2 入射波と散乱波の干渉項 $\mathcal{F}^{(1)}$ の計算

$-e^{iKx}$  は極座標で表すと、円柱上 ( $r = a$ ) では

$$-e^{iKx} = - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n J_n(\kappa) \cos n\theta, \quad \epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) \quad (84)$$

であるから、 $M(\theta)$  に関する解析解 (71) 式を用いると次式となる．

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{1}{\pi \kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m \frac{J'_m}{J_m H_m^{(1)'}} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n J_n \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta \quad (85)$$

$$\text{ここで} \quad \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \frac{2\pi}{\epsilon_n} \delta_{m,n} \quad (86)$$

となるから以下のように式変形できる．(ベッセル関数群の引数  $\kappa = Ka$  は省略して記している．また第2種ハンケル関数  $H_n^{(2)}$  の複素共役は第1種ハンケル関数  $H_n^{(1)}$  である．)

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{1}{\pi \kappa} \left[ 2\pi \frac{J'_0}{J_0 H_0^{(1)'}} J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi \frac{J'_n}{J_n H_n^{(1)'}} J_n \right] = \frac{2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{J'_n}{H_n^{(1)'}} \quad (87)$$

最終的には (83) 式のように実数部分のみを考えるので、次のように書くこともできる．

$$\mathcal{F}^{(1)} = \frac{2}{\kappa} \left[ \frac{J'_0}{H_0^{(1)'}} + \frac{J'_1}{H_1^{(2)'}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J'_n}{H_n^{(1)'}} + \frac{J'_{n+1}}{H_{n+1}^{(2)'}} \right\} \right] = \frac{2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{J'_n}{H_n^{(1)'}} + \frac{J'_{n+1}}{H_{n+1}^{(2)'}} \right\} \quad (88)$$

この結果は、以前に示した (参考論文[4]) 波漂流力に関するノートにおける (75)–(76) 式と同じであることが分かる．

## 7.3 散乱波の積による項 $\mathcal{F}^{(2)}$ の計算

次に  $\mathcal{F}^{(2)}$  の計算についてであるが、 $\tilde{\varphi}_B(P)$  として (80) 式を使うと、

$$\begin{aligned} \frac{i}{K} \frac{\partial \tilde{\varphi}_B}{\partial x} &= \frac{i}{K} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{\varphi}_B(r, \theta) \\ &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n \frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} \left\{ J'_n \cos \theta \cos n\theta + \frac{n}{\kappa} J_n \sin \theta \sin n\theta \right\} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n \frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} \left\{ J_{n+1} \cos(n+1)\theta - J_{n-1} \cos(n-1)\theta \right\} \end{aligned} \quad (89)$$

を得る． $M(\theta)$  として (71) 式を用いると、(83) 式で定義した  $\mathcal{F}^{(2)}$  は次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} &= - \frac{i}{2\pi \kappa} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^m \frac{J'_m}{J_m H_m^{(1)'}} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (i)^n \frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} \\ &\quad \times \left\{ J_{n+1} \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos(n+1)\theta d\theta - J_{n-1} \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos(n-1)\theta d\theta \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

ここで

$$I_{n+1} \equiv \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos(n+1)\theta d\theta = \pi \delta_{m,n+1} \quad (91)$$

$$I_{n-1} \equiv \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos(n-1)\theta d\theta = \frac{2\pi}{\epsilon_n} \delta_{m+1,n} = \begin{cases} 2\pi & m=0, n \geq 1 \\ \pi & m \geq 1, n=0,1,\dots \end{cases} \quad (92)$$

となることを用いると, (90) 式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} &= +\frac{i}{2\pi\kappa} \left[ 2\pi \frac{J'_0}{J_0 H_0^{(1)'}} (2i) \frac{J'_1}{H_1^{(2)'}} J_0 + \pi(-2i) \frac{J'_1}{J_1 H_1^{(1)'}} \frac{J'_0}{H_0^{(2)'}} J_{-1} \quad \leftarrow J_{-1} = -J_1 \right. \\ &\quad \left. + 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{J'_{n+1}}{J_{n+1} H_{n+1}^{(1)'}} \frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} J_{n+1} + 4\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m}{J_m H_m^{(1)'}} \frac{J'_{m+1}}{H_{m+1}^{(2)'}} J_m \right] \\ &= \frac{2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} (-2) \frac{J'_n J'_{n+1}}{H_n^{(1)' } H_{n+1}^{(2)'}} \end{aligned} \quad (93)$$

この結果は, 以前のノート [4] の (76) 式における  $2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*}$  と (係数を別にして) 同じであることが分かる. 以上の結果を (83) 式に代入すると次式を得る.

$$F_D = \rho g \zeta_a^2 \frac{a}{\kappa} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{J'_n}{H_n^{(1)'}} + \frac{J'_{n+1}}{H_{n+1}^{(2)'}} - 2 \frac{J'_n J'_{n+1}}{H_n^{(1)' } H_{n+1}^{(2)'}} \right\} \quad (94)$$

これ以降の式変形は, 以前のノート [4] の (76) 式以降と全く同じであり

$$\begin{aligned} F_D &= \rho g \zeta_a^2 \frac{a}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1})^2}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \\ &= \rho g \zeta_a^2 a \frac{4}{\pi^2 \kappa^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{\kappa^2} \right\}^2 \frac{1}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \end{aligned} \quad (95)$$

が得られる. この結果は勿論, 他の方法 (Near-field method や Far-field method) で求めた解析解と同じであり, Lagally の定理によっても時間平均値としての定常波漂流力が正しく求められるということが確認できた.

## 【Note 2】 $\mathcal{F}^{(2)}$ に対する別解法

少し解析が難しくなるが, 二重積分として以下の式を考えてみる.

$$\mathcal{F}^{(2)} = \frac{i}{2} a \int_0^{2\pi} M^*(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} M(\theta') \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) d\theta' \quad (A.1)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) &= -K J_1(KR) \frac{\partial R}{\partial x_p} = -K \frac{x-x'}{R} J_1(KR) \\ KR &= 2\kappa \left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right|, \quad x-x' = a(\cos\theta - \cos\theta') = -2a \sin \frac{\theta+\theta'}{2} \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

よって

$$a \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) = \kappa \frac{\sin \frac{\theta-\theta'}{2}}{\left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right|} \sin \frac{\theta+\theta'}{2} J_1 \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\theta-\theta'}{2} \right| \right) \quad (A.3)$$

であるが,  $\theta-\theta' = \alpha$  において  $\theta'$  の代わりに  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  の積分に置き換えれば  $\sin \frac{\theta-\theta'}{2} \geq 0$  とすることができる. このとき以下の式となる.

$$a \frac{\partial}{\partial x_p} J_0(KR) = \kappa \left\{ \sin\theta \cos \frac{\alpha}{2} - \cos\theta \sin \frac{\alpha}{2} \right\} J_1 \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| \right) \quad (A.4)$$

さらにベッセル関数の加法定理によれば次式の関係がある.

$$\begin{aligned} J_1 \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\kappa) J_{k+1}(\kappa) \left\{ \begin{array}{l} \cos k\alpha \\ \sin k\alpha \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} J_k J_{k+1} \left\{ \begin{array}{l} \cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha \\ \sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha \end{array} \right\} \quad \leftarrow J_{-k} J_{-(k+1)} = -J_k J_{k+1} \end{aligned} \quad (A.5)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} M(\theta) &= -\frac{1}{\pi\kappa} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos m\theta, \quad A_m = \epsilon_m(i)^m \frac{J'_m}{J_m H_m^{(2)'}} \\ M(\theta') &= M(\theta - \alpha) = -\frac{1}{\pi\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{ \cos n\theta \cos n\alpha + \sin n\theta \sin n\alpha \} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.6})$$

であるから、これらを総合し、偶関数、奇関数の性質を考慮すると次式となる。

$$\mathcal{F}^{(2)} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\pi\kappa} \right)^2 \kappa \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{k=0}^{\infty} J_k J_{k+1} \left\{ S^{(1)} S^{(2)} - C^{(1)} C^{(2)} \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \begin{aligned} C^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \cos \theta d\theta \\ S^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta \sin \theta d\theta \\ C^{(2)} &\equiv \int_0^{2\pi} \cos n\alpha \{ \cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha \} d\alpha \\ S^{(2)} &\equiv \int_0^{2\pi} \sin n\alpha \{ \sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha \} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

三角関数の積を和に直す公式を使い、最終的に被積分関数が定数となる ( $\cos 0 = 1$  となる) 場合だけを考えると、 $\mathcal{I}_{mnk} \equiv S^{(1)} S^{(2)} - C^{(1)} C^{(2)}$  の計算で寄与が残る被積分関数は

$$\frac{1}{4} \left[ -\cos(n+k)\alpha \cos(m+n-1)\theta - \cos(n-k)\alpha \cos(m-n-1)\theta \right. \\ \left. + \cos(n-k-1)\alpha \{ \cos(m+n-1)\theta + \cos(m-n+1)\theta \} \right]$$

であるから

$$\mathcal{I}_{mnk} = \left\{ \begin{array}{ll} -\pi^2 (\delta_{n,k} \delta_{m,n+1} - \delta_{n,k+1} \delta_{n,m+1}) & \text{for } (n \geq 1, k \geq 1, m \geq 1) \\ -2\pi^2 & \text{for } (n=0, k=0, m=1), \quad 2\pi^2 & \text{for } (n=1, k=0, m=0) \end{array} \right\} \quad (\text{A.9})$$

となることが理解できるであろう。

これを (A.7) 式に代入し、かつ (A.6) 式の  $A_m$  を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(2)} &= \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\pi\kappa} \right)^2 \kappa \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m(-i)^m \frac{J'_m}{J_m H_m^{(1)'}} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(i)^n \frac{J'_n}{J_n H_n^{(2)'}} \sum_{k=0}^{\infty} J_k J_{k+1} \left\{ \mathcal{I}_{mnk} \right\} \\ &= \frac{i}{2} \frac{1}{\pi^2 \kappa} \left[ 4\pi^2 i \left\{ \frac{J'_1}{J_1 H_1^{(1)'}} \frac{J'_0}{J_0 H_0^{(2)'}} J_0 J_1 + \frac{J'_0}{J_0 H_0^{(1)'}} \frac{J'_1}{J_1 H_1^{(2)'}} J_0 J_1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 i \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J'_{n+1}}{J_{n+1} H_{n+1}^{(1)'}} \frac{J'_n}{J_n H_n^{(2)'}} J_n J_{n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J'_m}{J_m H_m^{(1)'}} \frac{J'_{m+1}}{J_{m+1} H_{m+1}^{(2)'}} J_m J_{m+1} \right\} \right] \\ &= -\frac{2}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{J'_n J'_{n+1}}{H_n^{(1)' H_{n+1}^{(2)'}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となることが分かる。これは確かに (93) 式と同じになっている。

#### 7.4 波漂流力の計算公式の解釈

任意形状浮体に働く波漂流力に関するノート (参考文献[4]) の第 11 節では、Far-field method における無限遠方での検査面 ( $S_\infty$ ) での巧みな式変形によって波変位の 2 乗に起因する線積分項が無くなるという計算公式が示された。その式は  $\phi$  と  $\nabla\phi^*$  に対してグリーンの公式が適用できる形となっており、 $\phi$  と  $\nabla\phi^*$  は同じ線形自由表面条件を満たすことから  $S_\infty$  上での表面積分は、符号を反転させれば浮体表面 ( $S_H$ ) 上での表面積分だけで計算できる式となっている。それを再記すると、

$$\overline{F}_i = -\frac{\rho}{4} \text{Re} \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n} \frac{\partial\phi^*}{\partial x_i} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial\phi^*}{\partial x_i} \right) \right\} dS \quad (96)$$

と表すことができる。ただし法線の正方向は、Lagally の定理では物体表面から外向き (流体領域の方向) としているが、それは Far-field method での方向 (流体領域から外向き) と逆であるので、(96) 式では参考

文献[4]での式にマイナス符号を付していることに留意されたい。この波漂流力に関する計算式は、実は坪郷[5]～[8]によって導かれたものであることも記しておくべきであろう。

さてこの計算式と(69)式で示した Lagally の定理、すなわち

$$\bar{F}_i = -2\pi\rho\text{Re} \iint_{S_B} \left\{ \sigma(P) \frac{\partial\phi^*}{\partial x_i} + \mu(P) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial\phi^*}{\partial x_i} \right) \right\} dS \quad (97)$$

は本質的に同じ式であることに気が付くであろう。すなわち

$$\sigma(P) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi(P)}{\partial n} \right\}, \quad \mu(P) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4\pi} \phi(P) \right\} \quad (98)$$

と理解すればよい。実際、境界要素法での速度ポテンシャルは浮体表面上でわき出し分布、法線方向に軸を持つダブレット分布で表すことができるが、それらの強さは(98)式として与えられる。(係数 $1/4\pi$ はわき出しを表す主要解 $-1/r$ の係数をわき出しの総量 $Q = 4\pi m = 1$ と定義しているためである。また係数 $1/2$ は、浮体内部での内部特異点の強さと考えれば半分として考えればよい。さらにダブレットの軸を表す法線方向も内部特異点に関する Lagally の定理では境界要素法での方向と逆である( $Q$ 点に関する法線微分か $P$ 点に関する法線微分かの違い)と考えておけばよいと思われる。)

いずれにしても、坪郷によって示された波漂流力の計算式(96)式は Lagally の定理によって導かれた計算式と本質的に同じであると理解することもできる。

## 参考文献

- [3] 別所正利：固定筒体に及ぼす波の圧力に就いて，造船協会論文集，第101号，pp.1-9, 1957.
- [4] 柏木 正：任意形状浮体に働く波漂流力の計算について，関西設計株式会社 研究メモノート，2021.
- [5] 坪郷 尚：浮体に作用する波漂流力の定常成分について，日本船舶海洋工学会論文集，第5号，pp.143-153, 2007.
- [6] 坪郷 尚：浮体に作用する波漂流力の定常成分について（第2報），日本船舶海洋工学会論文集，第6号，pp.347-350, 2007.
- [7] 坪郷 尚：浮体に作用する波漂流力の定常成分について（第3報），日本船舶海洋工学会論文集，第8号，pp.219-224, 2008.
- [8] Tsubogo, T.: Reciprocal Form of the Wave Drift Force and Moment Acting on Floating Body, *Proceedings of the 27th OMAE Conference*, Estoril, Portugal, (OMAE2008-57694), 2008.

# 任意形状浮体に働く波漂流力の計算について

関西設計株式会社 柏木 正

## 1. はじめに

波漂流力を算定することは波浪中での浮体の係留力を考える際に重要であり、また船舶が波浪中を一定速度で航行する際には波浪中抵抗増加として重要な物理量である。この波漂流力は、理論的には入射波振幅 ( $\zeta_a$ ) の2乗に比例するので、浮体表面での圧力積分の時間平均値を考えると、 $\zeta_a$  の値は小さいという仮定の下で  $\zeta_a^2$  に比例する項をすべて漏れなく考慮すれば正しい計算ができるはずである。浮体表面上での圧力積分によって求める方法は near-field method と言うが、任意形状浮体の場合には境界要素法などの数値計算法に頼らざるを得ず、特に静止水面近傍での相対水位の2乗の計算精度が低下する傾向がある。それを改善する方法として、流体領域全体に対する運動量保存則を適用し、浮体表面上での圧力積分の時間平均値を遠方場での運動量変化の時間平均値に置き換えることができる。この方法を far-field method と言い、浮体から離れた遠方場では局所波の影響は無く進行波成分のみを考えれば良いので、計算は比較的簡単で計算精度も良い。ただし、浮体全体に働く漂流力が求まるだけなので、波振幅  $\zeta_a$  の2乗に比例する圧力の浮体表面上での分布を求めることはできない。

本論では、まず far-field method によって任意形状浮体に働く波漂流力を計算する方法について説明する。次に、得られた計算公式で垂直コラムの場合を考えれば、遠方場での複素波振幅が理論的に与えられるので、それを代入した結果は near-field method で求めた波漂流力の計算公式と完全に同じになることを示す。すなわち、運動量保存則の整合性を確かめることができるが、このことは数値計算精度の検証を行う上でも、流体力学的な関係を理解する上でも大切なことである。

さらに本論ではエネルギー保存則による関係式についても考え、その結果を用いると、波漂流力が浮体の攪乱で発生した散乱波のみで計算できることを示している。このエネルギー関係式は、速度ポテンシャルとその複素共役に対してグリーンの公式を適用することでも求められるが、そのことについても解説している。波漂流力の計算と言えば、浮体による散乱波に関係したコチン関数を用いて計算する方法が丸尾[1]によって示され、標準的な計算プログラム[2]に用いられている。本論ではその計算公式の導出についても詳細を示しており、その結果が本論の前半で示した解析による結果と完全に同じであることも証明しているが、そのような証明が明示されたのは本論が初めてであろう。

## 参考文献

- [1] Maruo, H.: The Drift of a Body Floating on Waves, *Journal of Ship Research*, Vol. 4, pp. 1–10, 1960.
- [2] 実践 浮体の流体力学 前編—動揺問題の数値計算法, 日本造船学会海洋工学委員会性能部会編, 第6章 3次元境界要素法その3, 成山堂書店, 2003年.

## 2. 速度ポテンシャルとその遠方場での表示式

周期的なポテンシャル流れを考え、速度ポテンシャルを次のように表す。

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\phi(x, y, z) e^{i\omega t}] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} \left\{ \phi_0 + \phi_7 \right\} + \sum_{j=1}^6 i\omega X_j \phi_j \\ &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} \left\{ \phi_0 + \phi_7 - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j \right\} \equiv \frac{g\zeta_a}{i\omega} \left\{ \phi_0 + \phi_B \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで  $\omega$  は周期的変動における円周波数であり、前進速度が無い場合には入射波の円周波数である。 $\zeta_a$  は入射波の振幅、 $g$  は重力加速度であり、 $K = \omega^2/g$  と表している。本論では解析の都合上  $z$  軸の正方向を

鉛直下向きとしており、以前のノートと逆であるが、最終結果には影響は無く本質的な違いではない。この入射波の速度ポテンシャルは、有限水深 ( $z = h$ ) の場合、次のように与えられる。

$$\phi_0(x, y, z) = \frac{\cosh k_0(z - h)}{\cosh k_0 h} e^{-ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (3)$$

ここで、 $\beta$  は  $x$  軸の正方向に対する入射角であり、 $\beta = 0$  が  $x$  軸の正方向への進行波 (追い波)、 $\beta = \pi$  がその逆で向い波と定義されている (これも以前のノートとは逆になっている)。また進行波の波数を  $k_0$  と表しており、これと  $\omega$  との関係は

$$k_0 \tanh k_0 h = \frac{\omega^2}{g} = K \quad (4)$$

である。以後の解析では  $\phi_7$  を散乱 (scattering) ポテンシャル、 $\phi_0 + \phi_7 \equiv \phi_D$  を diffraction ポテンシャルと表す。また(2)式における  $\phi_j$  ( $j = 1 \sim 6$ ) は radiation ポテンシャル、 $X_j$  は  $j$  モードの動揺複素振幅であり、 $X_j$  は運動方程式を解くことで求められる。

速度ポテンシャル  $\phi_j$  ( $j = 1 \sim 6, D$ ) は3次元ラプラス方程式 [L], 自由表面条件 [F], 放射条件 [R], ならびに浮体表面 ( $S_H$ ) での境界条件

$$[H] \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j \quad (j = 1 \sim 6), \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_H \quad (5)$$

を満たすように求められる。その詳細はここでは省略するが、境界要素法では以下の積分方程式を解くことで浮体表面上での値を求めることができる。

$$C(P)\phi_j(P) + \iint_{S_H} \phi_j(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) dS(Q) = \begin{cases} \iint_{S_H} n_j(Q) G(P; Q) dS(Q), & \text{for } j = 1 \sim 6 \\ \phi_0(P) & \text{for } j = D \end{cases} \quad (6)$$

ここで  $P = (x, y, z)$  は field point,  $Q = (\xi, \eta, \zeta)$  は浮体表面上の積分点であり、後で用いる円筒座標  $(r, \theta, z)$  では  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  と表される。また  $G(P; Q)$  は単位強さのわき出しによる速度ポテンシャル、すなわちグリーン関数と呼ばれ、有限水深では以下のように表すことができる。

$$G(P; Q) = \frac{i}{2} C_0 Z_0(z) Z_0(\zeta) H_0^{(2)}(k_0 R) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} C_n Z_n(z) Z_n(\zeta) K_0(k_n R) \quad (7)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{k_0^2}{K + h(k_0^2 - K^2)}, & C_n &= \frac{k_n^2}{K - h(k_n^2 + K^2)} \\ Z_0(z) &= \frac{\cosh k_0(z - h)}{\cosh k_0 h}, & Z_n(z) &= \frac{\cos k_n(z - h)}{\cos k_n h} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$K = \frac{\omega^2}{g} = k_0 \tanh k_0 h = -k_n \tan k_n h \quad (9)$$

であり、 $H_0^{(2)}(k_0 R)$  は第2種ハンケル関数で外方への進行波を表し、 $K_0(k_n R)$  は第2種変形ベッセル関数で  $R \rightarrow \infty$  では指数関数的にゼロとなるので局所波を表している。また  $R$  は水平面内 ( $z$  が一定) での  $(x, y) = (r, \theta)$  と  $(\xi, \eta) = (r', \theta')$  の距離であり、次のような関係が成り立つ。

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(k_0 R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_0 r') H_m^{(2)}(k_0 r) e^{-im(\theta - \theta')} \\ K_0(k_n R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(k_n r') K_m(k_n r) e^{-im(\theta - \theta')} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(11)式は  $r > r'$  に対して成り立つベッセル関数群の加法定理であり、 $J_m(k_0 r)$ ,  $I_m(k_n r)$  はそれぞれ  $m$  次の第1種、第2種ベッセル関数である。 $\theta$  に関するフーリエ級数を複素数で表し、次数の整数を  $n$  ではなく  $m$

として  $m$  の値を  $-\infty \sim +\infty$  としていることも以前のノートと異なるが、これは後の式変形を容易にするためのもので、実関数  $\cos m(\theta - \theta')$  を用いても最終結果は勿論同じになる。

入射波の速度ポテンシャル(3)式は円筒座標で表すと

$$\begin{aligned}\phi_0(r, \theta, z) &= Z_0(z) e^{-ik_0 r \cos(\theta - \beta)} = Z_0(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m J_m(k_0 r) e^{-im(\theta - \beta)} \\ &= Z_0(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \alpha_n J_n(k_0 r) e^{-in\theta}, \quad \alpha_n \equiv e^{in\beta}\end{aligned}\quad (12)$$

となる。 $(-i)^n$  を  $\alpha_n$  の定義に含める方が数値計算には便利であろうが、 $\alpha_n$  に含めず分離しているのも後の都合を考えてのことである。

物体の攪乱による流体領域内での速度ポテンシャルは、(7), (11)式を(6)式に代入し、(6)式における立体角を  $C(P) = 1$  とすればよいので、まず scattering ポテンシャルは

$$\begin{aligned}\phi_7(P) &= \phi_D(P) - \phi_0(P) = - \iint_{S_H} \phi_D(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(P; Q) dS(Q) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{B}_{m0} Z_0(z) H_m^{(2)}(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{mn} Z_n(z) K_m(k_n r) \right] e^{-im\theta}\end{aligned}\quad (13)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{B}_{m0} &= -\frac{i}{2} C_0 \iint_{S_H} \phi_D \frac{\partial}{\partial n} Z_0(\zeta) J_m(k_0 r') e^{im\theta'} dS \\ \mathcal{B}_{mn} &= -\frac{1}{\pi} C_n \iint_{S_H} \phi_D \frac{\partial}{\partial n} Z_n(\zeta) I_m(k_n r') e^{im\theta'} dS\end{aligned}\right\}\quad (14)$$

と表すことができる。同様に radiation ポテンシャル  $\phi_j$  ( $j = 1 \sim 6$ ) は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\phi_j(P) &= \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi_j(Q)}{\partial n_Q} - \phi_j(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \right\} G(P; Q) dS(Q) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{R}_{j,m0} Z_0(z) H_m^{(2)}(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{j,mn} Z_n(z) K_m(k_n r) \right] e^{-im\theta}\end{aligned}\quad (15)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{R}_{j,m0} &= \frac{i}{2} C_0 \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} Z_0(\zeta) J_m(k_0 r') e^{im\theta'} dS \\ \mathcal{R}_{j,mn} &= \frac{1}{\pi} C_n \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} Z_n(\zeta) I_m(k_n r') e^{im\theta'} dS\end{aligned}\right\}\quad (16)$$

これらのうち、遠方場 ( $r \rightarrow \infty$ ) では局所波を表す  $K_m(k_n r)$  の項はゼロとなるので省略することができる。したがって物体の攪乱による遠方場での速度ポテンシャルは、(12)式に対応するように  $(-i)^n$  を分離して表すと、

$$\phi_B(r, \theta, z) \equiv \phi_7 - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j = Z_0(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \mathcal{A}_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{-in\theta}\quad (17)$$

ここで

$$\mathcal{A}_n \equiv (i)^n \left\{ \mathcal{B}_{n0} - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \mathcal{R}_{j,n0} \right\}\quad (18)$$

となる。よって入射波の速度ポテンシャル(12)式との和による流場全体の速度ポテンシャルは(2)式から次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta, z) &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} \left\{ \phi_0(r, \theta, z) + \phi_B(r, \theta, z) \right\} \\ &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} Z_0(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left\{ \alpha_n J_n(k_0 r) + \mathcal{A}_n H_n^{(2)}(k_0 r) \right\} e^{-in\theta}\end{aligned}\quad (19)$$

ここで

$$\alpha_n = e^{in\beta}, \quad \mathcal{A}_n = (i)^n \left\{ \mathcal{B}_{n0} - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \mathcal{R}_{j,n0} \right\}\quad (20)$$

### 3. 運動量保存則による計算式

浮体の外側領域，すなわち流体領域  $V(t)$  での  $i$  方向の運動量の時間変化率  $dM_i/dt$  を考えてみる。輸送定理，ガウスの定理，さらにオイラーの運動方程式，連続の方程式

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} F(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial F(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV + \iint_S F(\mathbf{x}, t) U_n dS \quad (21)$$

$$\iiint_V \nabla \phi dV = \iint_S \mathbf{n} \phi dS \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} - gz \right) - v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (23)$$

を用いて変形すると，次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dM_i}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho v_i dV = \rho \iiint_V \frac{\partial v_i}{\partial t} dV + \rho \iint_S v_i U_n dS \\ &= -\rho \iiint_V \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} - gz \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_j v_i) \right] dV + \rho \iint_S v_i U_n dS \\ &= -\rho \iint_S \left[ \left( \frac{p}{\rho} - gz \right) n_i + v_i (v_n - U_n) \right] dS, \quad \leftarrow v_n = v_j n_j \end{aligned} \quad (24)$$

ここで，ガウスの定理では法線ベクトル  $\mathbf{n} (= n_i)$  は流体領域から外向きを正方向としている。流体領域を取り囲む境界面  $S$  として  $S = S_H + S_F + S_\infty$  を考えると，それぞれの境界条件

$$\left. \begin{aligned} v_n &= U_n && \text{on } S_F \text{ \& } S_H \\ U_n &= 0 && \text{on } S_\infty, \quad p = 0 \text{ on } S_F \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

を考慮すると，水平面内 ( $i = 1, 2$ ) では  $gz$  の項は考えなくてもよいので

$$\frac{dM_i}{dt} = - \iint_{S_H} p n_i dS - \iint_{S_\infty} [p n_i + \rho v_i v_n] dS \quad (26)$$

となる。この式において時間平均値を考えると，流体領域全体での運動量の変化は周期的であるから

$$\overline{F_i} = \overline{\iint_{S_H} p n_i dS} = - \overline{\iint_{S_\infty} \left[ \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial n} + p n_i \right] dS} \quad (27)$$

ここで

$$p = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz \right) \quad (28)$$

のように計算できることが分かる。ただし(27)式における法線ベクトルの正方向は，浮体表面では流体から外向き，すなわち浮体の内向きを正としていることに注意しよう。

$S_\infty$  上での(27)式の計算を半径  $r$  の円筒面 ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) で考える。速度ポテンシャル  $\Phi$  の2次の項まで consistent に考えなければならないので， $z$  方向の積分は次式で与えられる水面変位

$$z_w = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + O(\Phi^2) \quad (29)$$

まで行い， $O(\Phi^3)$  以上を無視すれば， $i = 1$  の場合すなわち  $\overline{F_x}$  の計算式は

$$\begin{aligned} \overline{F_x} &= - \overline{\int_{z_w}^h dz \int_0^{2\pi} \left[ \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + p \cos \theta \right] r d\theta} \\ &= -\rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \cos \theta \right] r d\theta - \frac{\rho}{2g} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}^2 r \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (30)$$

となることが分かる。同様に  $i = 2$  の場合すなわち  $\overline{F_y}$  の計算式は次式となる。

$$\overline{F_y} = -\rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \sin \theta \right] r d\theta - \frac{\rho}{2g} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}^2 r \sin \theta d\theta \quad (31)$$

ついでに回頭モーメントを考えるために角運動量保存則について考える。 $z$  軸まわりの角運動量成分 ( $K_3$  と表す) を考えればよいので,  $i, j$  は 1 か 2 のみを考えるという前提で,

$$\begin{aligned}
\frac{dK_3}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_3 dV = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\varepsilon_{3ij} x_i v_j) dV \\
&= \rho \iiint_V \varepsilon_{3ij} x_i \frac{\partial v_j}{\partial t} dV + \rho \iint_S \varepsilon_{3ij} x_i v_j U_n dS \\
&= -\rho \iiint_V \varepsilon_{3ij} x_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{p}{\rho} - gz \right) + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right] dV + \rho \iint_S \varepsilon_{3ij} x_i v_j U_n dS \\
&= -\varepsilon_{3ij} \iint_S \left[ x_i n_j p + \rho x_i v_j (v_n - U_n) \right] dS
\end{aligned} \tag{32}$$

となる。よって(25)式を考慮すると,  $z$  軸まわりのモーメントの時間平均値は次のように計算できる。

$$\overline{M_z} = \iint_{S_H} p(\varepsilon_{3ij} x_i n_j) dS = -\varepsilon_{3ij} \iint_{S_\infty} \left[ p x_i n_j + \rho x_i v_j v_n \right] dS \tag{33}$$

$S_\infty$  上での検査面として半径  $r$  の円筒面を考えると,

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{3ij} x_i n_j &= x_1 n_2 - x_2 n_1 = r \cos \theta \sin \theta - r \sin \theta \cos \theta = 0 \\
\varepsilon_{3ij} x_i v_j &= x_1 v_2 - x_2 v_1 = x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
&= r \cos \theta \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - r \sin \theta \left( \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}
\end{aligned} \right\} \tag{34}$$

となるから, (33)式は次式のように比較的簡単な式になることが分かる。

$$\overline{M_z} = -\rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial r} r d\theta \tag{35}$$

時間平均の計算は

$$\Phi = \text{Re}[\phi e^{i\omega t}], \quad \overline{\text{Re}[A e^{i\omega t}] \text{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{4} [AB^* + A^*B] = \frac{1}{2} \text{Re}[AB^*] \tag{36}$$

の公式を使えばよいので, 時間項  $e^{i\omega t}$  を除いた空間座標に関する速度ポテンシャル  $\phi(r, \theta, z)$  のみを用いて, 以下のように計算することができる。

$$\overline{F_x} = -\frac{\rho}{4} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* \cos \theta \right] r d\theta - \frac{\rho}{4} K \int_0^{2\pi} \phi \phi^* \Big|_{z=0} r \cos \theta d\theta \tag{37}$$

Far-field method では, この計算はさらに簡単になる。まず  $r \rightarrow \infty$  で残る項だけを考えればよいので,

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sim \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
\nabla \phi \cdot \nabla \phi^* &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \sim \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z}
\end{aligned} \right\} \tag{38}$$

とできる。また(37)式で  $z$  に関する積分は有限水深なので少し複雑にはなるが解析的に行うことができ, 結果は次式となる。

$$\begin{aligned}
I_C &\equiv \int_0^h Z_0^2(z) dz = \int_0^h \frac{\cosh^2 k_0(z-h)}{\cosh^2 k_0 h} dz \\
&= \frac{1}{4k_0} \frac{2k_0 h + \sinh 2k_0 h}{\cosh^2 k_0 h} = \frac{1}{2} \frac{K + h(k_0^2 - K^2)}{k_0^2} = \frac{1}{2C_0}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
I_S &\equiv \frac{1}{k_0^2} \int_0^h Z_0'^2(z) dz = \int_0^h \frac{\sinh^2 k_0(z-h)}{\cosh^2 k_0 h} dz \\
&= \frac{1}{4k_0} \frac{-2k_0 h + \sinh 2k_0 h}{\cosh^2 k_0 h} = \frac{1}{2} \frac{K - h(k_0^2 - K^2)}{k_0^2} = \frac{K}{k_0^2} - \frac{1}{2C_0}
\end{aligned} \tag{40}$$

これらを考慮すると、(37)式は次式となる。

$$\begin{aligned}\overline{F_x} &= -\frac{\rho}{4} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \cos \theta \cdot I_C - \phi \phi^* (k_0^2 \cdot I_S - K) \cos \theta \right]_{z=0} r d\theta \\ &= -\frac{\rho}{8C_0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + k_0^2 \phi \phi^* \right]_{z=0} \cos \theta r d\theta\end{aligned}\quad (41)$$

$y$  軸方向に働く波漂流力  $\overline{F_y}$  の計算式もほぼ同様に変形することができ、

$$\overline{F_y} = -\frac{\rho}{8C_0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} + k_0^2 \phi \phi^* \right]_{z=0} \sin \theta r d\theta \quad (42)$$

となる。また  $z$  軸まわりの定常回頭モーメント  $\overline{M_z}$  の計算式も(35)式で時間平均を計算すると、次式となることが分かる。

$$\overline{M_z} = -\frac{\rho}{4C_0} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right]_{z=0} r d\theta \quad (43)$$

#### 4. 波漂流力の計算公式

前節で示した(41)~(43)式に far-field での速度ポテンシャル(19)式を代入し、 $\theta$  に関する積分を解析的に行えばよい。速度ポテンシャル  $\phi$  は  $z=0$  での値を考えればよいので、(19)式を再記すると、

$$\phi = \frac{g\zeta_a}{i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left\{ \alpha_n J_n(k_0 r) + \mathcal{A}_n H_n^{(2)}(k_0 r) \right\} e^{-in\theta} \quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r} = \frac{g\zeta_a}{-i\omega} k_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (+i)^m \left\{ \alpha_m^* J'_m(k_0 r) + \mathcal{A}_m^* H_m^{(1)'}(k_0 r) \right\} e^{+im\theta} \quad (45)$$

ここで

$$\alpha_n = e^{in\beta}, \quad \mathcal{A}_n = (i)^n \left\{ \mathcal{B}_{n0} - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \mathcal{R}_{j,n0} \right\} \quad (46)$$

である。これらの式には動径  $r$  が含まれているが、ベッセル関数の積に対してロンスキー行列公式を用いると、 $r$  に関係しないことが後で示される。

まず(41), (42)式の計算、すなわち水平面内での波漂流力  $\overline{F_x}$ ,  $\overline{F_y}$  について考えよう。 $\theta$  に関する積分は、複素数表示のまま行くと便利であり、次の結果を用いればよい。

$$\begin{aligned}T_C &\equiv \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{i(m-n+1)\theta} + e^{i(m-n-1)\theta} \right\} d\theta \\ &\longrightarrow T_C = \pi \quad \text{only when } n = m + 1 \text{ or } m = n + 1\end{aligned}\quad (47)$$

$$\begin{aligned}T_S &\equiv \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{i(m-n+1)\theta} - e^{i(m-n-1)\theta} \right\} d\theta \\ &\longrightarrow T_S = \begin{cases} -\pi i & \text{when } n = m + 1 \\ +\pi i & \text{when } m = n + 1 \end{cases}\end{aligned}\quad (48)$$

(41)式の  $\overline{F_x}$  を先に考えよう。(47)式の結果を代入する際、 $(-i)^n (i)^{n+1} = i$ ,  $(-i)^{m+1} (i)^m = -i$  に注意すると、次のように式変形ができる。

$$\begin{aligned}\overline{F_x} &= -\frac{\rho}{8C_0} \left( \frac{g\zeta_a}{\omega} \right)^2 k_0^2 r \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \\ & i \left\{ \alpha_n J'_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)'} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J'_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)'} \right\} - i \left\{ \alpha_{n+1} J'_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1} H_{n+1}^{(2)'} \right\} \left\{ \alpha_n^* J'_n + \mathcal{A}_n^* H_n^{(1)'} \right\} \\ & + i \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)} \right\} - i \left\{ \alpha_{n+1} J_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1} H_{n+1}^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_n^* J_n + \mathcal{A}_n^* H_n^{(1)} \right\}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overline{F_x} = \frac{\rho g \zeta_a^2 k_0}{4 C_0 K} (\pi k_0 r) \operatorname{Im} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \alpha_n J'_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)'} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J'_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)'} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

ここで(49)式の [...] 内を展開して整理すると

$$\begin{aligned} \alpha_n \alpha_{n+1}^* \left\{ J'_n J'_{n+1} + J_n J_{n+1} \right\} + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* \left\{ H_n^{(2)'} H_{n+1}^{(1)'} + H_n^{(2)} H_{n+1}^{(1)} \right\} \\ + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* \left\{ J'_n H_{n+1}^{(1)'} + J_n H_{n+1}^{(1)} \right\} + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* \left\{ H_n^{(2)'} J'_{n+1} + H_n^{(2)} J_{n+1} \right\} \end{aligned}$$

である。これらのベッセル関数の積に対してロンスキー行列公式

$$\left. \begin{aligned} J'_n J'_{n+1} + J_n J_{n+1} &= 0 \\ H_n^{(2)'} H_{n+1}^{(1)'} + H_n^{(2)} H_{n+1}^{(1)} &= -i \frac{4}{\pi k_0 r} \\ J'_n H_{n+1}^{(1)'} + J_n H_{n+1}^{(1)} &= -i \frac{2}{\pi k_0 r} \\ H_n^{(2)'} J'_{n+1} + H_n^{(2)} J_{n+1} &= -i \frac{2}{\pi k_0 r} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

を用いると、(49)式は  $r$  の値に関係しないことが解り、次のように表すことができる。

$$\overline{F_x} = -\frac{\rho g \zeta_a^2 k_0}{2 C_0 K} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 2\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* \right] \quad (51)$$

この式から、波漂流力に寄与するのは、浮体の攪乱による波振幅の2乗 ( $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^*$  の項) と、入射波と浮体による散乱波との干渉 ( $\alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^*$  と  $\mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^*$  の項) であることが解る。

次に(42)式の  $\overline{F_y}$  に対しても殆ど同様の計算ができる。(48)式を用いると次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \overline{F_y} = \frac{\rho g \zeta_a^2 k_0}{4 C_0 K} (\pi k_0 r) \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \alpha_n J'_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)'} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J'_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)'} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_{n+1}^* J_{n+1} + \mathcal{A}_{n+1}^* H_{n+1}^{(1)} \right\} \right] \\ = \frac{\rho g \zeta_a^2 k_0}{2 C_0 K} \operatorname{Im} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 2\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* \right] \end{aligned} \quad (52)$$

(51), (52)式を複素数として以下のようにまとめて表すこともできる。

$$\overline{F_x} - i \overline{F_y} = -\frac{\rho g \zeta_a^2 k_0}{2 C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 2\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* \right] \quad (53)$$

続いて、(43)式の定常回頭モーメント  $\overline{M_z}$  についても  $\theta$  の積分を行う。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= \frac{g \zeta_a}{i \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{n+1} n \left\{ \alpha_n J_n(k_0 r) + \mathcal{A}_n H_n^{(2)}(k_0 r) \right\} e^{-in\theta} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial r} &= \frac{g \zeta_a}{-i \omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_0 (+i)^m \left\{ \alpha_m^* J'_m(k_0 r) + \mathcal{A}_m^* H_m^{(1)'}(k_0 r) \right\} e^{+im\theta} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$T \equiv \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{mn} \quad (55)$$

などを用いて(43)式を計算すると次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \overline{M_z} &= -\frac{\rho}{8C_0} \left( \frac{g \zeta_a}{\omega} \right)^2 k_0 2 \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -in \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_n^* J'_n + \mathcal{A}_n^* H_n^{(1)'} \right\} \right] 2\pi r \\ &= -\frac{\rho g \zeta_a^2 \pi k_0 r}{2 C_0 K} \operatorname{Im} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ n \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_n^* J'_n + \mathcal{A}_n^* H_n^{(1)'} \right\} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

ここで [...] のうち、 $n$  を除いた部分を展開すると

$$\begin{aligned} & \alpha_n \alpha_n^* J_n J_n' + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* (J_n - iY_n)(J_n' + iY_n') + \alpha_n \mathcal{A}_n^* J_n (J_n' + iY_n') + \alpha_n^* \mathcal{A}_n J_n' (J_n - iY_n) \\ & = \alpha_n \alpha_n^* J_n J_n' + \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* \left\{ J_n J_n' + Y_n Y_n' + i(J_n Y_n' - J_n' Y_n) \right\} + J_n J_n' (\alpha_n \mathcal{A}_n^* + \alpha_n^* \mathcal{A}_n) \\ & \quad - \text{Im}(\alpha_n \mathcal{A}_n^*) (J_n Y_n' + J_n' Y_n) + i \text{Re}(\alpha_n \mathcal{A}_n^*) (J_n Y_n' - J_n' Y_n) \end{aligned} \quad (57)$$

となるが、このうち虚数部だけが(56)式に寄与するので、次式を得る。

$$\overline{M_z} = -\frac{\rho g \zeta_a^2 \pi k_0 r}{2 C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* + \text{Re}(\alpha_n \mathcal{A}_n^*) \right] (J_n Y_n' - J_n' Y_n) \quad (58)$$

さらにベッセル関数のロンスキー行列公式として

$$J_n Y_n' - J_n' Y_n = \frac{2}{\pi k_0 r} \quad (59)$$

を代入すると、最終的に次の結果が得られる。

$$\overline{M_z} = -\rho g \zeta_a^2 \frac{1}{C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* + \text{Re}(\alpha_n \mathcal{A}_n^*) \right] \quad (60)$$

ところで、ここまでの計算はフーリエ級数を複素数表示していたので計算も比較的簡単で、最終結果も(53)式、(60)式のようにコンパクトな形で表すことができた。しかし級数和は  $n = -\infty \sim +\infty$  の形になっている。これを  $n = 0 \sim +\infty$  の級数に書いておくと、浮体の左右で対称波成分、反対称波成分の寄与を明示することができるし、後で述べる無限噴水垂直円筒の解析解を導く際にも便利である。そこで少し式が長くなるが、級数を  $n = 0 \sim +\infty$  だけで表した式を以下に求めておくことにしよう。

まず  $\mathcal{A}_n$  における  $\mathcal{B}_{n0}, \mathcal{R}_{j,n0}$  の計算式で  $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$  であるから、 $\cos n\theta, \sin n\theta$  に対応して

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^C + i \mathcal{A}_n^S \quad (61)$$

と表すことにする。例えば  $\mathcal{B}_{n0}$  の場合には

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_{n0} &= \mathcal{B}_{n0}^C + i \mathcal{B}_{n0}^S \\ \left. \begin{aligned} \mathcal{B}_{n0}^C \\ \mathcal{B}_{n0}^S \end{aligned} \right\} &= -\frac{i}{2} C_0 \iint_{S_H} \phi_D \frac{\partial}{\partial n} Z_0(z) J_n(k_0 r) \left\{ \begin{aligned} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{aligned} \right\} dS \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

のように分けると、 $\mathcal{B}_{n0}^C$  は左右対称な成分 ( $\theta$  に関して偶関数)、 $\mathcal{B}_{n0}^S$  は反対称な成分 ( $\theta$  に関して奇関数) である。ただし、 $\mathcal{B}_{n0}^C, \mathcal{B}_{n0}^S$  とともに一般には複素数であるから、(61)式の表示は単に  $\cos n\theta, \sin n\theta$  の項を分けて表しているだけであることに注意する。

また  $\alpha_n$  の項も同様に

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= e^{in\beta} = \cos n\beta + i \sin n\beta \equiv \alpha_n^C + i \alpha_n^S \\ \alpha_n^C &= \cos n\beta, \quad \alpha_n^S = \sin n\beta \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

のように  $\beta$  に関して偶関数 (左右対称)、奇関数 (左右反対称) に分けることができる。この場合には、 $\alpha_n^C, \alpha_n^S$  はともに実関数であることに注意する。

最初に(53)式を考えると、次のような式変形が必要になる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{n+1}^* = \left( \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \right) A_n B_{n+1}^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_{n+1}^* + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} B_{-n+1}^*$$

最後の級数では  $n$  の代わりに  $\ell+1$  と置くと、 $n = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \ell = 0, 1, 2, \dots$  となるので、変換後  $\ell$  を再び  $n$  と書くと次式が得られる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{n+1}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n B_{n+1}^* + A_{-(n+1)} B_{-n}^* \right\} \quad (64)$$

ここで(61), (62)式のように  $\cos n\theta$  と  $\sin n\theta$  を分けて表し, さらに

$$(i)^{-n} = (-i)^n = (i)^n(-1)^n, \quad J_{-n} = (-1)^n J_n, \quad e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad (65)$$

の関係式に注意すると

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_{-n} &= \mathcal{A}_n^C - i \mathcal{A}_n^S, & \mathcal{A}_{-n}^* &= \mathcal{A}_n^{C*} + i \mathcal{A}_n^{S*} \\ \alpha_{-n} &= \alpha_n^C - i \alpha_n^S, & \alpha_{-n}^* &= \alpha_n^C + i \alpha_n^S \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

であることが分かる。このことから

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 2\mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2\left\{ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_{-n}^* \mathcal{A}_{-(n+1)} \right\} + \alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_{-(n+1)} \mathcal{A}_{-n}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* + \mathcal{A}_{-(n+1)} \alpha_{-n}^* \right] \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ 2 \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} \right) + \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} + \mathcal{A}_n^C \alpha_{n+1}^C + \mathcal{A}_n^S \alpha_{n+1}^S \right\} \right. \\ &\quad \left. - i \operatorname{Re} \left\{ 2 \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} \right) + \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^C \alpha_{n+1}^S - \mathcal{A}_n^S \alpha_{n+1}^C \right\} \right] \quad (67) \end{aligned}$$

となるから, (53)式に代入して実数部, 虚数部に分けると次式を得る。

$$\overline{F_x} = -\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2 \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} \right) + \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} + \mathcal{A}_n^C \alpha_{n+1}^C + \mathcal{A}_n^S \alpha_{n+1}^S \right] \quad (68)$$

$$\overline{F_y} = -\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2 \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} \right) + \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^C \alpha_{n+1}^S - \mathcal{A}_n^S \alpha_{n+1}^C \right] \quad (69)$$

続いて(60)式の定常回頭モーメントについて考えると,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* = \left( \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \right) n \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* - \mathcal{A}_{-n} \mathcal{A}_{-n}^* \right) \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* - \mathcal{A}_{-n} \mathcal{A}_{-n}^* &= (\mathcal{A}_n^C + i \mathcal{A}_n^S) (\mathcal{A}_n^{C*} - i \mathcal{A}_n^{S*}) - (\mathcal{A}_n^C - i \mathcal{A}_n^S) (\mathcal{A}_n^{C*} + i \mathcal{A}_n^{S*}) \\ &= -2i \left\{ \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{S*} - \mathcal{A}_n^{C*} \mathcal{A}_n^S \right\} = 4 \operatorname{Im} \left\{ \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{S*} \right\} \quad (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n \mathcal{A}_n^* - \alpha_{-n} \mathcal{A}_{-n}^* &= (\alpha_n^C + i \alpha_n^S) (\alpha_n^{C*} - i \alpha_n^{S*}) - (\alpha_n^C - i \alpha_n^S) (\alpha_n^{C*} + i \alpha_n^{S*}) \\ &= -2i (\alpha_n^C \alpha_n^{S*} - \alpha_n^S \alpha_n^{C*}) \\ &\rightarrow \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n \mathcal{A}_n^* - \alpha_{-n} \mathcal{A}_{-n}^* \right\} = 2 \operatorname{Im} \left\{ \alpha_n^C \alpha_n^{S*} - \alpha_n^S \alpha_n^{C*} \right\} \quad (72) \end{aligned}$$

を得るから, これらを(60)式に代入すると次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \overline{M_z} &= -2\rho g \zeta_a^2 \frac{1}{C_0 K} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ 2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{S*} + \alpha_n^C \mathcal{A}_n^{S*} - \alpha_n^S \mathcal{A}_n^{C*} \right] \\ &= -2\rho g \zeta_a^2 \frac{1}{C_0 K} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ (\alpha_n^C + \mathcal{A}_n^C) \mathcal{A}_n^{S*} - (\alpha_n^S + \mathcal{A}_n^S) \mathcal{A}_n^{C*} \right] \quad (73) \end{aligned}$$

## 5. 無限喫水垂直コラムに対する解析解

前節で導いた式は, 任意形状の浮体に入射角  $\beta$  で波が入射してくるという一般的な場合の計算式であったが, その結果から無限喫水の垂直円筒について考えてみよう。円筒であるから  $\beta = 0$  を考えれば十分である。このとき  $\alpha_n = 1$  であり, 添え字  $S$  の付いた量はすべてゼロとなる。また無限喫水であるので  $C_0 \rightarrow K, k_0 \rightarrow K$  となる。したがって  $\overline{F_y} = 0, \overline{M_z} = 0$  であり,  $\overline{F_x}$  は次式で計算できる。

$$\overline{F_x} = -\rho g \zeta_a^2 \frac{1}{K a} \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^C + \mathcal{A}_{n+1}^{C*} \right] \quad (74)$$

また 
$$\mathcal{A}_n^C = -\frac{J'_n(Ka)}{H_n^{(2)'}(Ka)} \quad (75)$$

となることは以前に説明しているので、これを用いて(74)式の計算をしてみよう。

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^C + \mathcal{A}_{n+1}^{C*} &= 2\frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} \frac{J'_{n+1}}{H_{n+1}^{(1)'}} - \frac{J'_n}{H_n^{(2)'}} - \frac{J'_{n+1}}{H_{n+1}^{(1)'}} \\ &= \frac{2J'_n J'_{n+1}}{H_n^{(2)' H_{n+1}^{(1)'}}} - \frac{2J'_n J'_{n+1} - i(J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1})}{H_n^{(2)' H_{n+1}^{(1)'}}} = \frac{i(J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1})}{H_n^{(2)' H_{n+1}^{(1)'}}} \end{aligned} \quad (76)$$

一方 
$$\frac{1}{H_n^{(2)' H_{n+1}^{(1)'}}} = \frac{(J'_n + iY'_n)(J'_{n+1} - iY'_{n+1})}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} = \frac{J'_n J'_{n+1} + Y'_n Y'_{n+1} + i(J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1})}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (77)$$

であるから、(76)式に代入して実部を取ると次の結果が得られる。

$$\operatorname{Re}\left\{2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^C + \mathcal{A}_{n+1}^{C*}\right\} = \frac{-(J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1})^2}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (78)$$

また、以前のノートで示したように、ベッセル関数群の漸化式

$$Z'_{n+1} = Z_n - \frac{n+1}{Ka} Z_{n+1}, \quad Z'_n = -Z_{n+1} + \frac{n}{Ka} Z_n \quad (79)$$

とロンスキー行列式 
$$J_n Y'_n - J'_n Y_n = J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1} = \frac{2}{\pi Ka} \quad (80)$$

を用いて(78)式の分子を変形すると

$$\begin{aligned} J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1} &= J_n Y'_n - J'_n Y_n - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2} (J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1}) \\ &= \frac{2}{\pi Ka} \left\{1 - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2}\right\} \end{aligned} \quad (81)$$

となる。これらの結果を(74)式に代入すると、以下のような解析解を得ることができる。

$$\overline{F}_x = \rho g \zeta_a^2 a \frac{4}{\pi^2 (Ka)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{1 - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2}\right\}^2 \frac{1}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (82)$$

この結果は、物体表面での圧力積分の時間平均値から求めた式、すなわち near-field method による結果と同じであることが分かる。つまり、near-field method による結果と far-field method による結果が完全に同じであることが証明できたことになる。このことは運動量保存則によって波漂流力を計算する手法が正しいことを示しており、任意形状浮体に対しても同じことが言える。このことを使えば、波漂流力の計算における数値計算精度をチェックすることができることになる。

## 6. エネルギー保存則

流体領域内の力学的エネルギーの時間変化率を考えると、物体が流体に対してなす仕事と浮体から離れた遠方場でのエネルギー変化率の関係が得られ、それから物体に働く流体力とその物体による散乱波の遠方場での振幅の関係を知らることができる。その関係式は数値計算精度のチェック式としても使えるが、波漂流力に関連した重要なエネルギー関係式を与えるので、それらについて以下にまとめておく。

まず力学的エネルギーの時間変化率は次のように式変形することができる。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz \right\} dV \\ &= \rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right\} dV + \rho \iint_S \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz \right\} U_n dS \end{aligned} \quad (83)$$

ここで

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right\} = \nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla \Phi \right) \leftarrow \nabla^2 \Phi = 0 \\ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - gz = - \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \end{cases}$$

であるから(83)式に代入してガウスの定理を適用すると次式が得られる。

$$\frac{dE}{dt} = \rho \iint_S \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) U_n \right\} dS \quad (84)$$

$S$  は流体領域を取り囲む境界面なので  $S = S_H + S_F + S_\infty + S_B$  を考えると、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = U_n \equiv V_n \quad \text{on } S_H \text{ \& } S_F, \quad p = 0 \quad \text{on } S_F \\ U_n = 0 \quad \text{on } S_\infty, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad U_n = 0 \quad \text{on } S_B \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

によって

$$\frac{dE}{dt} = - \iint_{S_H} p V_n dS + \rho \iint_{S_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (86)$$

となる。ここで浮体表面  $S_H$  上での  $V_n$  は浮体の法線速度であり、したがって右辺第1項は、浮体が流体に対してなす仕事 (=  $W_D$ ) を表している。時間平均を考えると、流体領域全体のエネルギー変化率はゼロであるので次の関係が得られる。

$$W_D \equiv - \overline{\iint_{S_H} p V_n dS} = - \overline{\iint_{S_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS} \quad (87)$$

波浪中で浮体が単に動揺している場合、後で示される (グリーンの公式で証明される) ように  $W_D = 0$  であるから(87)式における  $S_\infty$  上での積分がゼロとなるが、ここでは  $W_D$  と表しておくことにして、

$$\Phi = \text{Re}[\phi e^{i\omega t}], \quad \overline{\text{Re}[A e^{i\omega t}] \text{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{2} \text{Re}[A B^*] \quad (88)$$

の時間平均の計算公式を適用すると、次のように式変形することができる。

$$\begin{aligned} W_D &= - \frac{\rho}{2} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \text{Re} \left[ i\omega \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right] r d\theta + O(\phi^3) \\ &= - \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re} \left[ i\omega \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial r} I_C \right]_{z=0} r d\theta = \frac{\rho}{4} \frac{\omega}{C_0} \text{Im} \int_0^{2\pi} \left[ \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right]_{z=0} r d\theta \end{aligned} \quad (89)$$

ここで  $z$  に関する積分は(39)式の  $I_C$  である。よって(89)式における速度ポテンシャル  $\phi$  は  $z = 0$  での値を考えればよい。必要な計算は定常回頭モーメント  $\overline{M_z}$  での(54)~(60)式と似ているが、以下のようにまとめることができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left\{ \alpha_n J_n(k_0 r) + \mathcal{A}_n H_n^{(2)}(k_0 r) \right\} e^{-in\theta} \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial r} &= \frac{g\zeta_a}{-i\omega} k_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (+i)^m \left\{ \alpha_m^* J_m'(k_0 r) + \mathcal{A}_m^* H_n^{(1)'}(k_0 r) \right\} e^{+im\theta} \\ T &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} e^{im\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

したがって

$$W_D = \frac{\rho g \zeta_a^2}{2} \omega \frac{\pi k_0 r}{C_0 K} \text{Im} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_n J_n + \mathcal{A}_n H_n^{(2)} \right\} \left\{ \alpha_n^* J_n' + \mathcal{A}_n^* H_n^{(1)'} \right\} \quad (91)$$

$$= \frac{\rho g \zeta_a^2}{2} \omega \frac{\pi k_0 r}{C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_n^* + \text{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) \right] (J_n Y_n' - J_n' Y_n) \quad (92)$$

$$= \rho g \zeta_a^2 \frac{\omega}{C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\mathcal{A}_n|^2 + \text{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) \right] \quad (93)$$

(92)式におけるベッセル関数のロンスキー行列式に対しては(59)式を用いている。

波浪中で浮体が動揺しているだけならば  $W_D = 0$  であるから、(93)式より次の関係が得られる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathcal{A}_n|^2 \quad (94)$$

(93)式の無限級数を  $n = 0 \sim +\infty$  の形に書き換えることもできる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\mathcal{A}_n|^2 + \operatorname{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) \right] \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 + \operatorname{Re}(\alpha_0^* \mathcal{A}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ |\mathcal{A}_n|^2 + |\mathcal{A}_{-n}|^2 + \operatorname{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n + \alpha_{-n}^* \mathcal{A}_{-n}) \right] \end{aligned} \quad (95)$$

ここで(66)式の関係を使うと

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_n|^2 + |\mathcal{A}_{-n}|^2 &= 2 \left( |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right) \\ \alpha_n^* \mathcal{A}_n + \alpha_{-n}^* \mathcal{A}_{-n} &= (\alpha_n^C - i\alpha_n^S)(\mathcal{A}_n + i\mathcal{A}_n^S) + (\alpha_n^C + i\alpha_n^S)(\mathcal{A}_n^C - i\mathcal{A}_n^S) \\ &= 2(\alpha_n^C \mathcal{A}_n^C + \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S) \end{aligned}$$

となるから、これらを(95)式に代入すると次のように表すことができる。

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 + \operatorname{Re}(\alpha_n^C \mathcal{A}_n^C + \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S) \right] = 0 \quad (96)$$

ここで

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_n = 1 \quad (\text{for } n \geq 1)$$

このエネルギー関係式が無限喫水垂直円筒の場合に成り立っていることを速度ポテンシャルの解析解を用いて確かめておこう。垂直円筒であるので  $\beta = 0$  を考えておけばよいので、(96)式は

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \operatorname{Re}(\mathcal{A}_n^C) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n |\mathcal{A}_n^C|^2 \quad (97)$$

となるが、 $\mathcal{A}_n^C$  は以前のノートで示したように、次式で与えられる。

$$\mathcal{A}_n^C = - \frac{J'_n(Ka)}{H_n^{(2)'}(Ka)} = - \frac{J'_n(J'_n + iY'_n)}{(J_n'^2 + Y_n'^2)} \quad (98)$$

よって

$$|\mathcal{A}_n^C|^2 = \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{C*} = \frac{J_n'^2}{J_n'^2 + Y_n'^2} = -\operatorname{Re}(\mathcal{A}_n^C) \quad (99)$$

であるから、エネルギー関係式(97)式は成り立っていることが分かる。

## 7. エネルギー保存則を考慮した波漂流力の計算式

以上に示した力学的エネルギー保存則を用いると、波漂流力の計算式における入射波と浮体による散乱波との干渉項を浮体による散乱波だけで書き表すことができるが、それについて以下に示すことにしよう。

まず最初に(68)、(69)式における  $\alpha_n$  と  $\mathcal{A}_n$  との干渉項について考える。

$$\left. \begin{aligned} \cos n\beta &= \cos \beta \cos(n+1)\beta + \sin \beta \sin(n+1)\beta \\ \cos(n+1)\beta &= \cos \beta \cos n\beta - \sin \beta \sin n\beta \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_{n+1}^C \mathcal{A}_n^C \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \cos n\beta \mathcal{A}_{n+1}^C + \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_n^C \right\} \\ &= \cos \beta \operatorname{Re} \left\{ \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^C + \cos n\beta \mathcal{A}_n^C \right\} + \sin \beta \operatorname{Re} \left\{ \sin(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^C - \sin n\beta \mathcal{A}_n^C \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_1 = \cos \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^C \mathcal{A}_n^C \right\} \quad (102)$$

同様にして

$$\begin{cases} \sin n\beta = \cos \beta \sin(n+1)\beta - \sin \beta \cos(n+1)\beta \\ \sin(n+1)\beta = \cos \beta \sin n\beta + \sin \beta \cos n\beta \end{cases} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} + \alpha_{n+1}^S \mathcal{A}_n^S \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sin n\beta \mathcal{A}_{n+1}^S + \sin(n+1)\beta \mathcal{A}_n^S \right\} \\ &= \cos \beta \operatorname{Re} \left\{ \sin(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^S + \sin n\beta \mathcal{A}_n^S \right\} - \sin \beta \operatorname{Re} \left\{ \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^S - \cos n\beta \mathcal{A}_n^S \right\} \end{aligned} \quad (104)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_2 = \cos \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S \right\} \quad (105)$$

(102)式と(105)式の和を考えると、さらに(96)式のエネルギー保存則を適用すると、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_{n+1}^C \mathcal{A}_n^C + \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} + \alpha_{n+1}^S \mathcal{A}_n^S \right] \\ &= \cos \beta \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \left( \alpha_n^C \mathcal{A}_n^C + \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S \right) = -\cos \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \end{aligned} \quad (106)$$

したがって、これを(68)式に代入すると、 $x$ 軸方向に働く波漂流力  $\overline{F}_x$  は次のように浮体による散乱波の振幅だけから計算できることが解る。

$$\overline{F}_x = -2\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} \right) - \cos \beta \epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \right] \quad (107)$$

同様の計算を(69)式の  $\overline{F}_y$  についても考えてみよう。(100)式を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3 &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \alpha_{n+1}^C \mathcal{A}_n^S \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \cos n\beta \mathcal{A}_{n+1}^S - \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_n^S \right\} \\ &= \sin \beta \operatorname{Re} \left\{ \sin(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^S + \sin n\beta \mathcal{A}_n^S \right\} + \cos \beta \operatorname{Re} \left\{ \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^S - \cos n\beta \mathcal{A}_n^S \right\} \end{aligned} \quad (108)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_3 = \sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S \right\} \quad (109)$$

となることが分かる。また(103)式を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4 &\equiv \operatorname{Re} \left\{ -\alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_{n+1}^S \mathcal{A}_n^C \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -\sin n\beta \mathcal{A}_{n+1}^C + \sin(n+1)\beta \mathcal{A}_n^C \right\} \\ &= \sin \beta \operatorname{Re} \left\{ \cos(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^C + \cos n\beta \mathcal{A}_n^C \right\} + \cos \beta \operatorname{Re} \left\{ -\sin(n+1)\beta \mathcal{A}_{n+1}^C + \sin n\beta \mathcal{A}_n^C \right\} \end{aligned} \quad (110)$$

よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_4 = \sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \operatorname{Re} \left\{ \alpha_n^C \mathcal{A}_n^C \right\} \quad (111)$$

(109), (111)式の和を考えると、さらに(96)式を用いると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \alpha_{n+1}^C \mathcal{A}_n^S - \alpha_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \alpha_{n+1}^S \mathcal{A}_n^C \right] \\ &= \sin \beta \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \left( \alpha_n^S \mathcal{A}_n^S + \alpha_n^C \mathcal{A}_n^C \right) = -\sin \beta \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \end{aligned} \quad (112)$$

したがって、 $y$ 軸方向に働く波漂流力  $\overline{F}_y$  の計算式は次のように表すこともできることが解る。

$$\overline{F}_y = -2\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} \right) - \sin \beta \epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \right] \quad (113)$$

これらの式変形は、 $\overline{F_x} - i\overline{F_y}$  の複素数表示に対して考えることもできる。(53)式の  $\alpha_n$  と  $\mathcal{A}_n$  との干渉項について考えると次式を得る。

$$\begin{aligned}\alpha_n \mathcal{A}_{n+1}^* + \mathcal{A}_n \alpha_{n+1}^* &= e^{in\beta} \mathcal{A}_{n+1}^* + e^{-i(n+1)\beta} \mathcal{A}_n \\ &= e^{-i\beta} \left\{ e^{i(n+1)\beta} \mathcal{A}_{n+1}^* + e^{-in\beta} \mathcal{A}_n \right\} = e^{-i\beta} \left\{ \alpha_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n^* \mathcal{A}_n \right\}\end{aligned}\quad (114)$$

ここで

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n^* \mathcal{A}_n \right\} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \right) \left\{ \alpha_{n+1} \mathcal{A}_{n+1}^* + \alpha_n^* \mathcal{A}_n \right\} = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) \quad (115)$$

と表すことができることに注意し、(94)式のエネルギー関係式を用いると、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\overline{F_x} - i\overline{F_y} &= -\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* + e^{-i\beta} \text{Re}(\alpha_n^* \mathcal{A}_n) \right] \\ &= -\rho g \zeta_a^2 \frac{k_0}{C_0 K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n+1}^* - e^{-i\beta} |\mathcal{A}_n|^2 \right]\end{aligned}\quad (116)$$

## 8. グリーンの公式を用いたエネルギー保存則の導出

力学的エネルギーの保存則は、遠方場における(89)式の積分を考えれば得られるということが分かったが、(89)式の形は実は  $\phi$  と  $\phi^*$  に対するグリーンの公式に関係しているので、その説明をしておこう。

2つの異なるスカラー関数  $\varphi$  と  $\psi$  に対してガウスの定理を用いると、次式が得られる。

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (117)$$

ここでの前提条件として、 $\varphi$ 、 $\psi$  はともにラプラス方程式を満たし、自由表面  $S_F$ 、水底  $S_B$  で同じ形の同次境界条件を満たすとする。

$$\left. \begin{aligned}[F] \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial z} + K\varphi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} + K\psi = 0 \\ [B] \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0\end{aligned} \right\} \quad (118)$$

残りの境界面  $S_H$ 、 $S_\infty$  においては異なる境界条件でも良いとすると、(117)式より次式を得る。

$$\iint_{S_H} \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS = - \iint_{S_\infty} \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS \quad (119)$$

この式は**グリーンの公式**として知られている。

(89)式と同じエネルギー関係式を考えるために、(2)式で  $g\zeta_a/i\omega$  の係数を除いた(規格化された)速度ポテンシャルとその複素共役として次の組み合わせを考える。

$$\varphi \equiv \phi_D - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j, \quad \psi \equiv \varphi^* = \phi_D^* - K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} \phi_k^* \quad (120)$$

物体表面上での境界条件および関連の積分は

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j, \quad \frac{\partial \phi_k^*}{\partial n} = n_k \\ F_{jk} = - \iint_{S_H} \phi_k n_j dS = A_{jk} + \frac{B_{jk}}{i\omega}, \quad E_j = \iint_{S_H} \phi_D n_j dS\end{aligned} \right\} \quad (121)$$

$$\sum_{k=1}^6 \frac{X_k}{\zeta_a} \left[ -KM_{jk} \delta_{jk} + C_{jk} \right] = E_j + K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k}{\zeta_a} F_{jk} \quad \text{for } j = 1 \sim 6 \quad (122)$$

などのように表すことができる。(122)式は運動方程式であり、 $F_{jk}$  は  $k$ モードの運動による  $j$ 方向に働く radiation 流体力、 $E_j$  は  $j$ 方向に働く波浪強制力である。また  $M_{jk} \delta_{jk}$  は質量マトリックス、 $C_{jk}$  は復原力

マトリックスであり、これらは実関数であり、対称性すなわち  $M_{jk} = M_{kj}$ ,  $C_{jk} = C_{kj}$  を満たすと仮定する。このとき、(119)式の左辺は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \iint_{S_H} \left[ \left( \phi_D - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j \right) \left( -K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} n_k \right) - \left( \phi_D^* - K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} \phi_k^* \right) \left( -K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} n_j \right) \right] dS \\
&= -K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} \left\{ E_k + K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} F_{kj} \right\} + K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \left\{ E_j^* + K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} F_{jk}^* \right\} \\
&= -K \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \left\{ -K M_{kj} \delta_{kj} + C_{kj} \right\} + K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^*}{\zeta_a} \left\{ -K M_{jk} \delta_{jk} + C_{jk} \right\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{123}$$

によってゼロであることが確かめられる。したがって(119)式より

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\infty} \left\{ \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS &= 2 \operatorname{Im} \iint_{S_\infty} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} dS = 0 \\
\rightarrow \operatorname{Im} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} r d\theta &= 0
\end{aligned} \tag{124}$$

の関係式が得られるが、これは力学的エネルギーの時間変化率から求められた(89)式と同じであることが分かる。このことから、 $\phi$  とその複素共役  $\phi^*$  に対してグリーンの公式を適用すると、エネルギー保存則に相当する関係式を導くことができるということが理解できる。

## 9. コチン関数を用いた波漂流力の計算公式

運動量保存則を用いれば、時間平均値として浮体に働く波漂流力およびモーメントを遠方場  $S_\infty$  での計算によって求められることが分かった。その計算式は(41)～(43)式であり、第4節ではベッセル関数の加法定理を用いて速度ポテンシャルをフーリエ級数の形で表してから  $\theta$  に関する積分を行い、波漂流力および  $z$  軸まわりの回頭モーメントの計算公式を得た。

一方、丸尾[1]によってコチン関数を使った別の解析方法も示されている。 $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  でのベッセル関数の漸近展開式を適用すると、(7)式で与えられるグリーン関数のうち外方への進行波を表す第2種ハンケル関数は、 $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \simeq r - (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)$  と近似できることから

$$\begin{aligned}
H_0^{(2)}(k_0 R) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 R}} e^{-i(k_0 R - \pi/4)} \\
&\sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-ik_0 r + i\pi/4} e^{ik_0(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} \quad \text{as } r \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{125}$$

のように表すことができる。したがって、物体の攪乱による遠方場での速度ポテンシャル  $\phi_B$  は次のように表すことができる。

$$\phi_B(r, \theta, z) \equiv \phi_7 - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j \sim \frac{i}{2} C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H(k_0, \theta) Z_0(z) e^{-ik_0 r + i\pi/4} \tag{126}$$

ここで

$$H(k_0, \theta) = H_7(k_0, \theta) - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} H_j(k_0, \theta) \tag{127}$$

$$\left. \begin{aligned}
H_7(k_0, \theta) &= - \iint_{S_H} \phi_D \frac{\partial}{\partial n} Z_0(\zeta) e^{ik_0(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} dS \\
H_j(k_0, \theta) &= \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} Z_0(\zeta) e^{ik_0(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} dS
\end{aligned} \right\} \tag{128}$$

をコチン (Kochin) 関数と呼んでおり、遠方場での散乱波の複素振幅を表す関数である。

流場全体の速度ポテンシャルは(2)式のように

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta, z) &= \frac{g\zeta_a}{i\omega} \left\{ \phi_0(r, \theta, z) + \phi_B(r, \theta, z) \right\} \\ \phi_0 &= Z_0(z) e^{-ik_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} = Z_0(z) e^{-ik_0 r \cos(\theta - \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

で表されるので、(41)式の計算において(129)式を代入し、 $\phi_B$  の2乗の項と  $\phi_B$  と  $\phi_0$  の干渉の項に分けて表すことにすると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F_x}}{\rho g \zeta_a^2} &= -\frac{1}{8C_0 K} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi_B}{\partial r} \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} + k_0^2 \phi_B \phi_B^* \right]_{z=0} \cos \theta \cdot r \, d\theta \\ &\quad - \frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi_B}{\partial r} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} + k_0^2 \phi_B \phi_0^* \right]_{z=0} \cos \theta \cdot r \, d\theta \end{aligned} \quad (130)$$

(126)式より

$$\left. \begin{aligned} \phi_B &= \frac{i}{2} C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H(k_0, \theta) e^{-ik_0 r + i\pi/4} \\ \frac{\partial \phi_B}{\partial r} &= \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H(k_0, \theta) e^{-ik_0 r + i\pi/4} \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

を代入すると、(130)式の右辺第1項（これを  $\mathcal{J}_1$  と表す）は次式となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= -\frac{1}{8C_0 K} \left\{ \frac{1}{4} C_0^2 k_0 \frac{2}{\pi r} + k_0^2 \frac{1}{4} C_0^2 \frac{2}{\pi k_0 r} \right\} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 \cos \theta \cdot r \, d\theta \\ &= -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 \cos \theta \, d\theta \end{aligned} \quad (132)$$

次に  $\phi_B$  と  $\phi_0$  の干渉項である(130)式の第2行目（これを  $\mathcal{J}_2$  と表す）は

$$\phi_0^* = e^{ik_0 r \cos(\theta - \beta)}, \quad \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} = ik_0 \cos(\theta - \beta) e^{ik_0 r \cos(\theta - \beta)} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi_B}{\partial r} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} + k_0^2 \phi_B \phi_0^* \right) r \cos \theta &= \frac{i}{2} C_0 k_0^2 \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \left\{ \cos(\theta - \beta) + 1 \right\} \cos \theta H(k_0, \theta) \\ &\quad \times e^{ik_0 r \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\} + i\pi/4} \end{aligned} \quad (134)$$

などを考慮すると次式を得る。

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{2} C_0 k_0^2 \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos(\theta - \beta) + 1 \right\} \cos \theta H(k_0, \theta) e^{ik_0 r \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\}} e^{i\pi/4} \, d\theta \right] \quad (135)$$

ここで  $r \rightarrow \infty$  を考えるとき停留位相法を用いるが、その計算公式は

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\theta) e^{irf(\theta)} \, d\theta \simeq \sum_n \Psi(\theta_n) \sqrt{\frac{2\pi}{r|f''(\theta_n)|}} e^{irf(\theta_n) \pm i\pi/4} \quad (136)$$

ただし  $\theta_n$  は  $f'(\theta) = 0$  の根で、複号は  $f''(\theta_n)$  の符号に対応する。(135)式では

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\theta) &= \left\{ \cos(\theta - \beta) + 1 \right\} \cos \theta H(k_0, \theta) \\ f(\theta) &= k_0 \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\}, \quad f' = -k_0 \sin(\theta - \beta), \quad f''(\theta) = -k_0 \cos(\theta - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

であるから、停留点は  $\theta = \beta$  か  $\theta - \beta = \pi$  であるが、寄与があるのは  $\theta = \beta$  だけであることが確認できる。このとき  $f(\beta) = 0$ ,  $f''(\beta) = -k_0 < 0$ ,  $\Psi(\beta) = 2 \cos \beta H(k_0, \beta)$  となり、したがって

$$\mathcal{J}_2 = \frac{k_0}{2K} \cos \beta \operatorname{Im} \left[ H(k_0, \beta) \right] \quad (138)$$

を得ることができる。これらを(130)式に代入すると、次式となる。

$$\frac{\overline{F_x}}{\rho g \zeta_a^2} = -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 \cos \theta \, d\theta + \frac{k_0}{2K} \cos \beta \operatorname{Im} \left[ H(k_0, \beta) \right] \quad (139)$$

(130)式の右辺第2項, すなわち  $\phi_B$  と  $\phi_0$  の干渉項は, エネルギー保存則を適用することによって別の形に式変形することができる。それを次に示しておこう。(89)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} & \text{Im} \int_0^{2\pi} \left[ (\phi_0 + \phi_B) \frac{\partial}{\partial r} (\phi_0^* + \phi_B^*) \right]_{z=0} r d\theta = 0 \\ \rightarrow & \text{Im} \int_0^{2\pi} \left\{ \phi_B \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} \right\}_{z=0} r d\theta = \text{Im} \int_0^{2\pi} \left\{ \phi_0^* \frac{\partial \phi_B}{\partial r} - \phi_B \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} \right\}_{z=0} r d\theta \end{aligned} \quad (140)$$

まず, (131)式よりこの式の左辺は次式となる。

$$\mathcal{L} \equiv \text{Im} \int_0^{2\pi} \left\{ \phi_B \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} \right\}_{z=0} r d\theta = \frac{1}{2\pi} C_0^2 \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 d\theta \quad (141)$$

次に(133)式や(131)式を用いると, (140)式の右辺は

$$\begin{aligned} \phi_0^* \frac{\partial \phi_B}{\partial r} - \phi_B \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} &= \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \left\{ 1 + \cos(\theta - \beta) \right\} H(k_0, \theta) \\ &\quad \times e^{ik_0 r \{ \cos(\theta - \beta) - 1 \} + i\pi/4} \end{aligned} \quad (142)$$

$$\mathcal{R} \equiv \text{Im} \int_0^{2\pi} \left\{ \phi_0^* \frac{\partial \phi_B}{\partial r} - \phi_B \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} \right\}_{z=0} r d\theta = \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \text{Im} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{irf(\theta) + i\pi/4} d\theta \quad (143)$$

ただし

$$F(\theta) = \left\{ 1 + \cos(\theta - \beta) \right\} H(k_0, \theta), \quad f(\theta) = k_0 \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\}$$

この計算にも停留位相法による(136)式の計算公式を用いることができるので,  $\theta = \beta$  での寄与のみを考えれば次の結果が得られる。

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \text{Im} \left[ 2H(k_0, \beta) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} \right] = 2C_0 \text{Im} \left[ H(k_0, \beta) \right] \quad (144)$$

したがって  $\mathcal{L} = \mathcal{R}$  によって次の関係式が得られる。

$$\text{Im} \left[ H(k_0, \beta) \right] = \frac{C_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 d\theta \quad (145)$$

これを(139)式に代入すると, 丸尾の計算公式として知られている次式を得ることができる。

$$\frac{\overline{F_x}}{\rho g \zeta_a^2} = -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 (\cos \theta - \cos \beta) d\theta \quad (146)$$

$y$  方向に働く波漂流力  $\overline{F_y}$  に対する解析も殆ど同じであり, 式変形の過程を辿れば次式となることが容易に理解できる。

$$\frac{\overline{F_y}}{\rho g \zeta_a^2} = -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 (\sin \theta - \sin \beta) d\theta \quad (147)$$

ところで, コチン関数を用いたこれらの計算式による結果は, ベッセル関数群に加法定理を適用してフーリエ級数表示した後,  $\theta$  に関して積分した計算式, すなわち(107)式, (113)式による結果と同じになるはずである。そのことを解析的に確かめておくことにしよう。

まず(127)~(128)式で定義したコチン関数と(18)式で定義した外方へ伝播する進行波の係数  $\mathcal{A}_n$  との関係であるが,

$$\begin{aligned} e^{ik_0(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} &= e^{ik_0 r' \cos(\theta - \theta')} \quad \leftarrow \quad \xi = r' \cos \theta', \quad \eta = r' \sin \theta' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n (i)^n J_n(k_0 r') \cos n(\theta - \theta') \quad \leftarrow \quad \epsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_n = 1 \quad (n \geq 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n (i)^n J_n(k_0 r') \left\{ \cos n\theta' \cos n\theta + \sin n\theta' \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (148)$$

の関係式をコチン関数に代入すると、次のように表すことができる。

$$H(k_0, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_n(i)^n \left\{ H_n^C \cos n\theta + H_n^S \sin n\theta \right\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \right\} \quad (149)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} H_n^C \\ H_n^S \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} H_{7n}^C \\ H_{7n}^S \end{Bmatrix} - K \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \begin{Bmatrix} H_{jn}^C \\ H_{jn}^S \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} H_{jn}^C \\ H_{jn}^S \end{Bmatrix} &= \iint_{S_H} \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right\} Z_0(\zeta) J_n(k_0 r') \begin{Bmatrix} \cos n\theta' \\ \sin n\theta' \end{Bmatrix} dS \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

のように定義しているので、 $\mathcal{A}_n^C, \mathcal{A}_n^S$  と  $a_n, b_n$  との関係は

$$\begin{Bmatrix} H_n^C \\ H_n^S \end{Bmatrix} = \frac{2}{i C_0} \cdot \frac{1}{(i)^n} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_n^C \\ \mathcal{A}_n^S \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} = -i \frac{4}{C_0} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_n^C \\ \mathcal{A}_n^S \end{Bmatrix} \quad (151)$$

のように与えられることが分かる。

コチン関数  $H(k_0, \theta)$  を(149)式のようなフーリエ級数で表すと、係数  $a_n, b_n$  は次式で計算することもできる。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(k_0, \theta) \cos n\theta d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H(k_0, \theta) \sin n\theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

そして  $\theta$  に関する積分は、以下のように解析的に行うことができる [2].

$$\mathcal{D}_1 \equiv \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 d\theta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\} \quad (153)$$

$$\mathcal{D}_C \equiv \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 \cos \theta d\theta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^* \right\} \quad (154)$$

$$\mathcal{D}_S \equiv \int_0^{2\pi} |H(k_0, \theta)|^2 \sin \theta d\theta = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} \left\{ a_n b_{n+1}^* - b_n a_{n+1}^* \right\} \quad (155)$$

これらの結果を(146)式、(147)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}_x}{\rho g \zeta_a^2} &= -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \left\{ \mathcal{D}_C - \cos \beta \mathcal{D}_1 \right\} \\ &= -\frac{C_0 k_0}{8K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{Re} \left( a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^* \right) - \cos \beta \epsilon_n \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\} \right] \\ &= -\frac{2k_0}{C_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{Re} \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{C*} + \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{S*} \right) - \cos \beta \epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F}_y}{\rho g \zeta_a^2} &= -\frac{C_0 k_0}{8\pi K} \left\{ \mathcal{D}_S - \sin \beta \mathcal{D}_1 \right\} \\ &= -\frac{C_0 k_0}{8K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{Re} \left( a_n b_{n+1}^* - b_n a_{n+1}^* \right) - \sin \beta \epsilon_n \left\{ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\} \right] \\ &= -\frac{2k_0}{C_0 K} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{Re} \left( \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_{n+1}^{S*} - \mathcal{A}_n^S \mathcal{A}_{n+1}^{C*} \right) - \sin \beta \epsilon_n \left\{ |\mathcal{A}_n^C|^2 + |\mathcal{A}_n^S|^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (157)$$

となるが、これらの結果は、それぞれ(107)式、(113)式と同じであることが解る。以上のことから、コチン関数を用いた丸尾の計算公式による結果は、本論の前半で示した解析、すなわち遠方場での速度ポテンシャル  $\phi(r, \theta, z)$  を求める際にベッセル関数群の加法定理を用いて先にフーリエ級数表示し、 $\theta$  に関して解析的に積分するとともにベッセル関数群のロンスキー行列公式を適用した結果と完全に同じであることが証明されたと言える。

## 10. コチン関数を用いた波漂流モーメントの計算

これまでの説明で、コチン関数を用いた  $z$  軸まわりの定常回頭モーメント  $\overline{M_z}$  の計算式に関する説明が残されていたので、それを以下に追加しておく。

$\overline{M_z}$  に関する計算式である(43)式に(129)式を代入し、 $\phi_B$  の2乗の項と、 $\phi_B$  と  $\phi_0$  の干渉項を分けて表すと、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{M_z}}{\rho g \zeta_a^2} &= -\frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} + \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} \right]_{z=0} r d\theta \\ &= -\frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} \right]_{z=0} r d\theta \\ &\quad - \frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} - \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_B}{\partial r \partial \theta} \right]_{z=0} r d\theta \end{aligned} \quad (158)$$

この式の最後の項は、後の計算に便利のように  $\theta$  について部分積分を行っている。

まず  $\phi_B$  の2乗の項である右辺第1項（これを  $\mathcal{J}_3$  と表す）について考えよう。(131)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} &= \frac{i}{2} C_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H'(k_0, \theta) e^{-ik_0 r + i\pi/4} \\ \frac{\partial \phi_B^*}{\partial r} &= \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H^*(k_0, \theta) e^{+ik_0 r - i\pi/4} \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

であるから、直ちに次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 &= -\frac{1}{4C_0 K} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{4} C_0^2 k_0 \frac{2}{\pi k_0 r} r \int_0^{2\pi} H'(k_0, \theta) H^*(k_0, \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{C_0}{8\pi K} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} H'(k_0, \theta) H^*(k_0, \theta) d\theta \end{aligned} \quad (160)$$

次に  $\phi_B$  と  $\phi_0$  の干渉項である(158)式の第2項（これを  $\mathcal{J}_4$  と表す）について考える。(133), (159)式より

$$\left. \begin{aligned} \phi_0^* &= e^{ik_0 r \cos(\theta - \beta)}, \quad \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} = ik_0 \cos(\theta - \beta) e^{ik_0 r \cos(\theta - \beta)} \\ \frac{\partial^2 \phi_B}{\partial r \partial \theta} &= \frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} H'(k_0, \theta) e^{-ik_0 r + i\pi/4} \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

よって

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi_B}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_0^*}{\partial r} - \phi_0^* \frac{\partial^2 \phi_B}{\partial r \partial \theta} \right)_{z=0} r &= -\frac{1}{2} C_0 k_0 \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \left\{ \cos(\theta - \beta) + 1 \right\} H'(k_0, \theta) \\ &\quad \times e^{ik_0 r \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\}} e^{i\pi/4} \end{aligned} \quad (162)$$

であるから次式を得ることができる。

$$\mathcal{J}_4 = \frac{k_0}{8K} \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E(\theta) e^{irf(\theta) + i\pi/4} d\theta \quad (163)$$

ただし

$$E(\theta) = \left\{ \cos(\theta - \beta) + 1 \right\} H'(k_0, \theta), \quad f(\theta) = k_0 \left\{ \cos(\theta - \beta) - 1 \right\}$$

$\theta$  に関する積分は  $r \rightarrow \infty$  を考えるので、停留位相法を適用すると次式となる。

$$\mathcal{J}_4 = \frac{k_0}{8K} \sqrt{\frac{2r}{\pi k_0}} \operatorname{Re} \left[ e^{i\pi/4} 2H'(k_0, \beta) \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} e^{-i\pi/4} \right] = \frac{1}{2K} \operatorname{Re} \left[ H'(k_0, \beta) \right] \quad (164)$$

以上の結果より、(158)式は次式となることが解る。

$$\frac{\overline{M_z}}{\rho g \zeta_a^2} = \frac{C_0}{8\pi K} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} H'(k_0, \theta) H^*(k_0, \theta) d\theta + \frac{1}{2K} \operatorname{Re} \left[ H'(k_0, \beta) \right] \quad (165)$$

ここで、コチン関数を(149)式のようにフーリエ級数で表して  $\theta$  に関する積分を実行してみよう。(149)式より

$$\left. \begin{aligned} H'(k_0, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ -a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta \right\} \\ H^*(k_0, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left\{ a_m^* \cos m\theta + b_m^* \sin m\theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \pi \delta_{mn} \quad (167)$$

となるから、これらを代入すると次式を得る。

$$\frac{\overline{M_z}}{\rho g \zeta_a^2} = \frac{C_0}{8K} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ a_n^* b_n - a_n b_n^* \right\} + \frac{1}{2K} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ -a_n \sin n\beta + b_n \cos n\beta \right\} \quad (168)$$

ここで(151)式の関係，すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \\ b_n \end{array} \right\} = -i \frac{4}{C_0} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_n^C \\ \mathcal{A}_n^S \end{array} \right\}, \quad \cos n\beta = \alpha_n^C, \quad \sin n\beta = \alpha_n^S \quad (169)$$

を考慮すると，(168)式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{M_z}}{\rho g \zeta_a^2} &= \frac{2}{C_0 K} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ \mathcal{A}_n^{C*} \mathcal{A}_n^S - \mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{S*} - \alpha_n^C \alpha_n^S + \alpha_n^S \alpha_n^C \right] \\ &= -\frac{2}{C_0 K} \text{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \left[ 2\mathcal{A}_n^C \mathcal{A}_n^{S*} + \alpha_n^C \mathcal{A}_n^{S*} - \alpha_n^S \mathcal{A}_n^{C*} \right] \end{aligned} \quad (170)$$

この式は以前に求めた(73)式と同じであることが確認できる。

## 11. 波漂流力に関する更なる式変形 – グリーンの公式の適用

直角（デカルト）座標で(30)–(31)式を再記すると，次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\overline{F_x} &= \rho \iint_{S_\infty} \left[ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS - \frac{\rho}{2g} \int_{C_\infty} \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2}_{z=0} n_x dl \\ &= \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl\end{aligned}\quad (171)$$

$$\begin{aligned}\overline{F_y} &= \rho \iint_{S_\infty} \left[ \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi n_y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS - \frac{\rho}{2g} \int_{C_\infty} \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2}_{z=0} n_y dl \\ &= \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_y dl\end{aligned}\quad (172)$$

それぞれの右辺第1項の被積分関数は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_x &\equiv \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right)}_{\equiv \mathcal{L}_x} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\}\end{aligned}\quad (173)$$

$$\begin{aligned}\text{ここで } \mathcal{L}_x &= n_x (\phi_x \phi_x^* + \phi_y \phi_y^* + \phi_z \phi_z^*) - \phi_x (\phi_x^* n_x + \phi_y^* n_y + \phi_z^* n_z) - \phi (\phi_{xx}^* n_x + \phi_{xy}^* n_y + \phi_{xz}^* n_z) \\ &= n_x (\phi_y \phi_y^* + \phi_z \phi_z^* - \phi \phi_{xx}^*) - n_y (\phi_x \phi_x^* + \phi \phi_{xy}^*) - n_z (\phi_x \phi_z^* + \phi \phi_{xz}^*) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad \text{where } \mathbf{A} = (0, -\phi \phi_z^*, +\phi \phi_y^*)\end{aligned}\quad (174)$$

同様にして  $y$  成分に対しても

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_y &\equiv \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\nabla \phi \cdot \nabla \phi^* n_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right)}_{\equiv \mathcal{L}_y} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\}\end{aligned}\quad (175)$$

$$\begin{aligned}\text{ここで } \mathcal{L}_y &= n_y (\phi_x \phi_x^* + \phi_y \phi_y^* + \phi_z \phi_z^*) - \phi_y (\phi_x^* n_x + \phi_y^* n_y + \phi_z^* n_z) - \phi (\phi_{yx}^* n_x + \phi_{yy}^* n_y + \phi_{yz}^* n_z) \\ &= -n_x (\phi_y \phi_x^* + \phi \phi_{yx}^*) + n_y (\phi_x \phi_x^* + \phi_z \phi_z^* - \phi \phi_{yy}^*) - n_z (\phi_y \phi_z^* + \phi \phi_{yz}^*) \\ &= \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad \text{where } \mathbf{B} = (+\phi \phi_z^*, 0, -\phi \phi_x^*)\end{aligned}\quad (176)$$

と表すことができる。これらを(171)–(172)式に代入すると，次式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\overline{F_x} &= \frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS \\ &\quad + \frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl\end{aligned}\quad (177)$$

$$\begin{aligned}\overline{F_y} &= \frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dS \\ &\quad + \frac{\rho}{4} \operatorname{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right\} dS - \frac{\rho}{4} K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_y dl\end{aligned}\quad (178)$$

次に，それぞれの右辺第1項に対してストークスの公式

$$\iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \int_{C_\infty} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}\quad (179)$$

を適用することができる。右辺の周辺線積分路は（自由表面に対するガウスの定理の関係から）時計まわりを正として定義しており、これはストークスの公式において  $S_\infty$  の外側表面を常に左側に見る積分方向である。 $C_\infty$  上は  $z=0$  であるから  $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0) = (-n_y dl, n_x dl, 0)$  であり、

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = -K \phi^* \quad \text{on } z=0 \quad (180)$$

であることに注意すると、次のように表すことができる。

$$\iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = - \int_{C_\infty} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z} n_x dl = K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_x dl \quad (181)$$

同様に

$$\iint_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dS = \int_{C_\infty} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial z} (-n_y dl) = K \int_{C_\infty} \phi \phi^* \Big|_{z=0} n_y dl \quad (182)$$

が得られる。これらを(177)–(178)式に代入すると、線積分項はお互いにキャンセルすることが分かり、次の結果を得ることができる。

$$\overline{F_x} = \frac{\rho}{4} \text{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS \quad (183)$$

$$\overline{F_y} = \frac{\rho}{4} \text{Re} \iint_{S_\infty} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right\} dS \quad (184)$$

これらの式の良さは、 $\psi = \phi_x^*$  ( $y$  成分の場合は  $\psi = \phi_y^*$ ) と考えれば、(119)式で示したグリーンの公式が適用できることである。自由表面  $S_F$  上では(180)式によって被積分関数がゼロとなるので、

$$\overline{F_x} = -\frac{\rho}{4} \text{Re} \iint_{S_H} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \right\} dS \quad (185)$$

$$\overline{F_y} = -\frac{\rho}{4} \text{Re} \iint_{S_H} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \right\} dS \quad (186)$$

のように、物体表面  $S_H$  上での積分から波漂流力が計算できることになる。この式では、圧力積分による Near-field method と違って、浮体と自由表面との交線部分におけるいわゆる線積分項が存在しないことが特徴である。

# 波浪中の垂直コラムに働く圧力, 流体力, 波漂流力について

関西設計株式会社 柏木 正

## 1. はじめに

洋上風力発電プラットフォームとしてスパー型浮体を考えることが多くなっている。このような目的のスパー型浮体は水線面積が小さく喫水が深いので、波浪中で浮体に働く流体力を算定する場合、長波近似に基づき、Morison公式を用いることが多いが、相対的に短波長域（判断の目安としては波長  $\lambda$  と浮体直径  $D$  の比が  $\lambda/D < 5 \sim 6$ ）では浮体による波の散乱影響が重要になってくるので、質量係数  $C_M = 2$  とした Morison 公式では正しい流体力の推定はできない。波による線形流体力や波漂流力に関する流体力学的基本特性を理解し、その知識に基づいて近似計算公式を正しく用いることが必要である。そのために本論では、垂直円筒を代表例とするような vertical wall を有する垂直コラムに対する造波理論について整理しておく。この解説の基とした参考論文は以下のものである。

### 参考文献

- [1] Havelock, T.H.: The pressure of water waves upon a fixed obstacle, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, No. 93, Vol. 175, pp. 409–421, 1940.
- [2] Maruo, H.: The force of water waves upon a fixed obstacle, *Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National University*, Vol. 5, 1956.

## 2. 垂直コラムの Diffraction 問題

### 2.1 定式化

流体力学的基本特性を理解するためには、計算式ができるだけ解析的に与えられる方が良い。そのために本論では、物体は垂直壁 (vertical wall) を有し、喫水は水底まで達しているとし、水深は無量大 (実用的には水深  $h$  が波長  $\lambda$  に対し、 $h > \lambda/2$  であれば良い) と仮定する。このとき、速度ポテンシャル  $\Phi(x, y, z, t)$  の定式化として

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (2)$$

$$[H] \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on hull surface} \quad (3)$$

$$[R] \quad \sqrt{R} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + C \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0 \quad \text{as } R \rightarrow \infty \quad (4)$$

を考えよう。ここで、入射波の円周波数を  $\omega$  とした周期的な問題を考える。

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re} [\phi(x, y, z) e^{i\omega t}] \quad (5)$$

そのとき、波数は  $K = \omega^2/g$  ( $g$  は重力加速度) で与えられ、(4)式は、位相速度を  $C = \omega/K$  として、波が外方に伝播するという放射 (radiation) 条件を表している。Diffraction 問題だけを考えるので、速度ポテンシャルは、入射波の速度ポテンシャル  $\phi_I(x, y, z)$  と散乱波の速度ポテンシャル  $\phi_S(x, y, z)$  の和を考える。また入射波は  $x$  軸の負方向に伝播 (進行) していると考え、以下のように表すことができる。

$$\phi_D(x, y, z) \equiv \phi_I(x, y, z) + \phi_S(x, y, z) \quad (6)$$

$$\phi_I(x, y, z) = \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz+iKx} \quad (7)$$

ここで  $\zeta_a$  は入射波の振幅であり、 $z$  軸の正方向は鉛直上向きとしている。

後で示すように、無限水深の垂直コラムでは、散乱波に局所波 (local wave) が存在せず、 $z$  方向の依存性は入射波と同じ指数関数  $e^{Kz}$  とすることができる。そのとき、散乱速度ポテンシャルの  $x, y$  依存性部分を改めて  $\phi_S(x, y) = \phi_S(r, \theta)$  と表すことにすると

$$\phi_S(x, y, z) \rightarrow \phi_S(x, y) e^{Kz}, \quad [L] \quad \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_S}{\partial y^2} + K^2 \phi_S = 0 \quad (8)$$

となり、3次元円筒座標での  $(x, y)$  座標は2次元極座標  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  で表すことができる。したがって  $\phi_S(r, \theta)$  の基本解は、 $\theta$  方向はフーリエ級数、 $r$  方向はベッセル関数群となる。以下ではそれらの解析解を求めることにしよう。

## 2.2 水面に発生する波

最初に、物体の中心面 ( $xz$  面) 上のわきだし分布によって水面に発生する波の変位を考えておく。物体表面境界条件(3)式を近似的に満たすために、水面下  $z = -f$ ,  $x = \xi$  でのわき出し強さ  $m_0$  を考えると、流量の関係から

$$4\pi m_0 d\xi = 2 \frac{\phi_I}{\partial \xi} d\xi \simeq 2 \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \quad (9)$$

$$\rightarrow m_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{ig\zeta_a}{\omega} (iK) \frac{\partial y}{\partial \xi} e^{iK\xi} e^{-Kf} \equiv m e^{-Kf}, \quad m = -\frac{\zeta_a \omega}{2\pi} \frac{\partial y}{\partial \xi} e^{iK\xi} \quad (10)$$

を考えることになる。単位強さ (流量  $Q = 4\pi m_0 = 1$ ) のわき出しによる速度ポテンシャルはグリーン関数として知られており、それを用いると、(10)式で与えられる流量  $Q = 4\pi m e^{-Kf}$  による速度ポテンシャル  $G$  は次式で次式で与えられる。

$$G(x, y, z) = -m e^{-Kf} \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{4K}{\pi} \int_0^\infty \frac{K \cos k(z-f) - k \sin k(z-f)}{K^2 + k^2} K_0(kR) dk - i2\pi K e^{K(z-f)} H_0^{(2)}(KR) \right\} \quad (11)$$

ここで  $K_0(kR)$  は第2種変形ベッセル関数で局所波に関係しており、 $H_0^{(2)}(KR)$  は第2種ハンケル関数で進行波を表す。また  $r_1, r_2, R$  は以下のように与えられる。

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z+f)^2, \quad r_2^2 = x^2 + y^2 + (z-f)^2, \quad R^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

これによる水面変位は、線形理論では次式で計算できる。

$$Z_w = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \text{Re} \left[ \zeta_w(x, y) e^{i\omega t} \right], \quad \zeta_w(x, y) = -\frac{i\omega}{g} \phi(x, y, 0) \quad (13)$$

この計算を行うために、まず  $f$  の関数として次式を考える。

$$\zeta_f = \frac{2i\omega}{g} m e^{-Kf} \left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + f^2}} - \frac{2K}{\pi} \int_0^\infty \frac{K \cos kf + k \sin kf}{K^2 + k^2} K_0(kR) dk - i\pi K e^{-Kf} H_0^{(2)}(KR) \right\} \quad (14)$$

無限噴水を仮定して、 $f$  に関して  $0 \sim \infty$  まで積分を実行する。このとき

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-Kf} \cos kf df &= \frac{K}{K^2 + k^2}, & \int_0^\infty e^{-Kf} \sin kf df &= \frac{k}{K^2 + k^2} \\ \int_0^\infty e^{-2Kf} df &= \frac{1}{2K} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

の積分公式を用いると、

$$\zeta_S \equiv \int_0^\infty \zeta_f df = \frac{2i\omega}{g} m \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-Kf}}{\sqrt{R^2 + f^2}} df - \frac{2K}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(kR)}{K^2 + k^2} dk - i\frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(KR) \right\} \quad (16)$$

さらに

$$K \int_0^\infty \frac{K_0(kR)}{K^2 + k^2} dk = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-Kv}}{\sqrt{R^2 + v^2}} dv \quad (17)$$

の関係式に注意すれば、(16)式の local wave の項はキャンセルしてなくなり、外方へ伝播する第2種ハンケル関数だけが残ることが解る。すなわち

$$\zeta_S = \frac{\omega}{g} m \pi H_0^{(2)}(KR) \quad (18)$$

$m$  の値として(10)式を代入し、さらに  $\xi$  に関して物体の存在範囲で積分する。入射波の項も含めて表せば

$$\zeta_D = \zeta_I + \zeta_S = \zeta_a \left[ e^{iKx} - \frac{K}{2} \int H_0^{(2)}(Kr) \frac{\partial y}{\partial \xi} e^{iK\xi} d\xi \right] \quad (19)$$

となる。ここで  $r^2 = (x - \xi)^2 + y^2$  である。

### 2.3 無限喫水の円筒物体に対する解析解

物体形状が半径  $a$  の垂直円筒である場合を考えよう。この時には物体表面での境界条件を厳密に満たす速度ポテンシャルの解析解を求めることができる。したがって、それを用いれば、周波数影響を考慮した圧力分布、線形流体力、さらには波漂流力を求めることができる。

円筒座標  $(r, \theta, z)$  を用いると、入射波の速度ポテンシャル(7)式のうち、

$$e^{iKx} = e^{iKr \cos \theta} = J_0(Kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(Kr) \cos n\theta \quad (20)$$

と表すことができる。これに対応する散乱 (scattering) ポテンシャルは、無限喫水では local wave の項が存在しないので、外方へ伝播する進行波成分だけ、すなわち第2種ハンケル関数を考えればよい。 $\theta$  方向の依存性は(20)式と同じ形のフーリエ級数を考えればよいので、

$$\phi_S = \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \left\{ b_0 H_0^{(2)}(Kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n b_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \right\} \quad (21)$$

ここで

$$b_n = -J'_n(Ka) / H_n^{(2)'}(Ka) \quad (22)$$

としておけば、物体表面境界条件(3)式、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_S}{\partial r} &= -\frac{\partial \phi_I}{\partial r} \quad \text{on } r = a \\ &= -\frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \left\{ J'_0(Ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J'_n(Ka) \cos n\theta \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

を満たすことが分かる。そこで diffraction ポテンシャル  $\phi_D = \phi_I + \phi_S$  は

$$\phi_D = \frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \left[ J_0(Kr) + b_0 H_0^{(2)}(Kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left\{ J_n(Kr) + b_n H_n^{(2)}(Kr) \right\} \cos n\theta \right] \quad (24)$$

と表すことができる。ただし  $b_n$  は(22)式で与えられる。

(24)式を用いて、まず最初に物体表面上 ( $r = a$ ) での波変位を求めてみよう。

$$\begin{aligned} \zeta_D &= -\frac{i\omega}{g} \phi_D(a, \theta, 0) \\ &= \zeta_a \left[ J_0(Ka) + b_0 H_0^{(2)}(Ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left\{ J_n(Ka) + b_n H_n^{(2)}(Ka) \right\} \cos n\theta \right] \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、ベッセル関数に対するロンスキー行列式として

$$J_n(Ka) H_n^{(2)'}(Ka) - J'_n(Ka) H_n^{(2)}(Ka) = \frac{-2i}{\pi Ka} \quad (26)$$

を用いると、次の式が得られる。

$$\zeta_D = \frac{2\zeta_a}{\pi Ka} \left( C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n C_n \cos n\theta \right) \quad (27)$$

ここで

$$C_n = \frac{-i}{H_n^{(2)'}(Ka)} = \frac{-i}{J_n'(Ka) - iY_n'(Ka)} = \frac{e^{-i\alpha_n}}{\sqrt{\{J_n'(Ka)\}^2 + \{Y_n'(Ka)\}^2}} \quad (28)$$

$$\text{where } \alpha_n = \tan^{-1} J_n'(Ka) / Y_n'(Ka) \quad (29)$$

これによる計算値は Havelock の論文に示されており、それを再掲すると Table 1 のようになる。入射波は  $x$  軸の負方向に伝播する場合を考えているので、 $\theta = 0$  が波上側 (pressure side) で、 $\theta = \pi$  が波下側 (suction side) である。

Table 1 Variation of wave amplitude along the surface of a circular cylinder  
Normalized with the incident-wave amplitude  $|\zeta_D/\zeta_a|$

$Ka \setminus \theta$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
0.5	1.44	1.28	0.97	0.91	1.00
1.0	1.71	1.62	1.16	0.68	0.82
3.0	1.92	1.75	1.35	0.82	0.62
5.0	1.96	1.86	1.36	0.64	0.48

次に線形流体力について考えよう。水面下  $z$  の位置での水平面において水平方向 ( $x$  軸の正方向) に働く surge の2次元波力  $f_1(z)$  を求めてみると、円筒では  $n_x = \cos \theta$  であるから

$$f_1(z) = - \int_0^{2\pi} p_D(a, \theta, z) \cos \theta a d\theta \quad (30)$$

で計算できる。ここで  $p_D$  は物体表面上での圧力であり、(27)式を用いると次のように与えられる。

$$p_D = -\rho i \omega \phi_D(a, \theta, z) = \rho g \zeta_D(a, \theta, z) e^{Kz} = \rho g \zeta_a \frac{2}{\pi Ka} e^{Kz} \left( C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n C_n \cos n\theta \right) \quad (31)$$

(30)式における  $\theta$  に関する積分は

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \theta d\theta = \pi \delta_{n1} \quad (32)$$

の結果を用いればよいので、(30) ~ (32)式より次式が得られる。

$$\frac{f_1(z)}{\rho g \zeta_a a} = \frac{2}{\pi Ka} e^{Kz} 2\pi (-i) C_1 \equiv \frac{4}{Ka} e^{Kz} \mathcal{A}(Ka) e^{-i(\alpha_1 + \pi/2)} \quad (33)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}(Ka) &= \left[ \{J_1'(Ka)\}^2 + \{Y_1'(Ka)\}^2 \right]^{-1/2} \\ \alpha_1 &= \tan^{-1} J_1'(Ka) / Y_1'(Ka) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

これは **McCamy & Fuchs の計算式**として用いられているものである。

円筒物体全体に働く水平方向の流体力は(33)式を  $z$  について積分すればよい。そこで

$$\int_{-\infty}^0 e^{Kz} dz = \frac{1}{K} \quad (35)$$

を用いると、次のように表すことができる。

$$\frac{F_1}{\rho g \zeta_a \pi a^2} = \frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(z)}{\rho g \zeta_a a} dz = \frac{4}{\pi (Ka)^2} \mathcal{A}(Ka) e^{-i(\alpha_1 + \pi/2)} \quad (36)$$

この式で  $Ka \rightarrow 0$  すなわち長波での漸近値を考えてみよう。

$$J_1'(Ka) \sim \frac{1}{2}, \quad Y_1'(Ka) \sim \frac{2}{\pi(Ka)^2} \quad \text{as } Ka \rightarrow 0 \quad (37)$$

であるから

$$\mathcal{A}(Ka) \sim \frac{\pi}{2}(Ka)^2, \quad \alpha_1 \sim 0 \quad (38)$$

となる。よって次の結果が得られる。

$$\frac{F_1}{\rho g \zeta_a \pi a^2} \sim \frac{4}{\pi(Ka)^2} \frac{\pi}{2} (Ka)^2 e^{-i\pi/2} = 2 e^{-i\pi/2} \quad \text{as } Ka \rightarrow 0 \quad (39)$$

一方,  $Ka \rightarrow \infty$  の短波長では

$$H_1^{(1)'}(Ka) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi Ka}} \left\{ +i - \frac{7}{8Ka} + \dots \right\} e^{i(Ka-3\pi/4)} \quad \text{as } Ka \rightarrow \infty \quad (40)$$

の近似式を(28)式の  $C_1$  に代入すれば次の結果が得られるであろう。

$$\mathcal{A}(Ka) \sim \sqrt{\frac{\pi Ka}{2}}, \quad \alpha_1 = -Ka + \frac{3}{4}\pi \quad (41)$$

よって次のような漸近値となることが分かる。

$$\frac{F_1}{\rho g \zeta_a \pi a^2} \sim \frac{2}{Ka} \sqrt{\frac{2}{\pi Ka}} e^{i(Ka-5\pi/4)} \quad \text{as } Ka \rightarrow \infty \quad (42)$$

## 2.4 波漂流力

無限喫水の円筒物体に働く波漂流力を物体表面での圧力積分の時間平均値から求めてみよう。これはいわゆる near-field method とされている計算方法であるが、得られる結果は far-field method による結果と同じになることが丸尾（参考論文[2]）によって示されている。

入射波振幅  $\zeta_a$  に関する2次の項までを考える。まず圧力は、時間項も含めて表すと、ベルヌーイの圧力方程式によって次式で与えられる。

$$P(\mathbf{x}, t) = -\rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \right) \quad (43)$$

入射波は  $x$  軸の負方向に進行していると考えているが、その方向すなわち  $-x$  方向に働く波漂流力を  $F_D$  と表すと

$$\begin{aligned} F_D &= \int_0^{2\pi} \cos \theta a d\theta \overline{\int_{-\infty}^{z_w} P(\mathbf{x}, t) dz} \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} a \cos \theta d\theta \left[ \int_{-\infty}^0 \overline{\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi} dz + \int_0^{z_w} \overline{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz \right\}} dz \right] \\ &= -\rho \int_0^{2\pi} a \cos \theta d\theta \left[ \int_{-\infty}^0 \overline{\frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi} dz - \frac{1}{2g} \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2}_{z=0} \right] + O(\Phi^3) \end{aligned} \quad (44)$$

と計算できる。ここで overbar は時間平均値を取ることを意味し、水面変位  $z_w$  は

$$z_w = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0}, \quad \Phi = \text{Re} \left[ \phi e^{i\omega t} \right] \quad (45)$$

と表している。 $z$  方向の依存性は  $e^{Kz}$  であるから、 $z$  に関する積分を先に実行すると次式を得る。

$$F_D = -\frac{\rho}{4K} \int_0^{2\pi} \overline{\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi} a \cos \theta d\theta + \frac{\rho}{2g} \int_0^{2\pi} \overline{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2} a \cos \theta d\theta \quad (46)$$

この式の計算では  $z=0$  での値を考えればよい。また  $\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi$  は物体表面境界条件を考慮すると、

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \quad (47)$$

のように計算すればよい。時間平均に関する計算公式

$$\overline{\operatorname{Re}[A e^{i\omega t}] \operatorname{Re}[B e^{i\omega t}]} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[A B^*] \quad (48)$$

を用いると（ただし  $B^*$  は複素振幅  $B$  の複素共役）、次式を得る。

$$F_D = -\frac{\rho}{8K} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - 2K^2 \phi \phi^* \right\}_{z=0} a \cos \theta d\theta \quad (49)$$

この計算に必要な速度ポテンシャル  $\phi$  は時間項  $e^{i\omega t}$  を除いたもので、 $r = a, z = 0$  での値であるから、(24) ~ (26)式によって

$$\phi = \frac{g\zeta_a}{\omega} (L + iM), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{g\zeta_a}{\omega} K (L + iM), \quad \frac{\partial \phi}{a\partial \theta} = \frac{g\zeta_a}{a\omega} (L' + iM') \quad (50)$$

ここで

$$L + iM = \frac{2}{\pi K a} \left( b_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta \right), \quad b_n = \frac{i^n}{H_n^{(2)'}(Ka)} \quad (51)$$

と表すことができるから

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} - 2K^2 \phi \phi^* = -g\zeta_a^2 K \left\{ L^2 + M^2 - \frac{1}{(Ka)^2} (L'^2 + M'^2) \right\} \quad (52)$$

となり、これを(49)式に代入すると、次式となる。

$$F_D = \frac{1}{8} \rho g \zeta_a^2 a \int_0^{2\pi} \left\{ L^2 + M^2 - \frac{1}{(Ka)^2} (L'^2 + M'^2) \right\} \cos \theta d\theta \quad (53)$$

(51)式より  $L^2 + M^2$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} L^2 + M^2 &= (L + iM)(L^* - iM^*) \\ &= \frac{4}{(\pi K a)^2} \left\{ b_0 b_0^* + 2b_0^* \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta + 2b_0 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^* \cos m\theta + 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta \sum_{m=1}^{\infty} b_m^* \cos m\theta \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

これを  $\theta$  について積分するとき、

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \theta d\theta = \pi \delta_{n1}, \quad \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \left\{ \delta_{m,n+1} + \delta_{m+1,n} \right\} \quad (55)$$

などによって次の結果を得る。

$$\int_0^{2\pi} (L^2 + M^2) \cos \theta d\theta = \frac{8}{\pi (Ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n b_{n+1}^* + b_n^* b_{n+1}) \quad (56)$$

次に(53)式の第2項に関しては

$$L' + iM' = \frac{2}{\pi K a} \left\{ -2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin n\theta \right\} \quad (57)$$

$$L'^2 + M'^2 = \left( \frac{4}{\pi K a} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n n \sin n\theta \sum_{m=1}^{\infty} b_m^* m \sin m\theta \quad (58)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \left\{ \delta_{m,n+1} + \delta_{m+1,n} \right\} \quad (59)$$

などによって次の結果を得る。

$$\int_0^{2\pi} (L'^2 + M'^2) \cos \theta d\theta = \frac{8}{\pi (Ka)^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) (b_n b_{n+1}^* + b_n^* b_{n+1}) \quad (60)$$

これらの結果を(53)式に代入すると次式が得られる。

$$F_D = \frac{\rho g \zeta_a^2 a}{\pi (Ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2} \right\} (b_n b_{n+1}^* + b_n^* b_{n+1}) \quad (61)$$

さらに(51)式より、次のような計算ができる。

$$b = \frac{i^n}{H_n^{(2)'}} \quad b_{n+1}^* = \frac{-i(-i)^n}{H_{n+1}^{(1)'}} \quad \rightarrow \quad b_n b_{n+1}^* = \frac{-i(J'_n + iY'_n)(J'_{n+1} - iY'_{n+1})}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (62)$$

$$b_n b_{n+1}^* + b_n^* b_{n+1} = 2\text{Re}(b_n b_{n+1}^*) = \frac{2\{J'_{n+1}Y'_n - J'_nY'_{n+1}\}}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (63)$$

さらに、ベッセル関数群の漸化式

$$Z'_{n+1} = Z_n - \frac{n+1}{Ka} Z_{n+1}, \quad Z'_n = -Z_{n+1} + \frac{n}{Ka} Z_n \quad (64)$$

とロンスキー行列式

$$J_n Y'_n - J'_n Y_n = J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1} = \frac{2}{\pi Ka} \quad (65)$$

を用いて(63)式の分子を変形すると

$$\begin{aligned} J'_{n+1} Y'_n - J'_n Y'_{n+1} &= J_n Y'_n - J'_n Y_n - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2} (J_{n+1} Y_n - J_n Y_{n+1}) \\ &= \frac{2}{\pi Ka} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2} \right\} \end{aligned} \quad (66)$$

となる。したがって(63)式の分子に代入した後、(61)式より

$$F_D = \rho g \zeta_a^2 a \frac{4}{\pi^2 (Ka)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{n(n+1)}{(Ka)^2} \right\}^2 \frac{1}{(J_n'^2 + Y_n'^2)(J_{n+1}'^2 + Y_{n+1}'^2)} \quad (67)$$

という波漂流力に関する解析解を得る。

この無限級数の  $Ka \rightarrow \infty$  (すなわち短波長の極限) での値は難しくてすぐには解らないが、Havelockの論文によると、 $\frac{1}{6}\pi^2(Ka)^3$  になるとのことである。したがって

$$F_D \simeq \frac{2}{3} \rho g \zeta_a^2 a \quad \text{as } Ka \rightarrow \infty \quad (68)$$

が得られる。この式は、短波長域における船舶の波浪中抵抗増加公式の基になっている。

Havelockの論文によれば、(68)式は次のように解釈できる。

$$F_D = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \rho g (\zeta_a \cos \theta)^2 \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 a \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \rho g \zeta_a^2 a \quad (69)$$

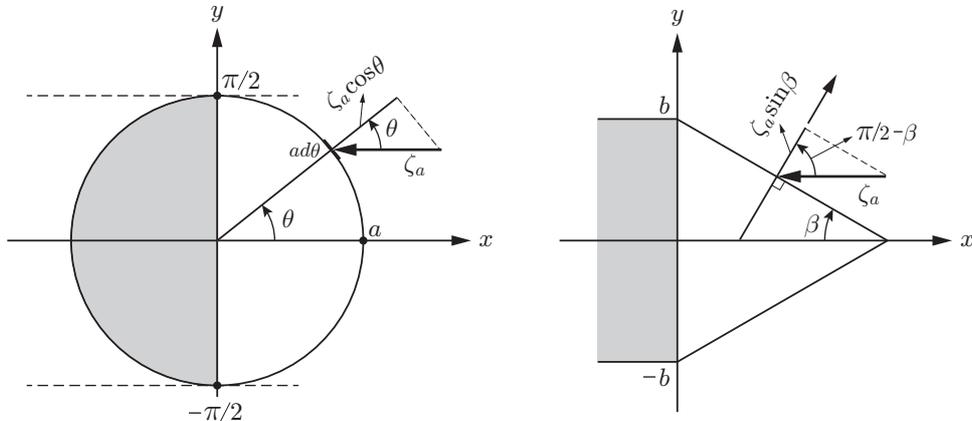


Fig.1 短波長域 ( $Ka \rightarrow \infty$ ) での波漂流力の計算

すなわち短波長域では、波の反射波は入射波にさらされている円柱の右側半分で起こり、陰部分となっている円柱の左側では起こらないと考える。さらに  $\theta$  の位置での微小線素  $ds = a d\theta$  に垂直な方向の波振幅が  $\zeta_a \cos \theta$  であると考え、 $n_x = \cos \theta$  であるから、(69)式のように  $\frac{1}{2} \rho g \zeta^2$  を  $dy = ds n_x$  方向に積分すればよいということである。

Fig.1 の右図のように、船首形状を模擬したくさび形の半角が  $\beta$  の場合には、円柱の  $\theta$  に相当する角度は  $\pi/2 - \beta$  であるから  $\cos(\pi/2 - \beta) = \sin \beta$  であり、したがって短波長域での波漂流力は

$$F_D = \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 \int_{-b}^b \sin^2 \beta dy \equiv \frac{1}{2} \rho g \zeta_a^2 B \overline{\sin^2 \beta} \quad \left. \vphantom{F_D} \right\} \quad (70)$$

ここで  $B = 2b, \quad \overline{\sin^2 \beta} \equiv \frac{1}{B} \int_{-b}^b \sin^2 \beta dy$

のように計算すれば、 $\beta$  の値が  $y$  方向に変化する場合でも近似値を求めることができる。(70)式は短波長域での抵抗増加計算公式として、藤井・高橋、Faltinsen、さらには最近では海上技術安全研究所による近似計算公式のベースとして用いられている。

## 2.5 積分方程式による無限喫水の円筒物体に対する解析解

無限喫水の円筒物体に対する散乱 (scattering) ポテンシャル  $\phi_S$  が(21)–(22) 式のように表されることは固有関数展開法によって示されているが、本節では別所の論文[3]に従い、積分方程式法 (特異点分布法) によっても同じ解析解が得られることを示しておこう。

既に 2.2 節で示したように、物体表面上のわき出し特異点の分布を

$$\sigma(x', y', z') = m(x', y') e^{Kz'}, \quad z' = -f < 0 \quad (71)$$

のように仮定し、単位強さのわき出しによる速度ポテンシャル (グリーン関数) との積において、 $f$  に関して  $0 \sim \infty$  まで積分した結果では local wave の項は存在せず、進行波成分だけが残ることが分かっている。

その結果を考慮して、速度ポテンシャル  $\phi_S(x, y, z)$  を物体表面上のわき出し特異点分布で表すと、 $z' (= -f)$  に関して積分した後の式として

$$\phi_S(x, y, z) = \pi i e^{Kz} \int_C m(x', y') H_0^{(2)}(KR) ds(x', y') \quad (72)$$

となることが了解できるであろう。ここで積分路  $C$  は円筒座標における  $r$ - $\theta$  面での物体境界であり、半径  $a$  の円筒の場合には  $ds = a d\theta$  と表される。また  $R$  は水平面内での  $P = (x, y)$  と  $Q = (x', y')$  との距離であり、

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - x')^2 + (y - y')^2 = (r \cos \theta - a \cos \theta')^2 + (r \sin \theta - a \sin \theta')^2 \\ &= r^2 - 2ra \cos(\theta - \theta') + a^2 \end{aligned} \quad (73)$$

と表すことができる。 $(x, y)$  も円筒表面上にある時は勿論  $r = a$  である。

速度ポテンシャルの  $z$  方向の依存性が  $e^{Kz}$  であることは(72) 式から明らかなので、以下の式では(8) 式のように  $\phi_S(x, y, z) \rightarrow \phi_S(x, y) e^{Kz}$  と表すことにし、 $x$ - $y$  面内での積分方程式を考えることにする。

さて、未知数  $m(x', y')$  に関する積分方程式を得るために(72) 式の法線微分を考えよう。 $H_0^{(2)}(KR)$  の特異性は、正則部分を  $\tilde{G}(KR)$  と表せば

$$H_0^{(2)}(KR) = J_0(KR) - iY_0(KR) = -i \frac{2}{\pi} \log R + \tilde{G}(KR) \quad (74)$$

のようになっているから、(72) 式より次式を得ることができる。

$$\frac{\partial \phi_S(P)}{\partial n_P} = 2\pi m(P) + \pi i \int_C m(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} H_0^{(2)}(KR) ds_Q \quad (75)$$

ここで左辺は、物体表面条件より ( $n_x = \cos \theta$  を用いると) 次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi_S(P)}{\partial n_P} = - \frac{\partial}{\partial n_P} \left\{ \frac{i g \zeta_a}{\omega} e^{iKx} \right\} = \zeta_a \omega \cos \theta e^{iKx} = \zeta_a \omega \cos \theta e^{iKa \cos \theta} \quad (76)$$

式表示を簡易化するために、以下のような記号を用いることにする.

$$m(P) \equiv \frac{\zeta_a \omega}{2\pi} M(P), \quad Ka \equiv \kappa \quad (77)$$

また円筒物体表面上では  $ds_Q = a d\theta'$  であり、次のような式変形ができる.

$$\left. \begin{aligned} KR &= \sqrt{2\kappa^2 \{1 - \cos(\theta - \theta')\}} = 2\kappa \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| \\ \frac{\partial}{\partial n_P} H_0^{(2)}(KR) &= -KH_1^{(2)}(KR) \frac{\partial R}{\partial n_P} \\ \frac{\partial R}{\partial n_P} &= n_x \frac{x - x'}{R} + n_y \frac{y - y'}{R} = \frac{a}{R} \{1 - \cos(\theta - \theta')\} = \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

これらを総合すると、(75) 式は次のように書き換えることができる.

$$\cos \theta e^{i\kappa \cos \theta} = M(\theta) - \frac{i\kappa}{2} \int_0^{2\pi} M(\theta') H_1^{(2)} \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| \right) \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| d\theta' \quad (79)$$

この積分方程式の解を解析的に求めることを考える. そこでまず特異点分布を

$$M(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (80)$$

のように、 $\theta$  に関して偶関数のフーリエ級数として表そう. これを(79) 式に代入し、

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta' H_1^{(2)} \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| \right) \left| \sin \frac{\theta - \theta'}{2} \right| d\theta' = -\cos n\theta \frac{\partial}{\partial \kappa} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)} \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\vartheta}{2} \right| \right) \cos n\vartheta d\vartheta \quad (81)$$

の計算を考える. ハンケル関数の加法定理

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)} \left( K \sqrt{r^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + r'^2} \right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(Kr') H_m^{(2)}(Kr) \cos m(\theta - \theta') \\ \epsilon_0 &= 1, \quad \epsilon_m = 2 \quad (m \geq 1), \quad \text{for } r \geq r' \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

において  $r = r' = a$ ,  $\theta' = 0$  の場合を考えると

$$H_0^{(2)} \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(\kappa) H_m^{(2)}(\kappa) \cos m\theta \quad (83)$$

であるから  $\cos n\theta$  を乗じて積分すると、次の結果を得ることができる.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\kappa) &\equiv \int_0^{2\pi} H_0^{(2)} \left( 2\kappa \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \right) \cos n\theta d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(\kappa) H_m^{(2)}(\kappa) \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 2\pi J_n(\kappa) H_n^{(2)}(\kappa) \end{aligned} \quad (84)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \kappa} \mathcal{I}(\kappa) &= \pi \left\{ J_n'(\kappa) H_n^{(2)}(\kappa) + J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa) \right\} \\ J_n'(\kappa) H_n^{(2)}(\kappa) - J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa) &= \frac{2i}{\pi \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\cos \theta e^{i\kappa \cos \theta} = -i \frac{\partial}{\partial \kappa} e^{i\kappa \cos \theta} = -i \frac{\partial}{\partial \kappa} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(\kappa) \cos n\theta \right\} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n'(\kappa) \cos n\theta \quad (86)$$

などの関係式を(79) 式に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} -i \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n'(\kappa) \cos n\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \left[ 1 + \frac{i\kappa}{2} \pi \left\{ \frac{2i}{\pi \kappa} + 2J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa) \right\} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \left\{ i\kappa \pi J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa) \right\} \end{aligned} \quad (87)$$

よって

$$A_n = -\frac{\epsilon_n i^n}{\kappa \pi} \frac{J'_n(\kappa)}{J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa)} \quad (88)$$

のようにわき出し特異点の強さを決定することができたので、これを(72)式に代入すれば、流場内での速度ポテンシャル  $\phi_S(x, y, z)$  を求めることができる。その計算は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \phi_S(P) &= \pi i e^{Kz} \frac{\zeta_a \omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{2\pi} \cos n\theta' H_0^{(2)}(KR) a d\theta' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{ig\zeta_a}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \frac{J'_n(\kappa)}{J_n(\kappa) H_n^{(2)'}(\kappa)} \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(KR) \cos n\theta' d\theta' \end{aligned} \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(KR) &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_m(Ka) H_m^{(2)}(Kr) \cos m(\theta - \theta') \\ \int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \theta') \cos n\theta' d\theta' &= \left( \frac{2\pi}{\epsilon_n} \cos n\theta \right) \delta_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

したがって

$$\phi_S(r, \theta, z) = -\frac{ig\zeta_a}{\omega} e^{Kz} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \frac{J'_n(Ka)}{H_n^{(2)'}(Ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \quad (91)$$

となるが、これは(21)–(22)式と同じ結果であることが分かる。

以上のように、積分方程式を解析的に解くことは結構複雑ではあるが、固有関数展開法による結果と同じになることを示すことができたことは重要である。

## 参考文献

- [3] 別所正利：固定筒体に及ぼす波の圧力に就いて，造船協会論文集，第101号，pp.1-9, 1957.