

船首反射を含む Diffraction 問題の直接解を用いた新ストリップ法 とそれを基にした波浪定常流体力の数値計算法

柏 木 正

関西設計 (株) 技術顧問，大阪大学・九州大学名誉教授

1. はじめに

ストリップ法は船体に働く流体力や波浪中での船体運動をはじめ，船舶耐航性能に関する実用計算法として 50 年以上に亘って用いられており，水波と浮体の相互作用に関する格好の入門的教材でもある．しかし波の散乱 (diffraction) 問題における scattering ポテンシャル，波浪強制力の計算方法には幾つかのバリエーションが在り，その違いによって NSM (New Strip Method), STF (Salvesen, Tuck, Faltinsen) 法などが知られている．これらの方法では scattering ポテンシャルに関する境界値問題を解く必要が無く，radiation ポテンシャルを使って近似計算することができる．しかし NSM による計算値は，特に斜波中において計算精度が良くないと指摘 [1] されており，また最近用いられることが多くなっている STF 法では，波浪強制力は精度良く計算できるものの圧力分布や散乱波の Kochin 関数を計算できないので，far-field method (丸尾理論) に基づいて波浪中抵抗増加などの波浪による定常流体力を計算することができない．これらのことと最近の計算機環境を考えれば，ストリップ法の理論的な枠内で diffraction 問題を直接解くことが推奨される．そこで本稿は，scattering ポテンシャルの直接解を用いたストリップ法 (Improved New Strip Method と称しておく) を再構成するために，必要な計算式やその数値計算法をまとめたものである．従来のように船体に働く流体力や波浪中での船体運動の計算だけに止まらず，新たに求める diffraction 問題での scattering ポテンシャルを用いた Kochin 関数の計算，ならびにそれらを使った波浪による定常流体力の計算法まで発展させて解説している．

ストリップ法に対する理論的な説明や船体横断面内での速度ポテンシャルに関する 2 次元境界値問題の解き方などは既に教科書 [2, 3] に記載されているので，詳細はそれらを参照することとし，新たな diffraction 問題の計算部分や従来の計算式を少しでも簡便に書くための再構成を中心として，また勉強会の教材と取り得ることを目標にこの解説ノートを用意する．

参考文献

- [1] 大松重雄，松井貞興：ストリップ法における Diffraction ポテンシャルの近似計算法の精度向上について，海上技術安全研究所報告，第19巻 第1号 (令和元年度) 研究報告，pp.79–89，2019.
- [2] 柏木 正，岩下英嗣：船体運動 耐航性能編 (船舶海洋工学シリーズ 4)，日本船舶海洋工学会監修，第 5 章 細長船に対するストリップ法，成山堂書店，2012.
- [3] 実践 浮体の流体力学 前編－動揺問題の数値計算法，(社) 日本造船学会 海洋工学委員会性能部会編，第 2 章 2 次元境界要素法 (p.19～)，成山堂書店，2003.

2. 速度ポテンシャルとその境界値問題

本稿では，船舶の波浪中での操縦運動の計算との連携や実際の数値計算コードに採用している座標系との関係から，船舶の進行方向に x 軸の正方向，右舷側に y 軸の正方向，鉛直下向きに z 軸の正方向を取った右手系のデカルト座標を用いることにする．Fig.1 に示すように，入射波を定義するために空間固定の座標系 $O_0-X_0Y_0Z_0$ を考え，それと β の角度をなす O_0-XYZ ，さらに X 軸方向に一定船速 U で移動する等速移動の慣性座標系 $o-xyz$ を用いる．耐航性理論では，この慣性座標系 $o-xyz$ で境界値問題や船体運動方程式を考えるが，操縦性理論では船体固定座標 $\bar{o}-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ で運動方程式を考えるので，必要に応じてこれらを使い分けることにする．

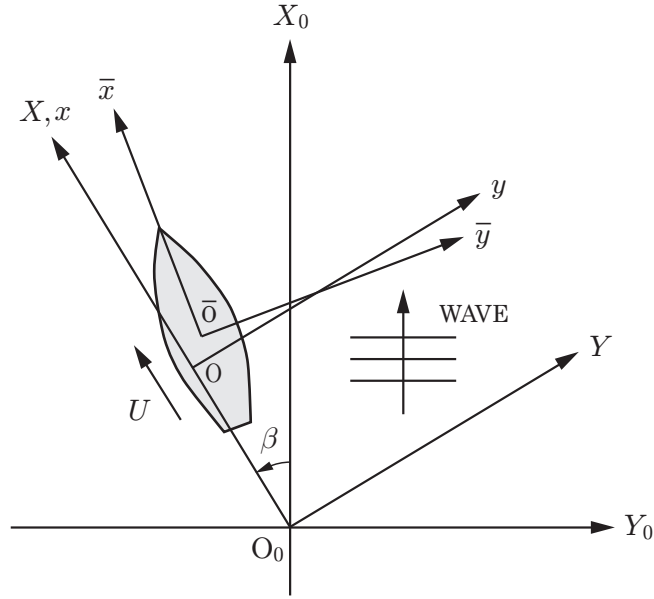


Fig.1 船舶の耐航性能計算に用いられるストリップ法における各種の座標系

2.1 入射波の速度ポテンシャル

入射波は Fig.1 に示すように、 X_0 軸の正方向へ伝播すると仮定している。 X_0 は

$$X_0 = X \cos \beta + Y \sin \beta = (x + Ut) \cos \beta + y \sin \beta \quad (1)$$

と表わされるので、入射波の速度ポテンシャルは等速移動の座標系 α - xyz で次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left\{ \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} e^{-k_0 z - ik_0 X_0} e^{i\omega_0 t} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} e^{-k_0 z - ik_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)} e^{i(\omega_0 - k_0 U \cos \beta) t} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} \phi_0(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで ζ_a, ω_0 は入射波のそれぞれ振幅、円周波数であり、 $k_0 = 2\pi/\lambda$ は波数、 g は重力加速度である。また等速移動座標での振動円周波数 ω は出会い円周波数と言われ、

$$\omega = \omega_0 - k_0 U \cos \beta, \quad k_0 = \frac{\omega_0^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

である。 $\cos \beta < 0$ の斜め向い波中では $\omega > \omega_0$ となり、 ω_0 と ω の関係は必ず唯一に定まるので問題はないが、 $\cos \beta > 0$ の斜め追い波中では船速 U と位相速度 $c = \omega_0/k_0$ の関係から $\omega = 0$ となることもあり、少し注意が必要 (Note 1 参照) である。

時間項 $e^{i\omega t}$ を除いた無次元の入射波速度ポテンシャル $\phi_0(\mathbf{x})$ を次のように表そう。

$$\phi_0(\mathbf{x}) = e^{-k_0 z - ik_0 (x \cos \beta + y \sin \beta)} \equiv \varphi_0(y, z) e^{i\ell x}, \quad \ell = -k_0 \cos \beta \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(y, z) &= e^{-k_0 z - ik_0 y \sin \beta} = \varphi_0^C(y, z) + \varphi_0^S(y, z) \\ \varphi_0^C &= e^{-k_0 z} \cos(k_0 y \sin \beta), \quad \varphi_0^S = -i e^{-k_0 z} \sin(k_0 y \sin \beta) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで φ_0^C, φ_0^S は y に関してそれぞれ偶関数、奇関数であり、船体は左右対称を前提として考えるので、 φ_0^C は左右対称な流場、 φ_0^S は左右反対称な流場を表すことになる。この対称性を考慮して、数値計算は船体の片舷 ($y > 0$) だけで考えることにする。

【Note 1】 出会い円周波数

入射波の円周波数 ω_0 は (3) 式のように波長 λ と 1 対 1 の関係があるが、出会い円周波数 ω は船速 U 、出会い角 β によって ω_0 とは異なる。 $\cos \beta < 0$ となる斜め向い波中では必ず $\omega > \omega_0$ となるが、 $\cos \beta > 0$ となる斜め追い波中では、同じ ω の値でも $U \cos \beta$ の値によって異なる ω_0 (波長 λ) が対応するので注意が必要である。

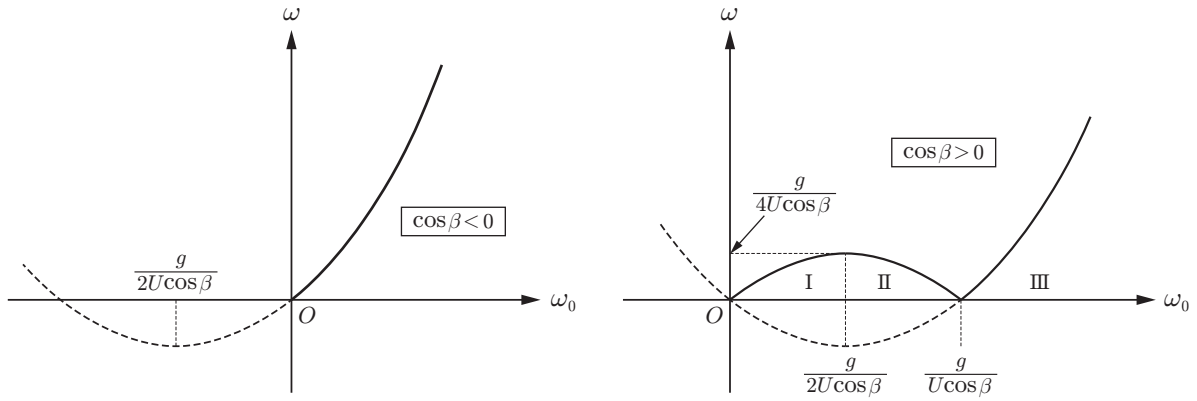


Fig. 2 入射波の円周波数 ω_0 と出会い円周波数 ω の関係

まず斜め向い波中 ($\cos \beta < 0$) では (3) 式より

$$\omega = -\frac{U}{g} \cos \beta \omega_0^2 + \omega_0 = \omega_0 \left(1 - \frac{U}{g} \cos \beta \omega_0 \right) \quad (\text{N.1})$$

$$= -\frac{U}{g} \cos \beta \left(\omega_0 - \frac{g}{2U \cos \beta} \right)^2 + \frac{g}{4U \cos \beta} \quad (\text{N.2})$$

となるので、 $\omega_0 > 0$ では ω が唯一に決まり、必ず $\omega > \omega_0$ となる。(N.1) 式を ω_0 に関する 2 次方程式として解くと、 ω から ω_0 を求める式として次式を得る。

$$\omega_0 = \omega \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\tau \cos \beta}}, \quad \tau = \frac{U\omega}{g} \quad (\text{N.3})$$

一方、 $\cos \beta > 0$ となる斜め追い波中では、(N.1) 式から $\omega = 0$ となるのは $\omega_0 = 0$ 以外に

$$\omega_0 = \frac{g}{U \cos \beta} \rightarrow U \cos \beta = \frac{g}{\omega_0} = c \text{ (位相速度)} \quad (\text{N.4})$$

の場合がある (Fig. 2 参照)。よって船速 $U \cos \beta$ が位相速度 c より遅い場合は (N.2) 式より上に凸の 2 次方程式であるから ω の値には上限値 ($g/4U \cos \beta$) が存在し、それを取るの

$$U \cos \beta = \frac{1}{2} \frac{g}{\omega_0} = \frac{1}{2} c = c_g \quad (\text{N.5})$$

すなわち $U \cos \beta$ が入射波の群速度に等しいときである。これらのことから、斜め追い波中では Fig. 2 に示すように、船速と位相速度・群速度との大小関係で I, II, III の領域を考えることになる。

領域 I は船速が遅く、 $0 < U \cos \beta < c_g$ のときで、 ω から ω_0 を求める式は (N.3) 式と同じであるが、 $\cos \beta > 0$ なので $\omega < \omega_0$ となる。領域 II では $c_g < U \cos \beta < c$ であり、入射波自体は船を追い越すが、波エネルギーの伝播速度である群速度 c_g は $U \cos \beta$ より小さく、このときの ω と ω_0 の関係式はもちろん $\omega < \omega_0$ であり、

$$\omega = \omega_0 - \frac{U}{g} \cos \beta \omega_0^2, \quad \omega_0 = \omega \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\tau \cos \beta}} \quad (\text{N.6})$$

によって計算できる。最後に領域 III では、船速 $U \cos \beta$ が入射波の位相速度 c より速いので船が波を追い越す状態となる。その場合でも $\omega > 0$ と定義するなら ω と ω_0 の関係式は (3) 式の右辺に絶対値を付けた形となり、

$$\omega = \frac{U}{g} \cos \beta \omega_0^2 - \omega_0, \quad \omega_0 = \omega \frac{2}{\sqrt{1 + 4\tau \cos \beta} - 1} \quad (\text{N.7})$$

として計算することになる。

ストリップ法では、振動円周波数である ω が相対的に高周波数、すなわち船体の細長比 $\epsilon = B/L$ を使うと $\omega = O(1/\sqrt{\epsilon})$ と仮定している理論なので、基本的には斜め向い波を想定していると考えべきであるが、実際には斜め追い波中に対しても (得られる結果の精度はともかく) 数値計算は破綻することなく可能である。

2.2 船体による攪乱速度ポテンシャルと境界条件

船体まわりの流場を表す速度ポテンシャルを次のように表す.

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = U[-x + \varphi_S(\mathbf{x})] + \text{Re} \left[\phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \right] \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} \left\{ \phi_0(\mathbf{x}) + \phi_7(\mathbf{x}) \right\} + \sum_{j=1}^6 i\omega X_j \phi_j(\mathbf{x}) = \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} \left[\phi_0(\mathbf{x}) + \phi_B(\mathbf{x}) \right] \\ \phi_B(\mathbf{x}) &= \phi_7(\mathbf{x}) - \frac{\omega\omega_0}{g} \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで $\phi_7(\mathbf{x})$ は **scattering** ポテンシャル, $\phi_j(\mathbf{x})$ ($j = 1 \sim 6$) は **radiation** ポテンシャルであり, (7) 式に示したようにこれらの線形和を $\phi_B(\mathbf{x})$ と表し, 船体による攪乱速度ポテンシャルと呼ぶことにする. Scattering ポテンシャル $\phi_7(\mathbf{x})$ は (4), (5) 式に示した入射波の速度ポテンシャル $\phi_0(\mathbf{x})$ に対応させ, 次のように船の左右での対称成分, 反対称成分を定義しておく.

$$\phi_7(\mathbf{x}) = \varphi_7(y, z) e^{i\ell x} = \left\{ \varphi_7^C(y, z) + \varphi_7^S(y, z) \right\} e^{i\ell x} \quad (8)$$

さて, 求めるべき速度ポテンシャル ϕ_j ($j = 1 \sim 7$) が満足すべき支配方程式であるラプラス方程式 [L] は, 細長船を仮定するので細長比パラメータを $\epsilon (= B/L$ または $d/L)$ として

$$[L] \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0 &\longrightarrow \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z^2} = 0 \\ O(\epsilon^2) \quad O(1) \quad O(1) \end{aligned} \quad (9)$$

のように, 横断面内での 2D ラプラス方程式で近似する.

次に自由表面条件 [F] では (6) 式中の定常攪乱ポテンシャル $\varphi_S(\mathbf{x})$ の影響は無視できるとして一様流れの項のみを考えると

$$[F] \quad \begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + K \phi_j + 2i\tau \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ O(1) \quad O(1) \quad O(\sqrt{\epsilon}) \quad O(\epsilon) \end{aligned} \quad (10)$$

となる. ここで $K = \omega^2/g$, $\tau = U\omega/g$, $K_0 = g/U^2$ であるが, $\omega = O(1/\sqrt{\epsilon})$, $U = O(1)$ の高周波数の仮定を用いると, leading term は

$$[F] \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + K \phi_j = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (11)$$

と近似できる. したがって scattering ポテンシャル ϕ_7 も (11) 式を満たすように求めることになるが, ここで注意しておくべきことは, 入射波の速度ポテンシャル ϕ_0 は, (4) 式から確かめられるように, (11) 式ではなく (10) 式を満たしている.

続いて船体表面での境界条件 [H] であるが, 3次元線形理論では次式のように与えられることが知られている [2].

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^6 X_j (i\omega n_j + U m_j) = \sum_{j=1}^6 i\omega X_j \left(n_j + \frac{U}{i\omega} m_j \right) \quad (12)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} (n_1, n_2, n_3) &= (n_x, n_y, n_z) = \mathbf{n}, \quad (n_4, n_5, n_6) = \mathbf{x} \times \mathbf{n} \\ (m_1, m_2, m_3) &= -(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \quad (m_4, m_5, m_6) = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) (\mathbf{x} \times \mathbf{V}) \\ \mathbf{V} &= \nabla[-x + \varphi_S(\mathbf{x})] \simeq (-1, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

よって (7) 式を代入すると, $\phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1 \sim 7$ が満たすべき条件式は

$$[H]_D \quad \frac{\partial}{\partial n} \{ \phi_0 + \phi_7 \} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \phi_7}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (14)$$

$$[H]_R \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j + \frac{U}{i\omega} m_j \quad (j = 1 \sim 6) \quad (15)$$

となる．細長船の仮定を導入すると (13) 式は以下のように近似できる．

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= O(\epsilon), \quad n_2 = (1), \quad n_3 = O(1) \\ n_4 &= y n_3 - z n_2 = O(\epsilon) \\ n_5 &= z n_1 - x n_3 \simeq -x n_3 = O(1) \\ n_6 &= x n_2 - y n_1 \simeq +x n_2 = O(1) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$m_j = 0 \quad (j = 1 \sim 4), \quad m_5 \simeq +n_3, \quad m_6 \simeq -n_2 \quad (17)$$

と近似できる． n_1, n_4 は $O(\epsilon)$ ではあるが，実用的観点からこれらの寄与を残して考えると，(12) 式は

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^4 i\omega X_j n_j - i\omega X_5 \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_3 + i\omega X_6 \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_2 \equiv \sum_{j=1}^6 i\omega X_j n_j^+ \quad (18)$$

のように表すことができる．ここで

$$\left. \begin{aligned} n_j^+ &= n_j \quad (j = 1 \sim 4) \\ n_5^+ &= -\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_3, \quad n_6^+ = +\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

これらと (7) 式から $j = 1 \sim 4$ に対しては 2 次元横断面内で計算される 2 次元解 ϕ_j をそのまま用いれば良く， $j = 5$ (pitch)， $j = 6$ (yaw) の radiation ポテンシャルは (19) 式の関係から

$$\phi_5 = -\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \phi_3, \quad \phi_6 = +\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \phi_2 \quad (20)$$

として与えられることが分かる．

本稿での開発テーマである scattering ポテンシャル ϕ_7 の船体表面境界条件は (14) 式であるが，(4) 式を代入すると次式が得られる．

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} = k_0 \left\{ i n_y \sin \beta + (n_z + i n_x \cos \beta) \right\} \varphi_0(y, z) e^{i\ell x} \quad (21)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_7}{\partial n} &= k_0 \left\{ i n_y \sin \beta + \tilde{n}_z \right\} e^{-k_0 z - i k_0 y \sin \beta} \\ \text{where} \quad \tilde{n}_z &\equiv n_z + i n_x \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

であるが，船体の中心面に関して左右対称，反対称成分を別々に計算するので，(5) 式，(8) 式より以下のように表すことができる．

$$\varphi_7(y, z) = \varphi_7^C(y, z) + \varphi_7^S(y, z) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_7^C}{\partial n} &= k_0 e^{-k_0 z} \left[n_y \sin \beta \sin(k_0 y \sin \beta) + \tilde{n}_z \cos(k_0 y \sin \beta) \right] \\ \frac{\partial \varphi_7^S}{\partial n} &= i k_0 e^{-k_0 z} \left[n_y \sin \beta \cos(k_0 y \sin \beta) - \tilde{n}_z \sin(k_0 y \sin \beta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ところで従来の NSM では， ϕ_7 を radiation ポテンシャルの組み合わせで近似的に置き換えるために，(21) 式あるいは (22) 式の船体表面条件における (y, z) の依存性を無くし，何らかの代表値で近似する必要がある．最も大胆な近似は $y = 0, z = z_s$ での値で $\varphi_0(y, z)$ を計算することであり，このとき

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} \simeq k_0 \left\{ (i \cos \beta) n_x + (i \sin \beta) n_y + n_z \right\} e^{-k_0 z_s} e^{i\ell x} \quad (25)$$

となるから， ϕ_7 と radiation ポテンシャル ϕ_j が満たす他の境界条件が同じだとすれば，直ちに

$$\phi_7 = k_0 c_\beta \left\{ i \cos \beta \phi_1 + i \sin \beta \phi_2 + \phi_3 \right\} e^{-k_0 z_s} e^{i\ell x} \quad (26)$$

と求めることができる．ただし，ここでは $c_\beta = 1$ であり，代表値 z_s の値は $z_s = A(x)/B(x)$ の値とする．(ここで $A(x), B(x)$ はそれぞれ横断面の面積， $z = 0$ での幅である．) ϕ_2 に対しては $z_s = d/2$ とする考え方も従来は在ったが，厳密解と比較すると，全てのモードで $z_s = A(x)/B(x)$ とする方が良さそうである．

一方, y の代表値は $y = 0$ とはせず, $e^{-ik_0 y \sin \beta}$ の幅方向の平均値

$$\frac{1}{2b} \int_{-b}^b e^{-ik_0 y \sin \beta} dy = \frac{\sin(k_0 b \sin \beta)}{k_0 b \sin \beta} \equiv c_\beta \quad (27)$$

とする方法もある. (ここで $b = B(x)/2$ である.) いずれにしても NSM では近似的にはあるが ϕ_7 が求められるので, それによって圧力分布や散乱波の複素振幅 (Kochin関数) を radiation ポテンシャルを使って計算できるというメリットがある.

(25) 式の ϕ_1 と ϕ_3 は左右対称成分, ϕ_2 は反対称成分であるので,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_7^C &= k_0 c_\beta \{ i \cos \beta \phi_1 + \phi_3 \} e^{-k_0 z_s} \\ \varphi_7^S &= k_0 c_\beta \{ i \sin \beta \phi_2 \} e^{-k_0 z_s} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と表すことができることも容易に理解できる.

3. 積分方程式法による 2 次元境界値問題の数値計算法

船体の横断面内 (y - z 平面) における 2 次元境界値問題の数値解法として, 自由表面グリーン関数 $G(\mathbf{P}; \mathbf{Q})$ を核関数として用いる積分方程式法が任意断面形状に対して比較的容易に適用できる. 境界条件を課す計算領域内 (物体表面上) での点を $\mathbf{P} = (y, z)$, 積分点を $\mathbf{Q} = (\xi, \eta)$ と表すと, 未知数である物体表面上 (S_H) での速度ポテンシャル ϕ に関する積分方程式は次式で与えられる.

$$\pi \phi(\mathbf{P}) + \int_{S_H} \phi(\mathbf{Q}) \frac{\partial}{\partial n_Q} G(\mathbf{P}; \mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}) = \int_{S_H} \frac{\partial \phi(\mathbf{Q})}{\partial n_Q} G(\mathbf{P}; \mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}) \quad (29)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} G(\mathbf{P}; \mathbf{Q}) &= \log R - \log R_1 - 2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z+\zeta)} \cos k(y-\eta)}{k - (K - i\mu)} dk \\ R &= \sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \\ R_1 &= \sqrt{(y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

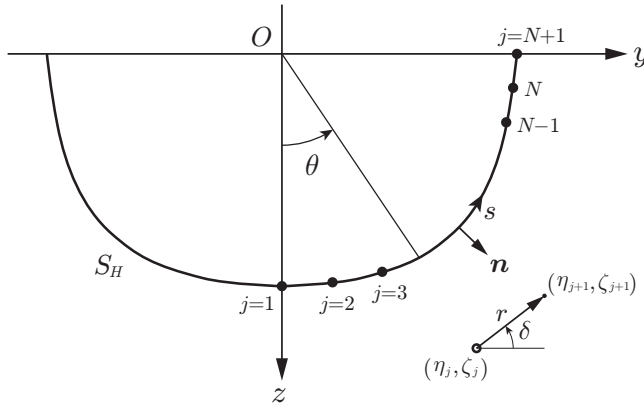


Fig. 3 船体横断面内での離散化と数値解法

(29) 式の積分方程式の数値解法として **コンスタントパネル法** を用いる. Fig. 3 に示すように, 船体横断面内の 2 次元表面を N 分割し, 各パネル (セグメント) 上では $\phi(\mathbf{Q})$ の値は一定値と仮定する. 船体は左右対称を前提としているので, パネル分割は $y > 0$ だけ (積分範囲は没水部分のすべて) とし, $(y, z) = (0, d)$ の最下端から $(y, z) = (b, 0)$ まで反時計回りに $j = 1 \sim N+1$ の節点番号を付ける. パネル番号は $i = 1 \sim N$ を考えれば, N 個の連立方程式が得られるはずである. それを次のように表す.

$$\pi \phi(\mathbf{P}_i) + \sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{P}_j) \mathcal{D}_{ij} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \mathcal{S}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (31)$$

ここで

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n_Q} G(\mathbf{P}_i; \mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}), \quad \mathcal{S}_{ij} = \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{P}_i; \mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}) \quad (32)$$

各セグメントは直線であるから, Fig. 3 のように (η_j, ζ_j) に原点をとる局所極座標 $r e^{i\delta}$ を考えれば,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_j + r \cos \delta, & \cos \delta &= \frac{1}{D} (\eta_{j+1} - \eta_j) > 0 \\ \zeta &= \zeta_j + r \sin \delta, & \sin \delta &= \frac{1}{D} (\zeta_{j+1} - \zeta_j) < 0 \\ D &= \sqrt{(\eta_{j+1} - \eta_j)^2 + (\zeta_{j+1} - \zeta_j)^2}, & n_y &= -\sin \delta, \quad n_z = \cos \delta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

と表すことができ、 δ は一定であり、積分は r に関して $r: 0 \rightarrow D$ で行うことになる。

Fig. 3 の座標系で 2 次元法線ベクトル $\mathbf{n} = (n_y, n_z)$ の正方向は浮体表面から外向き（流体方向）としているので、本来の線積分方向（ s 方向）は時計回りのはずである。したがって、後で述べるように共役関数を用いた計算を行う場合には、Fig. 3 は本来の積分方向と逆になっていることに注意する必要がある。

各セグメント (Γ_j) 上での (32) 式の解析積分結果は参考文献 [3] に示されているが、積分方向に注意すると次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_{ij} &= (1 - \delta_{ij}) \mathcal{T}_j(y, z) - \mathcal{T}_j(y, -z) + 2 \left[F_S(y - \eta, z + \zeta) \right]_j^{j+1} \\ \mathcal{S}_{ij} &= \mathcal{L}_j(y, z) - \mathcal{L}_j(y, -z) - 2 \widehat{S}_j(y, z) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ここで

$$\mathcal{T}_j(y, z) = \frac{(y - \eta_j) \sin \delta - (z - \zeta_j) \cos \delta}{|(y - \eta_j) \sin \delta - (z - \zeta_j) \cos \delta|} \left[\tan^{-1} \frac{(y - \eta) \cos \delta + (z - \zeta) \sin \delta}{|(y - \eta_j) \sin \delta - (z - \zeta_j) \cos \delta|} \right]_j^{j+1} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(y, z) &= - \left[\left\{ (y - \eta) \cos \delta + (z - \zeta) \sin \delta \right\} \log \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \right]_j^{j+1} \\ &\quad - |(y - \eta_j) \sin \delta - (z - \zeta_j) \cos \delta| \cdot \left[\tan^{-1} \frac{(y - \eta) \cos \delta + (z - \zeta) \sin \delta}{|(y - \eta_j) \sin \delta - (z - \zeta_j) \cos \delta|} \right]_j^{j+1} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \widehat{S}_j(y, z) &= - \frac{1}{K} \left[\sin \delta \log \sqrt{(y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2} + \cos \delta \tan^{-1} \frac{z + \zeta}{y - \eta} \right]_j^{j+1} \\ &\quad - \frac{1}{K} \left[\sin \delta F_C(y - \eta, z + \zeta) - \cos \delta F_S(y - \eta, z + \zeta) \right]_j^{j+1} \end{aligned} \quad (37)$$

$$F_C(y - \eta, z + \zeta) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z+\zeta)} \cos k(y - \eta)}{k - (K - i\mu)} dk = \operatorname{Re} \left[e^{-KZ} E_1(-KZ) \right] - \pi i e^{-KZ} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} F_S(y - \eta, z + \zeta) &= - \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z+\zeta)} \sin k(y - \eta)}{k - (K - i\mu)} dk \\ &= \operatorname{sgn}(y - \eta) \left\{ \operatorname{Im} \left[e^{-KZ} E_1(-KZ) \right] - \pi e^{-KZ} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$E_1(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad Z \equiv (z + \zeta) + i|y - \eta| \quad (40)$$

上式中の $E_1(-KZ)$ は複素数を変数とする積分指数関数であり、その数値計算法は既に確立されている。

(31) 式の数値計算では、ある特別な周波数（irregular frequency という）で行列式の値が丁度ゼロとなって解が求められないことが起こる。それを解消するために、点 P を浮体内部の自由表面上に数点考える方法が用いられるが、その計算法の詳細は参考文献 [3] に示されているので、ここでは省略する。

ところで (33) 式を用いて解析的に計算できる各セグメント上の積分として、後で流体力や Kochin 関数の計算で必要となる計算公式を以下に示しておく。

$$e_j(K) \equiv \int_{\Gamma_j} \frac{\partial}{\partial n} e^{-K\zeta + iK\eta} ds = i \left[e^{-K\zeta + iK\eta} \right]_j^{j+1} \equiv e_j^C + i e_j^S \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} f_j(a, b) &\equiv \int_{\Gamma_j} e^{-a\zeta + ib\eta} ds = \frac{1}{w} \left[e^{-a\zeta + ib\eta} \right]_j^{j+1} \equiv f_j^C + i f_j^S \\ w &\equiv -a \sin \delta + ib \cos \delta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

さらにモーメントの計算に関係して、次の計算公式を用いることもあろう。

$$g_j(a, b) \equiv \int_{\Gamma_j} \eta e^{-a\zeta + ib\eta} ds = \left[\left(\frac{\eta}{w} - \frac{\cos \delta}{w^2} \right) e^{-a\zeta + ib\eta} \right]_j^{j+1} \equiv g_j^C + i g_j^S \quad (43)$$

$$h_j(a, b) \equiv \int_{\Gamma_j} \zeta e^{-a\zeta + ib\eta} ds = \left[\left(\frac{\zeta}{w} - \frac{\sin \delta}{w^2} \right) e^{-a\zeta + ib\eta} \right]_j^{j+1} \equiv h_j^C + i h_j^S \quad (44)$$

4. 流体力の計算

4.1 変動圧力

線形化されたベルヌーイの圧力方程式から計算される非定常圧力は、定常攪乱ポテンシャルの影響を省略すると、次のように表すことができる [2].

$$\left. \begin{aligned} P(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re} \left[p(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \right] \\ p(\mathbf{x}) &= p_D(\mathbf{x}) + p_R(\mathbf{x}) + p_S(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ここで

$$p_D(\mathbf{x}) = -\rho \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{g\zeta_a}{i\omega_0} \left\{ \phi_0(\mathbf{x}) + \phi_7(\mathbf{x}) \right\} \quad (46)$$

$$p_R(\mathbf{x}) = -\rho \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_{k=1}^6 i\omega X_k \phi_k(\mathbf{x}) \quad (47)$$

$$p_S(\mathbf{x}) = \rho g (X_3 + yX_4 - xX_5) \quad (48)$$

4.2 Radiation 流体力

まず (47) 式の $p_R(\mathbf{x})$ に法線ベクトルの j 方向成分を掛けて浮体表面で積分すると、 j 方向に働く radiation 流体力 (付加質量 a_{jk} と造波減衰力 b_{jk}) が次のように求められる.

$$F_j^R = - \iint_{S_B} p_R(\mathbf{x}) n_j dS = - \sum_{k=1}^6 \left\{ (i\omega)^2 a_{jk} + i\omega b_{jk} \right\} X_k \equiv \sum_{k=1}^6 T_{jk} X_k \quad (49)$$

ここで

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \rho i\omega \iint_{S_B} n_j \left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_k dS \\ &= \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k n_j dS - \rho i\omega U \iint_{S_B} n_j \frac{\partial \phi_k}{\partial x} dS \\ &= \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k n_j dS + \rho i\omega U \iint_{S_B} \phi_k \frac{\partial n_j}{\partial x} dS \end{aligned} \quad (50)$$

最後の式は、部分積分を用い、船首尾の端は完全に閉じていると考えて積分済みの項をゼロとすることで得られている. 細長船理論では、(16) 式より

$$\frac{\partial n_j}{\partial x} \simeq 0 \quad (j = 1 \sim 4), \quad \frac{\partial n_5}{\partial x} \simeq -n_3, \quad \frac{\partial n_6}{\partial x} \simeq +n_2 \quad (51)$$

と近似できるので、(50) 式の最後の項が寄与するのは $j = 5$ の pitch と $j = 6$ の yaw のみである.

これを次のように表そう.

$$T_{jk} = \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k n_j dS + \left[-\rho i\omega U \iint_{S_B} \phi_k n_3 dS \right] \delta_{j5} + \left[+\rho i\omega U \iint_{S_B} \phi_k n_2 dS \right] \delta_{j6} \quad (52)$$

さらに (16) 式から $n_5 \simeq -xn_3$, $n_6 \simeq +xn_2$ であるから

$$\left. \begin{aligned} j=5 &\rightarrow -xn_3 - \frac{U}{i\omega} n_3 = - \left(x + \frac{U}{i\omega} \right) n_3 \equiv n_5^- \\ j=6 &\rightarrow +xn_2 + \frac{U}{i\omega} n_2 = + \left(x + \frac{U}{i\omega} \right) n_2 \equiv n_6^- \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

のように新たに n_5^- , n_6^- を定義する ($j = 1 \sim 4$ に対しては $n_j^- = n_j$) と (52) 式は

$$T_{jk} = \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k n_j^- dS = \rho (i\omega)^2 \int_L dx \int_{S_H} \phi_k n_j^- ds \quad (54)$$

のように表すことができる. (53) 式で定義した n_5^- , n_6^- は、実は (19) 式の n_5^+ , n_6^+ において一様流れ U の符号を逆にした **逆流 (reverse flow) 問題**での物体表面条件に関係しており、それは (50) 式で示したように、部分積分によって得られたものであることに留意しよう.

本来の順流れ問題（必要であれば関係する物理量の肩符に+を付けて明示する）における pitch, yaw の物体表面条件は既に (19) 式で示したように

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_5^+}{\partial n} &= -\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_3 \equiv n_5^+ \\ \frac{\partial \phi_6^+}{\partial n} &= +\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) n_2 \equiv n_6^+ \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left. \begin{aligned} \phi_5^+ &= -\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \phi_3 \\ \phi_6^+ &= +\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

と表されるので、その結果、上に示すように ϕ_5^+ , ϕ_6^+ はそれぞれ ϕ_3 , ϕ_2 を用いて求めることができた。

逆流れ問題は U の符号を逆にしたものであるから、そのときの解を ϕ_5^- , ϕ_6^- と表すと、(55) 式に対応する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_5^-}{\partial n} &= -\left(x + \frac{U}{i\omega}\right) n_3 \equiv n_5^- \\ \frac{\partial \phi_6^-}{\partial n} &= +\left(x + \frac{U}{i\omega}\right) n_2 \equiv n_6^- \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

と書くことができるので、(49)式、(54)式より 3次元の radiation 流体力は

$$a_{jk} + \frac{1}{i\omega} b_{jk} = -\frac{T_{jk}}{(i\omega)^2} = -\rho \iint_{S_B} \phi_k^+ n_j^- dS = -\rho \iint_{S_B} \phi_k^+ \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} dS \quad (57)$$

のように表すことができることになる。

このことから j と k を逆にした連成流体力 T_{jk} と T_{kj} の関係は、前進速度が有る場合には単純な対称関係 $T_{jk} = T_{kj}$ （これは $U = 0$ のときには成り立つ）ではなく、順流れと逆流れの関係を考えなければならず、具体的にはグリーンの公式を適用することによって $T_{jk}^+ = T_{kj}^-$ の関係が成り立つことが証明される。これは **ティムマン・ニューマン (Timman-Newman) の関係** として知られているが、ストリップ法ではその関係を陽な形で示すことができる。具体的には (54)-(57) 式より

$$\left. \begin{aligned} T_{j5} &= -(i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_3 n_j ds \quad (j = 1, 3) \\ T_{5k} &= -(i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_k n_3 ds \quad (k = 1, 3) \\ T_{55} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_3 n_3 ds \\ T_{j6} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_2 n_j ds \quad (j = 2, 4) \\ T_{6k} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_k n_2 ds \quad (k = 2, 4) \\ T_{66} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_2 n_2 ds \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{j6} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_2 n_j ds \quad (j = 2, 4) \\ T_{6k} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_k n_2 ds \quad (k = 2, 4) \\ T_{66} &= (i\omega)^2 \rho \int_L dx \left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \left(x + \frac{U}{i\omega}\right) \int_{S_H} \phi_2 n_2 ds \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

であり、それ以外のモード $j, k = 1 \sim 4$ では

$$T_{jk} = (i\omega)^2 \rho \int_L dx \int_{S_H} \phi_k n_j ds \quad \left\{ \begin{array}{l} j, k = 1, 3 \\ j, k = 2, 4 \end{array} \right\} \quad (60)$$

と表されるので、出会い円周波数 ω の計算に U の影響が入っていることを除けば、船体表面上での積分には、見掛け上前進速度 U の影響は陽な形で現れないということが分かる。

前進速度が有る場合の変動圧力の式に定常攪乱ポテンシャル $\varphi_S(\mathbf{x})$ の影響も考慮した船体表面での流速 $U\mathbf{V} = U\nabla[-x + \varphi_S(\mathbf{x})]$ を用いて流体力の計算を行う場合には、

$$\left(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi_j \longrightarrow \left(i\omega + U\mathbf{V} \cdot \nabla\right) \phi_j$$

としなければならないが、このときの部分積分に相当する式変形は、実は **Tuck の定理** (Note 2 参照) として知られているものである。Tuck の定理を適用した後に $\varphi_S(\mathbf{x})$ の影響項をゼロとした m -term の近似式である (17) 式を代入しても (53)–(54) 式と同じ結果が得られる。

【Note 2】Tuck の定理と逆流問題

Tuck の定理とは、流体力の計算における非定常速度ポテンシャルの微分 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi_j$ を計算しなくても良いように、Rational Strip Theory [4] の中で E.O. Tuck によって示された巧妙な式変形であり、次に示すストークスの定理を基にして証明される。

$$\left. \begin{aligned} \iint_{S_B} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \phi \mathbf{V} dS &= \oint_{C_B} d\mathbf{r} \times \phi \mathbf{V} \\ \iint_{S_B} [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \phi \mathbf{V}] \times \mathbf{x} dS &= \oint_{C_B} (d\mathbf{r} \times \phi \mathbf{V}) \times \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{N.8})$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \phi \mathbf{V} &= \phi(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \mathbf{n}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi = -m_j\phi - n_j(\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi \\ [(\mathbf{n} \times \nabla) \times \phi \mathbf{V}] \times \mathbf{x} &= -\phi(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{x} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{x} \times \mathbf{n})(\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi = m_{j+3}\phi + n_{j+3}(\mathbf{n} \cdot \nabla)\phi \\ d\mathbf{r} \times \phi \mathbf{V} &\simeq n_j\phi(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3) dl, \quad (d\mathbf{r} \times \phi \mathbf{V}) \times \mathbf{x} \simeq -n_{j+3}\phi(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3) dl \end{aligned} \right\} \quad (\text{N.9})$$

のようにベクトルの式変形ができ、水線面での線積分は $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3 \simeq 0$ であることから無視できると考えられる。そうすると (N.9) 式の関係から $j = 1 \sim 6$ のすべてに対して

$$\iint_{S_B} n_j(\mathbf{V} \cdot \nabla)\phi dS = -\iint_{S_B} m_j\phi dS \quad (j = 1 \sim 6) \quad (\text{N.10})$$

の関係式が成り立つので、(50) 式の一般化として次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} T_{jk} &= \rho i \omega \iint_{S_B} n_j (i\omega + U\mathbf{V} \cdot \nabla) \phi_k dS = \rho i \omega \iint_{S_B} \phi_k (i\omega n_j - U m_j) dS \\ &= \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k \left(n_j - \frac{U}{i\omega} m_j \right) dS \equiv \rho (i\omega)^2 \iint_{S_B} \phi_k^+ n_j^- dS \end{aligned} \quad (\text{N.11})$$

ここで

$$n_j^- \equiv n_j - \frac{U}{i\omega} m_j \quad (\text{N.12})$$

であるが、細長体の仮定によって (17) 式の近似を使うなら

$$\left. \begin{aligned} n_j^- &= n_j \quad (j = 1 \sim 4) \\ n_5^- &= -\left(x + \frac{U}{i\omega}\right) n_3, \quad n_6^- = +\left(x + \frac{U}{i\omega}\right) n_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{N.13})$$

と表すことができる。これは部分積分を用いて説明した (53) 式と同じである。

Tuck の定理を適用するに際しての注意点は、式変形の過程で定常攪乱流れに対して物体表面境界条件 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ が用いられているということである。最初から定常攪乱ポテンシャル $\varphi_S(\mathbf{x})$ を省略して $\mathbf{V} = -\mathbf{e}_1$ と近似してしまうと $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -n_1 \neq 0$ となり、厳密には (N.10) 式が成り立たないことになってしまう。もっとも細長船近似を前提とすれば $n_1 = O(\epsilon)$ であるから、 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \simeq 0$ であると言えなくもない。

ところで (58)–(60) 式における 2 次元横断面内 S_H 上での計算は、2 次元付加質量 A_{jk} 、造波減衰力係数 B_{jk} を用いて次のように表される。

$$-\rho \int_{S_H} \phi_k n_j ds = A_{jk} + \frac{1}{i\omega} B_{jk} \quad (i, j = 1 \sim 4) \quad (\text{61})$$

実際の計算プログラムでは、流体力の計算も無次元で行われる。船体の長さを L 、型幅を B として $a = L/2$ 、 $b = B/2$ を無次元化に用いると、(61) 式で示した 2 次元流体力は、 $i, j = 1 \sim 4$ として以下のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{jk}}{\rho b^2 \epsilon_j \epsilon_k} - i \frac{B_{jk}}{\rho \omega b^2 \epsilon_j \epsilon_k} &\equiv A'_{jk} - i B'_{jk} = -\int_{S_H} \phi_k n_j ds \\ \epsilon_j &= 1 \text{ for } j = 1 \sim 3, \quad \epsilon_4 = b \end{aligned} \right\} \quad (\text{62})$$

これを x 軸方向に積分した 3 次元流体力は, $i, j = 1 \sim 6$ として次のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{jk}}{\rho ab^2 \epsilon_j \epsilon_k} - i \frac{b_{jk}}{\rho \omega ab^2 \epsilon_j \epsilon_k} &\equiv a'_{jk} - i b'_{jk} = - \int_L dx \int_{S_H} \phi_k^+ n_j^- ds \\ \epsilon_j &= 1 \text{ for } j = 1 \sim 3, \quad \epsilon_4 = b, \quad \epsilon_5 = \epsilon_6 = a \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

4.3 Diffraction 流体力 (波浪強制力)

次に (46) 式の $p_D(\mathbf{x})$ の積分によって得られる流体力を考える. これは浮体の動揺変位には関係しないので, 運動方程式の右辺として考慮される波浪強制力である. j 方向に働く流体力を E_j と表すと

$$\begin{aligned} E_j &= - \iint_{S_B} p_D(\mathbf{x}) n_j dS = \rho \frac{g \zeta_a}{i \omega_0} \iint_{S_B} n_j \left(i \omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ \phi_0 + \phi_7 \} dS \\ &\equiv E_j^{FK} + E_j^{SC} \end{aligned} \quad (64)$$

となる. 上式のうち, (4) 式で与えられる入射波ポテンシャル ϕ_0 から計算される項をフルード・クリロフ (Froude-Krylov) 力と言ひ, E_j^{FK} と表す. また scattering ポテンシャル ϕ_7 から計算される項を scattering 力と言うことにして E_j^{SC} と表すが, これを diffraction 力と呼ぶ人もいる.

4.3.1 Froude-Krylov 力の計算

フルード・クリロフ力に関しては, ϕ_0 が解析的に与えられるので, x に関する微分も近似することなく正確に計算でき, ω と ω_0 の関係を用いると

$$E_j^{FK} = \rho g \zeta_a \iint_{S_B} \phi_0 n_j dS \quad \leftarrow \quad \phi_0 = e^{-k_0 z - i k_0 y \sin \beta} e^{i \ell x} \quad (65)$$

で計算することができる. これを船体横断面内の積分と x 軸方向の積分に分けて表すと,

$$\frac{E_j^{FK}}{\rho g \zeta_a} = \int_L e^{i \ell x} \mathcal{F}_j(x) dx \quad (66)$$

$$\mathcal{F}_j(x) = \int_{S_H} e^{-k_0 z - i k_0 y \sin \beta} n_j ds \equiv \mathcal{F}_j^C(x) + i \mathcal{F}_j^S(x) \quad (67)$$

のように計算することになる. 横断面を N 個のセグメントに分割するので, 各セグメント上での積分には (42)–(44) 式を適用することができる. 浮体は左右対称なので, $j = 1, 3$ では $\mathcal{F}_j^S = 0$, $j = 2, 4$ では $\mathcal{F}_j^C = 0$ となる. また法線ベクトルの成分 n_1, n_2, n_3 は各セグメント上では一定値であるが $n_4 = y n_3 - z n_2$ は厳密には y, z の関数 (n_4 も各セグメント上で一定と見なして計算しても大した誤差にはならないだろうが) である. よって

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_1(x) &= 2 \sum_{n=1}^N f_n^C(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_1)_n \quad \text{for } j = 1, 3 \\ \mathcal{F}_2(x) &= 2i \sum_{n=1}^N f_n^S(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_2)_n \\ \mathcal{F}_4(x) &= 2i \sum_{n=1}^N \left\{ g_n^S(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_3)_n - h_n^S(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_2)_n \right\} \\ \mathcal{F}_5(x) &= 2 \sum_{n=1}^N h_n^C(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_1)_n - x \mathcal{F}_3(x) \\ \mathcal{F}_6(x) &= x \mathcal{F}_2(x) - 2i \sum_{n=1}^N g_n^S(k_0, -k_0 \sin \beta) (n_1)_n \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

のように計算することになる. ここで注意すべきは pitch ($j = 5$) モーメントの計算に $n_5 = z n_1 - x n_3$ における $z n_1$ の項による寄与も含めていることである. これは $p_S(\mathbf{x})$ から計算される復原モーメントとの整合性から, n_5 に対して同じ近似レベルの計算をしておかないと長波長での pitch の漸近値において正しい結果が得られない [5] ことを考慮したものである. この点に関しては, 後で重心 G まわりの運動方程式を考える際に, 流体力の換算方法に関連してもう一度触れる予定である.

4.3.2 直接解を用いた Scattering 力の計算

次に scattering 力 E_j^{SC} については, (64) 式における ϕ_7 の寄与を考え, x に関する微分に対しては (50) 式と同じように部分積分を行う. その結果は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{E_j^{SC}}{\rho g \zeta_a} &= \frac{\omega}{\omega_0} \iint_{S_B} n_j \left(1 - \frac{U}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_7 dS = \frac{\omega}{\omega_0} \left[\iint_{S_B} \phi_7 n_j dS + \frac{U}{i\omega} \iint_{S_B} \phi_7 \frac{\partial n_j}{\partial x} dS \right] \\ &= \frac{\omega}{\omega_0} \left[\iint_{S_B} \phi_7 n_j dS + \left\{ -\frac{U}{i\omega} \iint_{S_B} \phi_7 n_3 dS \right\} \delta_{j5} + \left\{ \frac{U}{i\omega} \iint_{S_B} \phi_7 n_2 dS \right\} \delta_{j6} \right] \end{aligned} \quad (69)$$

よって, (53) 式で定義した n_5^-, n_6^- を用いると

$$\frac{E_j^{SC}}{\rho g \zeta_a} = \frac{\omega}{\omega_0} \iint_{S_B} \phi_7 n_j^- dS \equiv \frac{\omega}{\omega_0} \int_L e^{ilx} \mathcal{S}_j(x) dx \quad (70)$$

$$\mathcal{S}_j(x) = \int_{S_H} \varphi_7 n_j^- ds = \underbrace{\int_{S_H} \varphi_7^C n_j^- ds}_{\mathcal{S}_j^C(x)} + \underbrace{\int_{S_H} \varphi_7^S n_j^- ds}_{\mathcal{S}_j^S(x)} \quad (71)$$

と計算することになる. ここで φ_7^C, φ_7^S すなわち $\mathcal{S}_j^C, \mathcal{S}_j^S$ はともに複素数であることに注意しておこう. また, $j = 1, 3, 5$ では $\mathcal{S}_j^S(x) = 0$, $j = 2, 4, 6$ では $\mathcal{S}_j^C(x) = 0$ となるが, E_j^{FK} と違って n_5^-, n_6^- に n_1 の寄与を考慮する必要はないだろう.

4.3.3 NSM による Scattering 力の計算

E_j^{SC} の計算を従来の NSM で行う場合の式について整理しておこう. ϕ_7 として (26) 式, すなわち

$$\phi_7 \simeq k_0 c_\beta e^{-k_0 z_s} \left\{ i \cos \beta \phi_1 + i \sin \beta \phi_2 + \phi_3 \right\} e^{ilx} \quad (72)$$

を用いると (71) 式の計算は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_j(x) &= k_0 c_\beta e^{-k_0 z_s} \left(\sum_{k=1}^3 c_k \int_{S_H} \phi_k n_j^- ds \right) \\ c_1 &= i \cos \beta, \quad c_2 = i \sin \beta, \quad c_3 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

(28) 式で示したように, $j = 1, 3, 5$ では左右対称成分の ϕ_1 と ϕ_3 の項が寄与するが, $j = 2, 4, 6$ では左右反対称成分の ϕ_2 の項が寄与するだけである.

波浪強制力の無次元表示は, 横断面内の積分は b で, x 軸方向の積分は a で無次元化されて行われ, φ_0, φ_7 は既に無次元値なので次式となる.

$$\frac{E_j}{\rho g \zeta_a a b \epsilon_j} \equiv E_j' = E_j^{FK'} + E_j^{SC'} \quad (74)$$

NSM による (73) 式の計算で radiation ポテンシャルに関する部分は, ϕ_k が b の次元を持っているので,

$$\mathcal{S}_j(x) = k_0 b c_\beta e^{-k_0 z_s} \sum_{k=1}^3 c_k \left\{ -(A'_{jk} - i B'_{jk}) \right\} \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} A'_{jk} - i B'_{jk} &= - \int_{S_H} \phi_k n_j ds \quad j = 1 \sim 4 \\ A'_{5k} - i B'_{5k} &= - \left(x + \frac{U}{i\omega} \right) \left\{ - \int_{S_H} \phi_k n_3 ds \right\} \quad k = 1, 3 \\ A'_{6k} - i B'_{6k} &= + \left(x + \frac{U}{i\omega} \right) \left\{ - \int_{S_H} \phi_k n_2 ds \right\} \quad k = 2 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

のように 2 次元断面での radiation 流体力を用いて計算されることになる.

4.3.4 STF 法による Scattering 力の計算

フルード・クリロフ力の計算は厳密に行われるので違いはないが，scattering 力の計算にグリーンの公式を適用して式変形する STF 法について整理しておこう．(70) 式における 3 次元の計算式のうち

$$(STF)_j \equiv \iint_{S_B} \phi_7 n_j^- dS = \iint_{S_B} \phi_7 \frac{\partial \phi_j^-}{\partial n} dS \quad (77)$$

に対してグリーンの公式を適用する． ϕ_j^- については， $j = 1 \sim 4$ では $\phi_j^- = \phi_j$ であるが， $j = 5, 6$ に対しては (56) 式の物体表面条件より

$$\phi_5^- = -\left(x + \frac{U}{i\omega}\right)\phi_3, \quad \phi_6^- = +\left(x + \frac{U}{i\omega}\right)\phi_2 \quad (78)$$

と与えられる．これらは逆流問題での解ではあるが，ストリップ法では満足する自由表面条件（ならばに放射条件）は ϕ_j^- と ϕ_7 で同じであることに留意する．そうすると，(77) 式は次のように変形することができる．

$$(STF)_j = \iint_{S_B} \phi_j^- \frac{\partial \phi_7}{\partial n} dS = -\iint_{S_B} \phi_j^- \frac{\partial \phi_0}{\partial n} dS \quad (79)$$

よって (70)–(71) 式の $\mathcal{S}_j(x)$ に対応する式は次のように表すことができる．

$$\mathcal{S}_j(x) = \int_{S_H} \phi_j^- \frac{\partial \varphi_7}{\partial n} ds = \int_{S_H} \phi_j^- \left\{ \frac{\partial \varphi_7^C}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_7^S}{\partial n} \right\} ds \quad (80)$$

ここで φ_7^C , φ_7^S の法線微分には (24) 式を代入することになる．横断面での各セグメント上では ϕ_j^- および n_x, n_y, n_z は一定値として求まっているはずであるから，(42) 式を用いて

$$f_n^C = \int_{\Gamma_n} e^{-k_0 z} \cos(k_0 y \sin \beta) ds, \quad f_n^S = \int_{\Gamma_n} e^{-k_0 z} \sin(k_0 y \sin \beta) ds \quad (81)$$

を計算しておけば

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{S}_j(x) &= k_0 2 \sum_{n=1}^N (\phi_j^-)_n \left\{ (n_y)_n \sin \beta f_n^S + (\tilde{n}_z)_n f_n^C \right\} \quad (j = 1, 3, 5) \\ \mathcal{S}_j(x) &= ik_0 2 \sum_{n=1}^N (\phi_j^-)_n \left\{ (n_y)_n \sin \beta f_n^C - (\tilde{n}_z)_n f_n^S \right\} \quad (j = 2, 4, 6) \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

のようにモードごとに $j = 1, 3, 5$ は対称成分のみ， $j = 2, 4, 6$ は反対称成分のみの radiation ポテンシャルを用いて計算することができる．ここで $\tilde{n}_z = n_z + in_x \cos \beta$ である．

4.4 復原力係数

運動方程式における復原力項は (48) 式で与えられる静水圧の時間変動成分を積分することによって求められる．形式的には

$$\begin{aligned} F_j^S &= -\iint_{S_B} p_S(\mathbf{x}) n_j dS = -\rho g \iint_{S_B} (X_3 + yX_4 - xX_5) n_j dS \\ &\equiv -\left\{ c_{j3}X_3 + c_{j4}X_4 + c_{j5}X_5 \right\} \end{aligned} \quad (83)$$

によって復原力係数 c_{jk} が求められる．ここで静水圧は空間固定座標での鉛直方向に働くだけだから，ゼロでない値となるのは以下に示す係数となる．

$$\left. \begin{aligned} c_{j3} &= +\rho g \iint_{S_B} n_j dS = \rho g \int_L dx \int_{S_H} n_j ds \quad (j = 3, 5) \\ c_{j4} &= +\rho g \iint_{S_B} y n_j dS = \rho g \int_L dx \int_{S_H} y n_j ds \quad (j = 4) \\ c_{j5} &= -\rho g \iint_{S_B} x n_j dS = -\rho g \int_L x dx \int_{S_H} n_j ds \quad (j = 3, 5) \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

ここで注意すべきは c_{55} の計算で, $n_5 = zn_1 - xn_3 \simeq -xn_3$ と近似すると,

$$c_{55} = \rho g \iint_{S_B} x^2 n_3 dS = \rho g \iint_{S_W} x^2 dx dy = \rho g \nabla \overline{BM}_L = W \overline{BM}_L \quad (85)$$

という結果になるが (∇ は排水容積なので $W = \rho g \nabla$ は船体重量), 良く知られているように pitch の復原モーメント係数は $c_{55} = W \overline{GM}_L$ (重心 G と縦メタセンタ M_L との距離) である. 重心 G まわりの運動方程式の係数として \overline{GM}_L の値を入力データとして与えることも有り得るが, それと整合させるためには, n_5 を重心 G まわりでの値として

$$n_5 = (z - \overline{OG})n_1 - xn_3 \quad (86)$$

を使って計算しなければならない. このとき c_{55} はガウスの定理を使って式変形すると

$$\begin{aligned} c_{55} &= -\rho g \iint_{S_B} x \left\{ (z - \overline{OG})n_1 - xn_3 \right\} dS = -\rho g \iiint_V (z - \overline{OG}) dV + \rho g \iint_{S_W} x^2 dx dy \\ &= \rho g \nabla \left\{ -\overline{OB} + \overline{OG} + \overline{BM}_L \right\} = \rho g \nabla \overline{GM}_L \end{aligned} \quad (87)$$

となり, 確かに正しい復原力係数となっている.

ところで $k_0 \rightarrow 0$ (すなわち $\omega_0 \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$) の長波長では, 運動方程式左辺の復原力と右辺のフルード・クリロフ力が釣り合うことによって変位の複素振幅が求まるので, c_{55} を (87) 式とするなら同じ精度レベルでフルード・クリロフモーメントも計算しておく必要がある. そのことを念頭に置いて (86) 式のうちの zn_1 の寄与を考慮した計算式が (68) 式の $\mathcal{F}_5(x)$ である. 重心位置が x 軸方向に l_x , z 方向に l_z であるとして $\mathbf{x}_G = (l_x, 0, l_z)$ と表し, 運動方程式を重心位置まわりで考える場合, 復原力だけでなく, すべての流体力を重心位置まわりでの値に換算しておく必要がある.

その換算を考える前に (84) 式の係数を具体的に書いておくと, 以下のようになる.

$$\left. \begin{aligned} c_{33} &= \rho g \iint_{S_B} n_3 dS = \rho g \iint_{S_W} dx dy = \rho g A_W \\ c_{35} &= c_{53} \simeq -\rho g \iint_{S_B} xn_3 dS = -\rho g \iint_{S_W} x dx dy \equiv -\rho g A_W x_F \\ c_{44} &= \rho g \iint_{S_B} y(y n_3 - z n_2) dS = \rho g \iint_{S_W} y^2 dx dy - \rho g \iiint_V z dV = \rho g \nabla \left\{ \overline{BM} - \overline{OB} \right\} \\ c_{55} &= -\rho g \iint_{S_B} x(z n_1 - x n_3) dS = -\rho g \iiint_V z dV + \rho g \iint_{S_W} x^2 dx dy = \rho g \nabla \left\{ -\overline{OB} + \overline{BM}_L \right\} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

4.5 重心まわりで考えた流体力への換算

4.5.1 方法その 1 (変位とモーメントの換算)

換算方法の一つとしては, 変位ベクトルとモーメントの換算を行うことである. まず変位ベクトルを直線運動による $\boldsymbol{\alpha}_T = (X_1, X_2, X_3)$ と回転運動による $\boldsymbol{\alpha}_R = (X_4, X_5, X_6)$ を考えると, 全変位ベクトルは

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_T + \boldsymbol{\alpha}_R \times (\mathbf{x}_G + \mathbf{x}') = \boldsymbol{\alpha}_T^G + \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{x}' \quad (89)$$

と表すことができる. ここで $\boldsymbol{\alpha}_T$ は原点 O の変位ベクトル, $\boldsymbol{\alpha}_T^G$ は重心 G の変位ベクトルであり, $\mathbf{x}_G = (l_x, 0, l_z)$ は原点 O から重心 G への位置ベクトル, \mathbf{x}' は重心 G から任意点までの位置ベクトルとする. このとき, (89) 式より次の関係にあることが分かる.

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_T + \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{x}_G &= \boldsymbol{\alpha}_T^G \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}_T = \boldsymbol{\alpha}_T^G - \boldsymbol{\alpha}_R \times \mathbf{x}_G \\ X_1 &= X_1^G - l_z X_5, \quad X_2 = X_2^G - l_x X_6 + l_z X_4, \quad X_3 = X_3^G + l_x X_5 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

次にモーメントの換算式は次のように見い出せる.

$$\mathbf{x} \times \mathbf{n} = (\mathbf{x}_G + \mathbf{x}') \times \mathbf{n} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}' \times \mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{n} - \mathbf{x}_G \times \mathbf{n} \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}^G &= \mathbf{M} - \mathbf{x}_G \times \mathbf{F} \\ F_4^G &= F_4 + l_z F_2, \quad F_5^G = F_5 + l_x F_3 - l_z F_1, \quad F_6^G = F_6 - l_x F_2 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

これらを用いると, (49) 式の radiation 流体力は次のように変換できる.

$$F_1^{RG} = T_{11}X_1 + T_{13}X_3 + T_{15}X_5 = T_{11}X_1^G + T_{13}X_3^G + (T_{15} + \ell_x T_{13} - \ell_z T_{11})X_5^G \quad (93)$$

$$F_3^{RG} = T_{31}X_1 + T_{33}X_3 + T_{35}X_5 = T_{31}X_1^G + T_{33}X_3^G + (T_{35} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{31})X_5^G \quad (94)$$

$$\begin{aligned} F_5^{RG} &= (T_{51} + \ell_x T_{31} - \ell_z T_{11})X_1 + (T_{53} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{13})X_3 + (T_{55} + \ell_x T_{35} - \ell_z T_{15})X_5 \\ &= (T_{51} + \ell_x T_{31} - \ell_z T_{11})X_1^G + (T_{53} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{13})X_3^G \\ &\quad + \{T_{55} + \ell_x T_{35} - \ell_z T_{15} + \ell_x(T_{53} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{13}) - \ell_z(T_{51} + \ell_x T_{31} - \ell_z T_{11})\}X_5^G \end{aligned} \quad (95)$$

$$F_2^{RG} = T_{22}X_2 + T_{24}X_4 + T_{26}X_6 = T_{22}X_2^G + (T_{24} + \ell_z T_{22})X_4^G + (T_{26} - \ell_x T_{22})X_6^G \quad (96)$$

$$\begin{aligned} F_4^{RG} &= (T_{42} + \ell_z T_{22})X_2 + (T_{44} + \ell_z T_{24})X_4 + (T_{46} + \ell_z T_{26})X_6 \\ &= (T_{42} + \ell_z T_{22})X_2^G + \{T_{44} + \ell_z T_{24} + \ell_z(T_{42} + \ell_z T_{22})\}X_4^G \\ &\quad + \{T_{46} + \ell_z T_{26} - \ell_x(T_{42} + \ell_z T_{22})\}X_6^G \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} F_6^{RG} &= (T_{62} - \ell_x T_{22})X_2 + (T_{64} - \ell_x T_{24})X_4 + (T_{66} - \ell_x T_{26})X_6 \\ &= (T_{62} - \ell_x T_{22})X_2^G + \{T_{64} - \ell_x T_{24} + \ell_z(T_{62} - \ell_x T_{22})\}X_4^G \\ &\quad + \{T_{66} - \ell_x T_{26} - \ell_x(T_{62} - \ell_x T_{22})\}X_6^G \end{aligned} \quad (98)$$

波浪強制力の換算には変位は関係せず, (92) 式のモーメントの換算だけなので,

$$\left. \begin{aligned} E_j^G &= E_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ E_4^G &= E_4 + \ell_z E_2, \quad E_5^G = E_5 + \ell_x E_3 - \ell_z E_1, \quad E_6^G = E_6 - \ell_x E_2 \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

また復原力の換算は (83) 式に (90), (91) 式を代入して

$$F_3^{SG} = -c_{33}(X_3^G + \ell_x X_5^G) - c_{35}X_5^G \quad (100)$$

$$F_4^{SG} = -(c_{44} + \ell_z \rho g \nabla)X_4^G \quad (101)$$

$$F_5^{SG} = -(c_{53} + \ell_x c_{33})(X_3^G + \ell_x X_5^G) - (c_{55} + \ell_z \rho g \nabla + \ell_x c_{35})X_5^G \quad (102)$$

となるから, 復原力係数の換算式として表すと次式となる.

$$\left. \begin{aligned} c_{33}^G &= c_{33} = \rho g A_W \\ c_{35}^G &= c_{35} + \ell_x c_{33}, \quad c_{53}^G = c_{53} + \ell_x c_{33} \\ c_{55}^G &= \rho g \nabla \overline{GM}_L + \ell_x(c_{35} + c_{53}) + \ell_x^2 c_{33} \\ c_{44}^G &= \rho g \nabla \overline{GM} \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

4.5.2 方法その 2 (法線ベクトルと速度ポテンシャルの換算)

もう少し簡単に radiation 流体力を変換できる別解法を次に述べよう. まず法線ベクトルが (91) 式より

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' \times \mathbf{n} &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \times \mathbf{n} \\ n_4^G &= yn_3 - (z - \ell_z)n_2 = n_4 + \ell_z n_2 \\ n_5^G &= (z - \ell_z)n_1 - (x - \ell_x)n_3 = n_5 + \ell_x n_3 - \ell_z n_1 \simeq n_5 + \ell_x n_3 \\ n_6^G &= (x - \ell_x)n_2 - yn_1 = n_6 - \ell_x n_2 \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

の関係にある. ($j = 1 \sim 3$ では $n_j^G = n_j$ である.) そこで (104) 式を物体表面での境界条件として考えると, 重心 G を原点として考えたときの速度ポテンシャルを

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^6 i\omega X_j^G \phi_j^G(\mathbf{x}) \quad (105)$$

と表せば、 $\phi_j^G(\mathbf{x})$ は直ちに次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_j^G &= \phi_j \quad (j = 1 \sim 3) \\ \phi_4^G &= \phi_4 + \ell_z \phi_2, \quad \phi_6^G = \phi_6 - \ell_x \phi_2 \\ \phi_5^G &= \phi_5 + \ell_x \phi_3 - \ell_z \phi_1 \simeq \phi_5 + \ell_x \phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

したがって radiation 流体力は (54) 式に (106) 式と (104) 式の掛け算を浮体表面上で積分すればよいだけなので、次の関係式は比較的容易に理解できるだろう。

$$T_{jk}^G = T_{jk} \quad (j, k = 1 \sim 3) \quad (107)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{15}^G &= T_{15} + \ell_x T_{13} - \ell_z T_{11}, \quad T_{35}^G = T_{35} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{31} \\ T_{51}^G &= T_{51} + \ell_x T_{31} - \ell_z T_{11}, \quad T_{53}^G = T_{53} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{13} \\ T_{55}^G &= T_{55} + \ell_x T_{35} - \ell_z T_{15} + \ell_x (T_{53} + \ell_x T_{33} - \ell_z T_{13}) - \ell_z (T_{51} + \ell_x T_{31} - \ell_z T_{11}) \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{24}^G &= T_{24} + \ell_z T_{22}, \quad T_{26}^G = T_{26} - \ell_x T_{22} \\ T_{42}^G &= T_{42} + \ell_z T_{22}, \quad T_{44}^G = T_{44} + \ell_z T_{24} + \ell_z (T_{42} + \ell_z T_{22}) \\ T_{46}^G &= T_{46} + \ell_z T_{26} - \ell_x (T_{42} + \ell_z T_{22}) \\ T_{62}^G &= T_{62} - \ell_x T_{22}, \quad T_{64}^G = T_{64} - \ell_x T_{24} + \ell_z (T_{62} - \ell_x T_{22}) \\ T_{66}^G &= T_{66} - \ell_x T_{26} - \ell_x (T_{62} - \ell_x T_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

いずれの方法でも同じ結果になっていることが確認できる。この中で、縦運動 ($j = 1, 3, 5$) に関する (108) 式の計算式で ℓ_z の寄与を省略してもストリップ法としての整合性には問題はないであろう。

ところで、(106) 式の ϕ_j^G を (105) 式に代入して整理すると

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 i\omega X_j^G \phi_j + i\omega X_4^G (\phi_4 + \ell_z \phi_2) + i\omega X_5^G (\phi_5 + \ell_x \phi_3 - \ell_z \phi_1) + i\omega X_6^G (\phi_6 - \ell_x \phi_2)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^6 i\omega X_j \phi_j \\ X_1 &= X_1^G - \ell_z X_5^G, \quad X_2 = X_2^G - \ell_x X_6^G + \ell_z X_4^G, \quad X_3 = X_3^G + \ell_x X_5^G \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

の関係式が得られるが、これは (90) 式と同じであることも確認できる。

5. 波浪中での船体運動方程式

船体の j モードの変位は、これまで複素変位 X_j のみを使っていたが、時間項も含めて表すと

$$\xi_j(t) = \text{Re}[X_j e^{i\omega t}]$$

である。よって加速度及び速度の複素振幅はそれぞれ $(i\omega)^2 X_j$, $i\omega X_j$ と表される。そこでニュートンの第 2 法則による重心 G に関する船体の j 方向の運動方程式は、時間項 $e^{i\omega t}$ を除いて表すと

$$m_{jj}(i\omega)^2 X_j^G = E_j^G + F_j^{RG} + F_j^{SG} \equiv \mathcal{F}_j \quad (j = 1 \sim 6) \quad (111)$$

となる。ここで

$$m_{jj} = \begin{cases} \rho \forall & (j = 1 \sim 3) \\ \rho \forall \kappa_j^2 & (j = 4 \sim 6) \end{cases} \quad (112)$$

であり、 \forall は排水容積、 κ_j は慣動半径で $\kappa_4 = \kappa_{xx}$, $\kappa_5 = \kappa_{yy}$, $\kappa_6 = \kappa_{zz}$ の意味であるとする。

運動方程式右辺の流体力は重心 G まわりでの値に換算されたものと考えており、 E_j^G は (99) 式の波浪強制力、 F_j^{RG} は (93)~(98) 式の radiation 流体力、 F_j^{SG} は (100)~(102) 式の復原力を表す。これらの流体力は

$$\left. \begin{aligned} E_j^G &= \rho g \zeta_a A_W \epsilon_j \mathcal{E}_j, \quad \mathcal{E}_j \equiv \frac{ab}{A_W} E_j^{G'} \\ F_j^{RG} &= -(i\omega)^2 \sum_{k=1}^6 \rho \nabla \epsilon_j \epsilon_k \mathcal{F}_{jk} X_k^G, \quad \mathcal{F}_{jk} \equiv \frac{ab^2}{\nabla} (a_{jk}^{G'} - i b_{jk}^{G'}) \\ F_j^{SG} &= -\rho g A_W \sum_{k=3}^5 \epsilon_j \epsilon_k \mathcal{C}_{jk} X_k^G, \quad \mathcal{C}_{jk} \equiv \frac{c_{jk}^G}{\rho g A_W \epsilon_j \epsilon_k} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

のように書くことができるので、次のように整理できる．

$$\mathcal{F}_j = \rho g \zeta_a A_W \epsilon_j \left[\mathcal{E}_j + \frac{K \nabla}{A_W} \sum_{k=1}^6 \frac{X_k^G \epsilon_k}{\zeta_a} \mathcal{F}_{jk} - \sum_{k=3}^5 \frac{X_k^G \epsilon_k}{\zeta_a} \mathcal{C}_{jk} \right] \quad (114)$$

したがって (111) 式は次のように表すことができる．

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \left[-\left(M_{jk} \delta_{jk} + \mathcal{F}_{jk} \right) + \frac{A_W}{K \nabla} \mathcal{C}_{jk} \right] \frac{X_k^G \epsilon_k}{\zeta_a} &= \frac{A_W}{K \nabla} \mathcal{E}_j \quad (j = 1 \sim 6) \\ M_{jj} &= \frac{m_{jj}}{\rho \nabla \epsilon_j^2}, \quad \epsilon_j = 1 \quad (j = 1 \sim 3), \quad \epsilon_4 = b, \quad \epsilon_5 = \epsilon_6 = a \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

実際には $j = 1, 3, 5$ の縦運動と $j = 2, 4, 6$ の横運動は連成しないので別々の連立方程式として解くことになる．言わずもがなであるが、(115) 式における復原力係数 \mathcal{C}_{jk} は $k = 3, 4, 5$ 以外はゼロである．

6. コチン関数

6.1 2次元コチン関数

コチン (Kochin) 関数は、浮体から離れた位置での速度ポテンシャルの漸近形 (外方への進行波) における複素振幅のことであり、船体横断面内の 2次元問題では

$$\sigma_j(x) \pm i \mu_j(x) = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta \pm i K \eta} ds \quad (j = 1 \sim 4) \quad (116)$$

で与えられる．コンスタントパネル法では各セグメント上での積分に対して (41)–(42) 式を用いると、radiation 問題では次のように計算することができる．

$$\begin{aligned} \sigma_j(x) &= \int_{S_H} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \cos K \eta ds \quad (j = 1, 3) \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \left[(n_j)_n f_n^C(K, K) - (\phi_j)_n e_n^C(K) \right] \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \mu_j(x) &= \int_{S_H} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \sin K \eta ds \quad (j = 2, 4) \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \left[(n_j)_n f_n^S(K, K) - (\phi_j)_n e_n^S(K) \right] \end{aligned} \quad (118)$$

Diffraction 問題では、(8) 式のように ϕ_7 を表しておく

$$\left\{ \sigma_7(x) \pm i \mu_7(x) \right\} e^{i\ell x} = \left\{ \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_7}{\partial n} - \varphi_7 \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta \pm i K \eta} ds \right\} e^{i\ell x} \quad (119)$$

である．ストリップ法では diffraction ポテンシャルが満たす自由表面条件も (11) 式としているので、攪乱波は波数 K の 2次元波となっている．これにはやや疑問もあるが、ここではこれ以上議論しないことにして計算を進める．

$$\begin{aligned} \sigma_7(x) &= \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_7}{\partial n} - \varphi_7 \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \cos K \eta ds = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_7^C}{\partial n} - \varphi_7^C \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \cos K \eta ds \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \left[(n_y)_n \left\{ k_0 \sin \beta A_1 + K (\varphi_7^C)_n A_3 \right\} + (\tilde{n}_z)_n \left\{ k_0 A_2 + K (\varphi_7^C)_n A_4 \right\} \right] \end{aligned} \quad (120)$$

ここで

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\Gamma_n} e^{-(k_0+K)\zeta} \sin(k_0\eta \sin \beta) \cos(K\eta) ds \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f_n^S(k_0 + K, k_0 \sin \beta + K) + f_n^S(k_0 + K, k_0 \sin \beta - K) \right\} \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\Gamma_n} e^{-(k_0+K)\zeta} \cos(k_0\eta \sin \beta) \cos(K\eta) ds \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f_n^C(k_0 + K, k_0 \sin \beta + K) + f_n^C(k_0 + K, k_0 \sin \beta - K) \right\} \end{aligned} \quad (122)$$

$$A_3 = \int_{\Gamma_n} e^{-K\zeta} \sin(K\eta) ds = f_n^S(K, K) \quad (123)$$

$$A_4 = \int_{\Gamma_n} e^{-K\zeta} \cos(K\eta) ds = f_n^C(K, K) \quad (124)$$

同様にして左右反対称波成分の Kochin 関数 $\mu_7(x)$ は次式で計算する.

$$\begin{aligned} \mu_7(x) &= \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_7}{\partial n} - \varphi_7 \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \sin K\eta ds = \int_{S_H} \left(\frac{\partial \varphi_7^S}{\partial n} - \varphi_7^S \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K\zeta} \sin K\eta ds \\ &= 2 \sum_{n=1}^N \left[(n_y)_n \left\{ ik_0 \sin \beta B_1 - K (\varphi_7^S)_n B_3 \right\} - (\tilde{n}_z)_n \left\{ ik_0 B_2 - K (\varphi_7^S)_n B_4 \right\} \right] \end{aligned} \quad (125)$$

ここで

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{\Gamma_n} e^{-(k_0+K)\zeta} \cos(k_0\eta \sin \beta) \sin(K\eta) ds \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f_n^S(k_0 + K, k_0 \sin \beta + K) - f_n^S(k_0 + K, k_0 \sin \beta - K) \right\} \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \int_{\Gamma_n} e^{-(k_0+K)\zeta} \sin(k_0\eta \sin \beta) \sin(K\eta) ds \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ f_n^C(k_0 + K, k_0 \sin \beta + K) - f_n^C(k_0 + K, k_0 \sin \beta - K) \right\} \end{aligned} \quad (127)$$

$$B_3 = \int_{\Gamma_n} e^{-K\zeta} \cos(K\eta) ds = f_n^C(K, K) \quad (128)$$

$$B_4 = \int_{\Gamma_n} e^{-K\zeta} \sin(K\eta) ds = f_n^S(K, K) \quad (129)$$

従来の NSM では, scattering ポテンシャル ϕ_7 を (26) 式あるいは (72) 式で近似的に表すので, これによる diffraction 問題での Kochin 関数は, radiation 問題での Kochin 関数を用いて

$$\sigma_7(x) \pm i \mu_7(x) = k_0 c_\beta e^{-k_0 z_s} \left\{ i \cos \beta \sigma_1(x) \pm i \sin \beta \mu_2(x) + \sigma_3(x) \right\} \quad (130)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \sigma_7(x) &= k_0 c_\beta e^{-k_0 z_s} \left\{ i \cos \beta \sigma_1(x) + \sigma_3(x) \right\} \\ \mu_7(x) &= k_0 c_\beta e^{-k_0 z_s} \left\{ i \sin \beta \mu_2(x) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

として計算することができる.

6.2 3次元コチン関数

次に 3次元での Kochin 関数の計算は, x 軸上の特異点分布による遠方場での外方への 3次元進行波における複素振幅を考えれば良いが, それが次式となる. (詳細は省略するが, EUT [6] と同様に考えることで理解することができる.)

$$C_j(k) \pm i S_j(k) = \int_L \left\{ Q_j(x) \pm i \sqrt{1 - k^2/\kappa^2(k)} M_j(x) \right\} e^{ikx} dx \quad (132)$$

ここで

$$\kappa(k) = \frac{1}{g} (\omega + kU)^2 = K + 2k\tau + \frac{k^2}{K_0} \quad (133)$$

であり, k は x に関するフーリエ変換での変数である. Radiation 問題での 3 次元わき出し強さ $Q_j(x)$, ダブレット (二重わき出し) 強さ $M_j(x)$ は次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} Q_j(x) &= \sigma_j(x) \quad (j = 1, 3), & Q_5(x) &= -\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \sigma_3(x) \\ M_j(x) &= \mu_j(x) \quad (j = 2, 4), & M_6(x) &= +\left(x - \frac{U}{i\omega}\right) \mu_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

あるいは (12) 式の境界条件と同じ形とし, 以下のように表しても同じ結果を得ることができる.

$$\left. \begin{aligned} Q_j(x) &= \sigma_j(x) + \frac{U}{i\omega} \hat{\sigma}_j(x), \quad (j = 1, 3, 5) \\ M_j(x) &= \mu_j(x) + \frac{U}{i\omega} \hat{\mu}_j(x), \quad (j = 2, 4, 6) \\ \hat{\sigma}_j(x) &= 0 \quad (j = 1, 3), & \sigma_5(x) &= -x\sigma_3(x), & \hat{\sigma}_5(x) &= \sigma_3(x) \\ \hat{\mu}_j(x) &= 0 \quad (j = 2, 4), & \mu_6(x) &= x\mu_2(x), & \hat{\mu}_6(x) &= -\mu_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Diffraction 問題 ($j = 7$) では (119) 式によって

$$Q_7(x) = \sigma_7(x) e^{i\ell x}, \quad M_7(x) = \mu_7(x) e^{i\ell x} \quad (136)$$

のように 3 次元特異点分布の強さを計算することになる.

波浪中で船体が動揺しているときは, まず運動方程式を解くことによって動揺の複素振幅 X_j/ζ_a を求める. 次にそれを用いると船体による攪乱速度ポテンシャル $\phi_B(\mathbf{x})$ は (7) 式で示したように

$$\phi_B(\mathbf{x}) = \phi_7(\mathbf{x}) - \frac{\omega\omega_0}{g} \sum_{j=1}^6 \frac{X_j}{\zeta_a} \phi_j(\mathbf{x}) \quad (137)$$

と与えられるから, Kochin 関数の合計も (137) 式に従って線形重ね合わせを行えばよい. すなわち次のように与えられる.

$$\left. \begin{aligned} H^\pm(k) &\equiv C(k) \pm iS(k) \\ C(k) &= C_7(k) - \frac{\omega\omega_0}{g} \sum_{j=1,3,5} \frac{X_j}{\zeta_a} C_j(k) \\ S(k) &= S_7(k) - \frac{\omega\omega_0}{g} \sum_{j=2,4,6} \frac{X_j}{\zeta_a} S_j(k) \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

これらを無次元値として計算する場合, (132) 式のように x に関して積分するので, 本来, 長さ $a (= L/2)$ の次元を持っているが, Kochin 関数を用いて波浪中抵抗増加を計算する場合には, フーリエ変換の変数である波数 k は $1/a$ の次元であるから, 後で示されるように (138) 式の長さの次元 a は除いて考えておいてもよい. このことから $x \rightarrow ax$ と考えて, (132) 式の積分範囲は $-1 \leq x \leq +1$ としておけばよく,

$$\left. \begin{aligned} C_j(k) &= \int_{-1}^1 Q_j(x) e^{ikx} dx \\ S_j(k) &= \sqrt{1 - k^2/\kappa^2(k)} \int_{-1}^1 M_j(x) e^{ikx} dx \equiv \sqrt{1 - k^2/\kappa^2(k)} \hat{S}_j(k) \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

のように計算する. さらに (138) 式の radiation 問題では ϕ_j ($j = 1 \sim 3$) 自体が長さ $b (= B/2)$ の次元を持っており, さらに ϕ_4 は b^2 , ϕ_5 と ϕ_6 は ab の次元である. したがって, それらから計算される $\sigma_j(x)$, $\mu_j(x)$ も同じ次元である. これらを考慮して

$$\left. \begin{aligned} C(k) &= C_7(k) - \frac{\omega\omega_0}{g} b \left\{ \frac{X_1}{\zeta_a} C_1(k) + \frac{X_3}{\zeta} C_3(k) + \frac{X_5 a}{\zeta_a} C_5(k) \right\} \\ S(k) &= S_7(k) - \frac{\omega\omega_0}{g} b \left\{ \frac{X_2}{\zeta_a} S_2(k) + \frac{X_4 b}{\zeta_a} S_4(k) + \frac{X_6 a}{\zeta_a} S_6(k) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

のように無次元値を得ることになる.

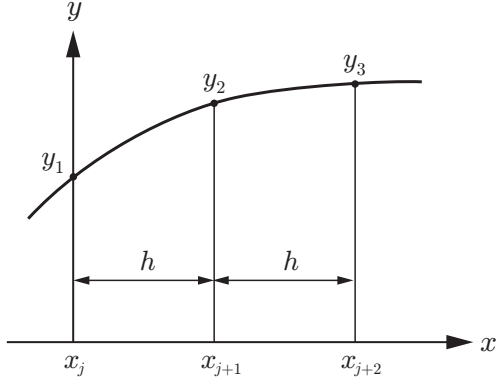


Fig. 4 Simpson 則の拡張

(139) 式の x に関する積分では、広範囲のフーリエ変換の変数 k の値に対して高精度の計算が要求される．そのためには要求計算精度を指定でき、且つ振動関数に対しても適用できる Clenshaw-Curtis 法を用いることが計算法の一手法として考えられる．あるいは計算断面での値だけを用いて計算できるシンプソン (Simpson) 則を拡張した以下に述べる解析積分の手法も考えられる．まず、Fig. 4 に示すように $x_j \leq x \leq x_{j+2}$ の区間に対して e^{ikx} 以外の被積分関数 $y(x)$ を 2 次関数で表す．すなわち

$$A_j \equiv \int_{x_j}^{x_{j+2}} y(x) e^{ikx} dx \quad (141)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y_1 + a(x - x_j) + b(x - x_j)^2 \\ a &= \frac{1}{2h}(-3y_1 + 4y_2 - y_3), \quad b = \frac{1}{2h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ h &= x_{j+1} - x_j = x_{j+2} - x_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

振動関数 e^{ikx} を含む積分は、以下のように解析的に求めることができる．

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= ik \int_{x_j}^{x_{j+2}} e^{ikx} dx = \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \\ \alpha_2 &= \frac{ik}{2h} \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j) e^{ikx} dx = e^{ikx_{j+2}} - \frac{1}{2ikh} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \\ \alpha_3 &= \frac{ik}{2h^2} \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j)^2 e^{ikx} dx = 2 \left(1 - \frac{1}{ikh} \right) e^{ikx_{j+2}} + \frac{1}{(ikh)^2} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

これらの結果を (141) 式に代入して整理すると次のように表すことができる．

$$\begin{aligned} ikA_j &= y_1 \left[-\frac{1}{ikh} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{ikh} \right) e^{ikx_{j+2}} - \left\{ 1 + \frac{1}{ikh} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{ikh} \right) \right\} e^{ikx_j} \right] \\ &\quad + 2y_2 \left[\frac{1}{ikh} \left(1 - \frac{1}{ikh} \right) e^{ikx_{j+2}} + \frac{1}{ikh} \left(1 + \frac{1}{ikh} \right) e^{ikx_j} \right] \\ &\quad + y_3 \left[\left\{ 1 - \frac{1}{ikh} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{ikh} \right) \right\} e^{ikx_{j+2}} - \frac{1}{ikh} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{ikh} \right) e^{ikx_j} \right] \end{aligned} \quad (144)$$

$k \rightarrow 0$ のときの極限では、(141) 式は以下に示す通常のシンプソン則となるはずである．

$$A_j = \int_{x_j}^{x_{j+2}} y(x) dx = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \quad (145)$$

7. 波浪による定常流体力

運動量保存則、エネルギー保存則に対して x に関するフーリエ変換を用いた解析 [7] を行うと、波振幅 ζ_a の 2 乗に比例する 2 次の時間平均定常流体力として、次に示す抵抗増加 \bar{R} 、定常横力 \bar{Y} 、定常回頭モーメント \bar{N} の計算公式を得ることができる．

$$\frac{\bar{R}}{\rho g \zeta_a^2} = \frac{1}{4\pi k_0} \left[-\int_{-\infty}^{k_1} + \int_{k_2}^{k_3} + \int_{k_4}^{\infty} \right] \left\{ |C(k)|^2 + |S(k)|^2 \right\} \frac{\kappa(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \frac{-\bar{Y}}{\rho g \zeta_a^2} &= \frac{1}{4\pi k_0} \left[-\int_{-\infty}^{k_1} + \int_{k_2}^{k_3} + \int_{k_4}^{\infty} \right] \text{Im} \left\{ 2C(k)S^*(k) \right\} \kappa dk \\ &\quad - \frac{\sin \beta}{4\pi} \left[-\int_{-\infty}^{k_1} + \int_{k_2}^{k_3} + \int_{k_4}^{\infty} \right] \left\{ |C(k)|^2 + |S(k)|^2 \right\} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk \end{aligned} \quad (147)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{N}}{\rho g \zeta_a^2} &= \frac{1}{4\pi k_0} \left[-\int_{-\infty}^{k_1} + \int_{k_2}^{k_3} + \int_{k_4}^{\infty} \right] \operatorname{Re} \left\{ C'(k) S^*(k) - S'(k) C^*(k) \right\} \kappa dk \\ &\quad - \frac{\sin \beta}{2} \operatorname{Re} \left\{ H'(k_0, \beta) + \frac{1}{k_0} \left(\tau + \frac{k_0 \cos \beta}{K_0} \right) H(k_0, \beta) \right\} \end{aligned} \quad (148)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{g} (\omega + kU)^2 = K + 2\tau k + \frac{k^2}{K_0} \quad \left(K = \frac{\omega^2}{g}, \tau = \frac{U\omega}{g}, K_0 = \frac{g}{U^2} \right) \\ \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{k_1}{k_2} \right\} &= -\frac{K_0}{2} (1 + 2\tau \pm \sqrt{1 + 4\tau}) = -\frac{2K}{1 + 2\tau \mp \sqrt{1 + 4\tau}} \\ \frac{k_3}{k_4} \right\} &= +\frac{K_0}{2} (1 - 2\tau \mp \sqrt{1 - 4\tau}) = +\frac{2K}{1 - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau}} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (149)$$

であり, これらは $a (= L/2)$ で無次元化された波数と考えている. k_j ($j = 1 \sim 4$) は $\kappa^2 = k^2$ を満たす積分範囲の端点で, (146)–(147) 式の被積分関数の分母がゼロとなることに注意する必要がある. $\tau > 1/4$ では $k_3 = k_4$ となると考え, (146)–(148) 式の積分範囲のうち $k_2 < k < \infty$ では連続になる. 一方, $U \rightarrow 0$ では $\tau = 0$ であり, $k_1 \rightarrow -\infty$, $k_2 \rightarrow -K$, $k_3 \rightarrow +K$, $k_4 \rightarrow +\infty$ となることが分かる. また (148) 式においては

$$\left. \begin{aligned} C'_j(k) &= \int_{-1}^1 ix Q_j(x) e^{ikx} dx \\ S'_j(k) &= \sqrt{1 - k^2/\kappa^2} \int_{-1}^1 ix M_j(x) e^{ikx} dx \equiv \sqrt{1 - k^2/\kappa^2} \widehat{S}'_j(k) \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

であり, $C^*(k)$, $S^*(k)$ はそれぞれ $C(k)$, $S(k)$ の複素共役を意味する. さらに $H(k_0, \beta)$ および $H'(k_0, \beta)$ は以下に示すように Kochin 関数における $k = k_0 \cos \beta$, $\sqrt{\kappa^2 - k^2} = k_0 \sin \beta$ での値である.

$$H(k_0, \beta) = \left[C(k) + i \sin \beta \widehat{S}(k) \right]_{k=k_0 \cos \beta}, \quad H'(k_0, \beta) = \left[C'(k) + i \sin \beta \widehat{S}'(k) \right]_{k=k_0 \cos \beta} \quad (151)$$

7.1 積分範囲の端点における特異性の処理

(146)–(149) 式の k に関する積分を行う際, 注意すべき点が幾つかあるが, その一つが端点での特異性の除去 [8] である. まず以下のことに留意する.

$$\left. \begin{aligned} \kappa^2(k) - k^2 &= \{ \kappa(k) + k \} \{ \kappa(k) - k \} = 0 \\ \kappa(k) + k &= \frac{1}{K_0} (k - k_1)(k - k_2), \quad \kappa(k) - k = \frac{1}{K_0} (k - k_3)(k - k_4) \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

このことから

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_1 &\equiv -\int_{-\infty}^{k_1} \frac{F(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = -\int_{-k_1}^{\infty} \frac{F(-k)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} dk = -\int_{-k_1}^{\infty} \frac{F(-k)}{\sqrt{\frac{\lambda(k) + k}{K_0}}} \frac{dk}{\sqrt{(k + k_2)(k + k_1)}} \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

$$\lambda(k) \equiv \kappa(-k) \longrightarrow \frac{\lambda(k) + k}{K_0} = \left(\frac{k}{K_0} \right)^2 + (1 - 2\tau) \frac{k}{K_0} + \tau^2$$

$$\mathcal{J}_{23} \equiv \int_{k_2}^{k_3} \frac{F(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = \int_{k_2}^{k_3} \frac{F(k)}{\sqrt{\frac{(k - k_1)(k_4 - k)}{K_0}}} \frac{dk}{\sqrt{(k - k_2)(k_3 - k)}} \quad (154)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_4 &\equiv \int_{k_4}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = \int_{k_4}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{\frac{\kappa(k) + k}{K_0}}} \frac{dk}{\sqrt{(k - k_3)(k - k_4)}} \end{aligned} \right\} \quad \text{for } \tau < \frac{1}{4} \quad (155)$$

$$\frac{\kappa(k) + k}{K_0} = \left(\frac{k}{K_0} \right)^2 + (1 + 2\tau) \frac{k}{K_0} + \tau^2$$

$$\mathcal{J}_2 \equiv \left. \begin{aligned} \int_{k_2}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk &= \int_{k_2}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{\frac{\kappa(k) - k}{K_0}} \sqrt{(k - k_1)(k - k_2)}} dk \\ \frac{\kappa(k) - k}{K_0} &= \left(\frac{k}{K_0}\right)^2 - (1 - 2\tau)\frac{k}{K_0} + \tau^2 \end{aligned} \right\} \text{for } \tau > \frac{1}{4} \quad (156)$$

のように表すことができるから、次に示す2つのタイプを考えれば良いことになる。

$$\mathcal{A} \equiv \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx, \quad \mathcal{B} \equiv \int_b^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} dx \quad (157)$$

\mathcal{A} に対しては

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \sin \theta \rightarrow \mathcal{A} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) d\theta \quad (158)$$

と式変形することによって、 θ に関する積分には特異性が無いことが分かる。同様の考え方によって \mathcal{B} に対しては、次のように変数変換を行えば良い。

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \sqrt{u^2 + 1} \rightarrow \mathcal{B} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{u^2 + 1}} du \quad (159)$$

7.2 半無限積分に対する処理

(146)–(148) 式には $-\infty < k < k_1$ での積分と $k_4 < k < \infty$ での積分があるが、この半無限積分を数値積分だけで行うには $|k| \rightarrow \infty$ での収束性の保証の点で問題があり、実用的とは言えない。そこで $|k| \rightarrow \infty$ での収束を早めるために

$$\begin{aligned} & \int_{k_4}^{\infty} |C(k)|^2 \frac{\kappa(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk \\ &= \int_{k_4}^{\infty} |C(k)|^2 \frac{(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2})(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk + \mathcal{R}_4 - \mathcal{T}_4 k_0 \cos \beta \end{aligned} \quad (160)$$

ここで

$$\mathcal{R}_4 \equiv \int_{k_4}^{\infty} |C(k)|^2 k dk, \quad \mathcal{T}_4 \equiv \int_{k_4}^{\infty} |C(k)|^2 dk \quad (161)$$

のように式変形 [8, 9] する。(160) 式の右辺第1項目は $k \rightarrow \infty$ で収束が早いので、数値積分によって精度の高い計算が可能である。一方、(161) 式に対しては以下に示すような半解析的な方法を用いる。

まず Kochin 関数 $C(k)$ に対して部分積分を適用し、

$$C(k) = \int_{-1}^1 Q(x) e^{ikx} dx = \frac{i}{k} \int_{-1}^1 Q'(x) e^{ikx} dx \quad (162)$$

と変形する。ここで $x = \pm 1$ の船首尾は閉じており、 $Q(\pm 1) = 0$ が満たされていると仮定している。これを (161) 式に代入し、 k に関する積分を先に行うと

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_4 &= i \int_{-1}^1 Q'(x) dx \int_{-1}^1 Q^*(\xi) \mathcal{I}_4(\xi - x) d\xi \\ \mathcal{T}_4 &= \int_{-1}^1 Q(x) dx \int_{-1}^1 Q^*(\xi) \mathcal{I}_4(\xi - x) d\xi \\ \mathcal{I}_4(\xi - x) &\equiv \int_{k_4}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = \pi \delta(\xi - x) - i \frac{e^{-ik_4(\xi-x)}}{\xi - x} \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

と表すことができる。ここで $k \rightarrow \infty$ での極限に対して次の関係式を用いている。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos k(\xi - x)}{\xi - x} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin k(\xi - x)}{\xi - x} = \pi \delta(\xi - x) \quad (164)$$

(163) 式におけるデルタ関数 $\pi \delta(\xi - x)$ の寄与は、 $-\infty < k < k_1$ での半無限積分を考えると丁度キャンセルする項が在るので、最終的には考慮しなくても良い。なぜなら (160) 式と同様の式変形を考えると

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{k_1} |C(k)|^2 \frac{\kappa(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk \\
& = \int_{k_1}^{-\infty} |C(k)|^2 \frac{(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2})(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk + \mathcal{R}_1 - \mathcal{T}_1 k_0 \cos \beta
\end{aligned} \tag{165}$$

ここで

$$\mathcal{R}_1 \equiv \int_{k_1}^{-\infty} |C(k)|^2 k dk, \quad \mathcal{T}_1 \equiv \int_{k_1}^{-\infty} |C(k)|^2 dk \tag{166}$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= i \int_{-1}^1 Q'(x) dx \int_{-1}^1 Q^*(\xi) \mathcal{I}_1(\xi - x) d\xi \\
\mathcal{T}_1 &= \int_{-1}^1 Q(x) dx \int_{-1}^1 Q^*(\xi) \mathcal{I}_1(\xi - x) d\xi \\
\mathcal{I}_1(\xi - x) &\equiv \int_{k_1}^{-\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = -\pi \delta(\xi - x) - i \frac{e^{-ik_1(\xi-x)}}{\xi - x}
\end{aligned} \right\} \tag{167}$$

となるから，この式での $-\pi \delta(\xi - x)$ の寄与は，(163) 式での $+\pi \delta(\xi - x)$ の寄与とキャンセルすることができるであろう。

さて，次の問題は (163) 式，(167) 式における ξ に関する特異積分の処理であるが，これは翼理論における Glauert の積分と同様に計算することができる．そのために

$$\left. \begin{aligned}
Q(x) e^{i\nu x} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta \\
c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Q(\cos \theta) e^{i\nu \cos \theta} \sin n\theta d\theta
\end{aligned} \right\} \tag{168}$$

のようにわき出し分布 $Q(x)$ が $Q(\pm 1) = 0$ を満たすフーリエ級数で表すことができれば，特異積分は

$$\int_{-1}^1 \frac{Q^*(\xi) e^{-i\nu \xi}}{\xi - x} d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \int_0^{\pi} \frac{\sin n\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \cos n\theta \tag{169}$$

と解析的に計算することができる．また (168) 式の両辺の微分を考えると

$$\begin{aligned}
& \{Q'(x) + i\nu Q(x)\} e^{i\nu x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \cos n\theta d\theta \\
\rightarrow & Q'(x) e^{i\nu x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \{n \cos n\theta + i\nu \sin n\theta \sin \theta\} d\theta
\end{aligned} \tag{170}$$

であるから，(163) 式および (167) 式の計算は $\nu = k_j$ ($j = 1$ または 4) と考えることによって

$$\mathcal{R}_j = \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* \int_0^{\pi} \{n \cos n\theta + ik_j \sin n\theta \sin \theta\} \cos m\theta d\theta \tag{171}$$

$$\mathcal{T}_j = i\pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* \int_0^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta \sin \theta d\theta \tag{172}$$

となる． θ に関するこれらの積分は解析的に行うことができる．

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta \sin \theta d\theta &= \frac{\pi}{4} (\delta_{m,n-1} - \delta_{m,n+1}) \\
\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta &= \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}
\end{aligned} \right\} \tag{173}$$

を用いると，結局 $\mathcal{R}_j, \mathcal{T}_j$ は次のように計算することができる．

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_j &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n |c_n|^2 + k_j \text{Im}(c_n c_{n+1}^*)] \\
\mathcal{T}_j &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(c_n c_{n+1}^*)
\end{aligned} \right\} (j = 1, 4) \tag{174}$$

ここでフーリエ級数の係数 c_n は (168) 式から分かるように $\nu = k_j$ であるから j の値によって異なる係数であることに注意する必要がある。

反対称波の Kochin 関数 $S(k)$ による抵抗増加成分の計算も同様ではあるが、(139) 式に示したように

$$S(k) = \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} \widehat{S}(k), \quad \widehat{S}(k) = \int_{-1}^1 M(x) e^{ikx} dx \quad (175)$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_{k_4}^{\infty} |S(k)|^2 \frac{\kappa(k - k_0 \cos \beta)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk &= \int_{k_4}^{\infty} |\widehat{S}(k)|^2 \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} (k - k_0 \cos \beta) dk \\ &= \int_{k_4}^{\infty} |\widehat{S}(k)|^2 \frac{(\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa)}{\kappa} (k - k_0 \cos \beta) dk + \widehat{\mathcal{R}}_4 - \widehat{\mathcal{T}}_4 k_0 \cos \beta \end{aligned} \quad (176)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_j &\equiv \int_{k_j}^{\infty} |\widehat{S}(k)|^2 k dk = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [n |s_n|^2 + k_j \text{Im}(s_n s_{n+1}^*)] \\ \widehat{\mathcal{T}}_j &\equiv \int_{k_j}^{\infty} |\widehat{S}(k)|^2 dk = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(s_n s_{n+1}^*) \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

$$s_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M(\cos \theta) e^{ik_j \cos \theta} \sin n\theta d\theta \quad (178)$$

のように計算することになる。

最後に波浪中抵抗増加の無次元値については、 x 座標ならびにフーリエ変換の変数 (波数) k は $a (= L/2)$ を用いて無次元化されていると考えると、 $C(k)$, $S(k)$ は長さ a の次元を有するので、(146) 式より $\rho g \zeta_a^2 a$ の次元となる。そこで、慣例的に使われている表示式に従って

$$R'_{AW} \equiv \frac{\overline{R}}{\rho g \zeta_a^2 (B^2/L)} = \frac{\overline{R}}{\rho g \zeta_a^2 a} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (179)$$

と表すことにすれば、(146) 式で計算される値に $\frac{1}{2}(a/b)^2$ を掛ければよいということになる。

7.3 定常横力の計算

波浪による定常横力の計算式は (147) 式であるが、 $S(k)$ として (175) 式を用いることに注意し、半無限積分の処理方法 [8] を中心として以下に説明する。(147) 式の右辺第 1 項に関連して次式を考える。

$$\begin{aligned} \int_{\nu}^{\infty} \kappa \text{Im} \{ C(k) S^*(k) \} dk &= \int_{\nu}^{\infty} \sqrt{\kappa^2 - k^2} \text{Im} \{ C(k) \widehat{S}^*(k) \} dk \\ &= \int_{\nu}^{\infty} (\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa) \text{Im} \{ C(k) \widehat{S}^*(k) \} dk + \left(K \mathcal{Y}_0 + 2\tau \mathcal{Y}_1 + \frac{1}{K_0} \mathcal{Y}_2 \right) \end{aligned} \quad (180)$$

ここで

$$\mathcal{Y}_n \equiv \text{Im} \int_{\nu}^{\infty} k^n C(k) \widehat{S}^*(k) dk, \quad n = 0, 1, 2 \quad (181)$$

である。(180) 式の右辺第 1 項に対してはガウス積分法などによる数値積分を行えば良いので、(181) 式の計算を半解析に行うことを考える。

Kochin 関数 $C(k)$, $\widehat{S}(k)$ としてそれぞれ (162) 式, (176) 式を代入し、 $Q(\pm 1) = 0$, $M(\pm 1) = 0$ の条件を用いて部分積分を行うと、抵抗増加に対する (163) 式と同様な理由によって次式のように表すことができる。(ただし、簡略化のために、 Im の記号を省いていることに注意のこと。)

$$\mathcal{Y}_0 = \int_{-1}^1 Q(x) dx \int_{-1}^1 M^*(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = -i \int_{-1}^1 Q(x) e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M^*(\xi) e^{-i\nu \xi}}{\xi - x} d\xi \quad (182)$$

$$\mathcal{Y}_1 = i \int_{-1}^1 Q'(x) dx \int_{-1}^1 M^*(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = \int_{-1}^1 Q'(x) e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M^*(\xi) e^{-i\nu \xi}}{\xi - x} d\xi \quad (183)$$

$$\mathcal{Y}_2 = \int_{-1}^1 Q'(x) dx \int_{-1}^1 M'^*(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = -i \int_{-1}^1 Q'(x) e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M'^*(\xi) e^{-i\nu \xi}}{\xi - x} d\xi \quad (184)$$

ξ についての特異積分に対しては、(169) 式の公式ならびに (170) 式を用いて得られる計算公式

$$\int_{-1}^1 \frac{M^*(\xi) e^{-i\nu\xi}}{\xi - x} d\xi = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} s_n^* \cos n\theta \quad (185)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{M^{*'}(\xi) e^{-i\nu\xi}}{\xi - x} d\xi &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n^* \int_0^\pi \frac{i\nu \sin n\varphi \sin \varphi - n \cos n\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} d\varphi \\ &= -\pi \sum_{n=1}^{\infty} s_n^* \left[i\nu \cos n\theta + n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (186)$$

の結果を代入する．さらに (168) 式, (170) 式を代入すると次式を得ることができる．

$$\mathcal{Y}_0 = i\pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^\pi \cos m\theta \sin n\theta \sin \theta d\theta \quad (187)$$

$$\mathcal{Y}_1 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^\pi \left\{ n \cos n\theta + i\nu \sin n\theta \sin \theta \right\} \cos m\theta d\theta \quad (188)$$

$$\mathcal{Y}_2 = -i\pi \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^\pi \left\{ n \cos n\theta + i\nu \sin n\theta \sin \theta \right\} \left\{ i\nu \cos m\theta + m \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} \right\} d\theta \quad (189)$$

ここで θ に関する積分に対しては (173) 式ならびに

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta d\theta &= \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} \\ \int_0^\pi \frac{\cos n\theta \sin m\theta}{\sin \theta} d\theta &= \begin{cases} \pi & m > n \text{ のときで } m - n = 2\ell - 1 \text{ (奇数)} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

を用いる．最後に虚数部を取る Im の記号を省いていたことを考慮すると, 次式を得ることができる．

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^* \right) \quad (191)$$

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu \left(c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^* \right) - 2i \left(n c_n s_n^* \right) \right] \quad (192)$$

$$\mathcal{Y}_2 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu^2 \left(c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^* \right) - 4i\nu \left(n c_n s_n^* \right) - 4n c_n \sum_{\ell=1}^{\infty} (n + 2\ell - 1) s_{n+2\ell-1}^* \right] \quad (193)$$

7.4 定常回頭モーメントの計算

波浪による定常回頭モーメントの計算式 (148) 式に対しても (180) 式と同様の取り扱いが可能である．半無限積分は以下のように式変形して計算する．

$$\begin{aligned} &\int_{\nu}^{\infty} \kappa \text{Re} \left\{ C'(k) S^*(k) - S'(k) C^*(k) \right\} dk \\ &= \int_{\nu}^{\infty} \left(\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa \right) \text{Re} \left\{ C'(k) \widehat{S}^*(k) - \widehat{S}'(k) C^*(k) \right\} dk \\ &\quad + K \left(\mathcal{N}_0 - \widetilde{\mathcal{N}}_0 \right) + 2\tau \left(\mathcal{N}_1 - \widetilde{\mathcal{N}}_1 \right) + \frac{1}{K_0} \left(\mathcal{N}_2 - \widetilde{\mathcal{N}}_2 \right) \end{aligned} \quad (194)$$

ここで

$$\mathcal{N}_n \equiv \int_{\nu}^{\infty} k^n \text{Re} \left\{ C'(k) \widehat{S}^*(k) \right\} dk, \quad n = 0, 1, 2 \quad (195)$$

$$\widetilde{\mathcal{N}}_n \equiv \int_{\nu}^{\infty} k^n \text{Re} \left\{ \widehat{S}'(k) C^*(k) \right\} dk, \quad n = 0, 1, 2 \quad (196)$$

である．(194) 式の右辺第 1 項は収束が早いのでガウス積分法などによる数値積分で行えば良い．また (195) 式と (196) 式はフーリエ級数の係数 c_n , s_n を入れ替えれば良いだけである．そこで, 以下では (195) 式について考えることにしよう．

$C'(k)$, $\widehat{S}'(k)$ は (150) 式のように計算するので, $\mathcal{N}_0 \sim \mathcal{N}_2$ は次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_0 &= \operatorname{Re} \int_{-1}^1 ixQ(x) dx \int_{-1}^1 M^*(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk = \operatorname{Re} \int_{-1}^1 xQ(x) e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M^*(\xi) e^{-i\nu\xi}}{d\xi} \\ &= -\pi \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^{\pi} \cos \theta \sin n\theta \cos m\theta \sin \theta d\theta\end{aligned}\quad (197)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 &= -\operatorname{Re} \int_{-1}^1 \left\{ Q(x) + xQ'(x) \right\} dx \int_{-1}^1 M^*(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk \\ &= \operatorname{Re} i \int_{-1}^1 \left\{ Q(x) + xQ'(x) \right\} e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M^*(\xi) e^{-i\nu\xi}}{\xi - x} d\xi \\ &= \operatorname{Re} (-\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta \sin \theta d\theta \\ &\quad + \operatorname{Re} (\pi i) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^{\pi} \left\{ n \cos n\theta + i\nu \sin n\theta \sin \theta \right\} \cos \theta \cos m\theta d\theta\end{aligned}\quad (198)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2 &= \operatorname{Re} i \int_{-1}^1 \left\{ Q(x) + xQ'(x) \right\} dx \int_{-1}^1 M^{*\prime}(\xi) d\xi \int_{\nu}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk \\ &= \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \left\{ Q(x) + xQ'(x) \right\} e^{i\nu x} dx \int_{-1}^1 \frac{M^{*\prime}(\xi) e^{-i\nu\xi}}{\xi - x} d\xi \\ &= -\pi \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^{\pi} \sin n\theta (i\nu \cos m\theta \sin \theta + m \sin m\theta) d\theta \\ &\quad + \pi \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{m=1}^{\infty} s_m^* \int_0^{\pi} \left\{ n \cos n\theta + i\nu \sin n\theta \sin \theta \right\} \cos \theta \left\{ i\nu \cos m\theta + m \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} \right\} d\theta\end{aligned}\quad (199)$$

θ に関する積分は, これまでに用いた (173) 式, (190) 式に加えて

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos m\theta \sin n\theta \cos \theta \sin \theta d\theta &= \frac{\pi}{8} (\delta_{1,1} + \delta_{m,n-2} - \delta_{m,n+2}) \\ \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \cos \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{4} (\delta_{m,n-1} + \delta_{m,n+1})\end{aligned}\right\} \quad (200)$$

の計算公式を用いる. これらを代入し, (194) 式で示すように c_n , s_n を入れ替えた式との差の実数部分を取ることで, 最終的に寄与しない項 (例えば $c_1 s_1^* - s_1 c_1^*$ など) を省略すると, 以下に示す結果となる.

$$\mathcal{N}_0 = -\frac{\pi^2}{8} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) \quad (201)$$

$$\mathcal{N}_1 = -\frac{\pi^2}{8} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) - 2i \left\{ n c_{n+1} s_n^* + (n+1) c_n s_{n+1}^* \right\} \right] \quad (202)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2 &= -\frac{\pi^2}{8} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\nu^2 (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) - 4i\nu \left\{ n c_{n+1} s_n^* + (n+1) c_n s_{n+1}^* \right\} \right. \\ &\quad \left. - 4n c_n \sum_{\ell=1}^{\infty} \left\{ (n+2\ell) s_{n+2\ell}^* + (n+2\ell-2) s_{n+2\ell-2}^* \right\} \right]\end{aligned}\quad (203)$$

(196) 式の $\widetilde{\mathcal{N}}_n$ に関しては, 既に述べているように, (201)–(203) 式において $c_n \rightarrow s_n$, $s_n^* \rightarrow c_n^*$ とすれば良い. そして (194) 式に示すように, 最終的には $\mathcal{N}_n - \widetilde{\mathcal{N}}_n$ の計算をすることになる.

定常横力 \bar{Y} , 定常回頭モーメント \bar{N} の無次元値については, 抵抗増加の (179) 式と同様に考えれば良いので, \bar{Y} は $\rho g \zeta_a^2 a$, \bar{N} は $\rho g \zeta_a^2 a^2$ の次元となっている. それを用いて以下のように表すことにする.

$$\left. \begin{aligned}Y'_{AW} &\equiv \frac{\bar{Y}}{\rho g \zeta_a^2 (B^2/L)} = \frac{\bar{Y}}{\rho g \zeta_a^2 a} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \\ N'_{AW} &\equiv \frac{\bar{N}}{\rho g \zeta_a^2 LB} = \frac{\bar{N}}{\rho g \zeta_a^2 a^2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} \right)\end{aligned}\right\} \quad (204)$$

7.5 数値計算式のまとめ

計算プログラムを作成する便宜のため、積分範囲ごとに数値計算に用いる式を整理しておこう。以下では(146)–(148)式の最初の係数 $1/(4\pi k_0)$ を省いて考えることにする。

$$\mathcal{J}_1 \equiv - \int_{-\infty}^{k_1} \frac{F_1(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = - \int_0^{\infty} \frac{f_1(k)}{\sqrt{u^2 + 1}} du + \mathcal{R}(k_1) \quad (205)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(k) &= \frac{\mathcal{F}_1(-k)}{\sqrt{\frac{\lambda(k)+k}{K_0}}}, & \frac{\lambda(k)+k}{K_0} &= \left(\frac{k}{K_0}\right)^2 + (1-2\tau)\frac{k}{K_0} + \tau^2 \\ k &= \frac{k_2 - k_1}{2} \sqrt{u^2 + 1} - \frac{k_2 + k_1}{2} \rightarrow \frac{k}{K_0} = -\frac{1}{2} \frac{k_1}{K_0} \left\{ \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) \sqrt{u^2 + 1} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

1) 抵抗増加 $\mathcal{F}_1(-k) = \left\{ |C(-k)|^2 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda} |\hat{S}(-k)|^2 \right\} (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - k^2}) (-k - k_0 \cos \beta) \quad (207)$

$$\mathcal{R}(k_1) = \mathcal{R}_1 + \hat{\mathcal{R}}_1 - (\mathcal{T}_1 + \hat{\mathcal{T}}_1) k_0 \cos \beta \quad (208)$$

2) 定常横力 $\mathcal{F}_1(-k) = \text{Im} \left\{ 2C(-k) \hat{S}(-k) \right\} (\sqrt{\lambda^2 - k^2} - \lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + \left\{ |C(-k)|^2 - \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{\lambda} |\hat{S}(-k)|^2 \right\} (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - k^2}) (-k_0 \sin \beta) \quad (209)$

$$\mathcal{R}(k_1) = 2 \left(K \mathcal{Y}_0 + 2\tau \mathcal{Y}_1 + \frac{1}{K_0} \mathcal{Y}_2 \right) - (\mathcal{T}_1 + \hat{\mathcal{T}}_1) k_0 \sin \beta \quad (210)$$

3) 定常回頭モーメント $\mathcal{F}_1(-k) = \text{Re} \left\{ C'(-k) \hat{S}^*(-k) - \hat{S}'(-k) C^*(-k) \right\} (\sqrt{\lambda^2 - k^2} - \lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2} \quad (211)$

$$\mathcal{R}(k_1) = K (\mathcal{N}_0 - \tilde{\mathcal{N}}_0) + 2\tau (\mathcal{N}_1 - \tilde{\mathcal{N}}_1) + \frac{1}{K_0} (\mathcal{N}_2 - \tilde{\mathcal{N}}_2) \quad (212)$$

$$\mathcal{J}_{23} \equiv \int_{k_2}^{k_3} \frac{F_{23}(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{23}(k) d\theta \quad (213)$$

$$f_{23}(k) = \frac{\mathcal{F}_{23}(k)}{\sqrt{\frac{(k-k_1)(k_4-k)}{K_0}}}, \quad k = \frac{k_3 - k_2}{2} \sin \theta + \frac{k_3 + k_2}{2} \quad (214)$$

1) 抵抗増加 $\mathcal{F}_{23}(k) = \left\{ |C(k)|^2 + \frac{(\kappa^2 - k^2)}{\kappa^2} |\hat{S}(k)|^2 \right\} \kappa (k - k_0 \cos \beta) \quad (215)$

2) 定常横力 $\mathcal{F}_{23}(k) = \text{Im} \left\{ 2C(k) \hat{S}(k) \right\} (\kappa^2 - k^2) + \left\{ |C(k)|^2 + \frac{(\kappa^2 - k^2)}{\kappa^2} |\hat{S}(k)|^2 \right\} \kappa (-k_0 \sin \beta) \quad (216)$

3) 定常回頭モーメント $\mathcal{F}_{23}(k) = \text{Re} \left\{ C'(k) \hat{S}^*(k) - \hat{S}'(k) C^*(k) \right\} (\kappa^2 - k^2) \quad (217)$

$$\mathcal{J}_4 \equiv \int_{k_4}^{\infty} \frac{F_4(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = \int_0^{\infty} \frac{f_4(k)}{\sqrt{u^2 + 1}} du + \mathcal{R}(k_4) \quad \text{for } \tau < \frac{1}{4} \quad (218)$$

$$\left. \begin{aligned} f_4(k) &= \frac{\mathcal{F}_4(k)}{\sqrt{\frac{\kappa(k)+k}{K_0}}}, & \frac{\kappa(k)+k}{K_0} &= \left(\frac{k}{K_0}\right)^2 + (1+2\tau)\frac{k}{K_0} + \tau^2 \\ k &= \frac{k_4 - k_3}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{k_4 + k_3}{2} \rightarrow \frac{k}{K_0} = \frac{1}{2} \frac{k_4}{K_0} \left\{ \left(1 - \frac{k_3}{k_4}\right) \sqrt{u^2 + 1} + \left(1 + \frac{k_3}{k_4}\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

1) 抵抗増加

$$\mathcal{F}_4(k) = \left\{ |C(k)|^2 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} |\widehat{S}(k)|^2 \right\} (\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2}) (k - k_0 \cos \beta) \quad (220)$$

$$\mathcal{R}(k_4) = \mathcal{R}_4 + \widehat{\mathcal{R}}_4 - (\mathcal{T}_4 + \widehat{\mathcal{T}}_4) k_0 \cos \beta \quad (221)$$

2) 定常横力

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4(k) = & \operatorname{Im} \left\{ 2C(k) \widehat{S}(k) \right\} (\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa) \sqrt{\kappa^2 - k^2} \\ & + \left\{ |C(k)|^2 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} |\widehat{S}(k)|^2 \right\} (\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2}) (-k_0 \sin \beta) \end{aligned} \quad (222)$$

$$\mathcal{R}(k_4) = 2 \left(K \mathcal{Y}_0 + 2\tau \mathcal{Y}_1 + \frac{1}{K_0} \mathcal{Y}_2 \right) - (\mathcal{T}_4 + \widehat{\mathcal{T}}_4) k_0 \sin \beta \quad (223)$$

3) 定常回頭モーメント

$$\mathcal{F}_4(k) = \operatorname{Re} \left\{ C'(k) \widehat{S}^*(k) - \widehat{S}'(k) C^*(k) \right\} (\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa) \sqrt{\kappa^2 - k^2} \quad (224)$$

$$\mathcal{R}(k_4) = K (\mathcal{N}_0 - \widetilde{\mathcal{N}}_0) + 2\tau (\mathcal{N}_1 - \widetilde{\mathcal{N}}_1) + \frac{1}{K_0} (\mathcal{N}_2 - \widetilde{\mathcal{N}}_2) \quad (225)$$

$$\mathcal{J}_2 \equiv \int_{k_2}^{\infty} \frac{F_2(k)}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} dk = \int_0^{\infty} \frac{f_2(k)}{\sqrt{u^2 + 1}} du + \mathcal{R}(k_2) \quad \text{for } \tau > \frac{1}{4} \quad (226)$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(k) &= \frac{\mathcal{F}_2(k)}{\sqrt{\frac{\kappa(k) - k}{K_0}}}, & \frac{\kappa(k) - k}{K_0} &= \left(\frac{k}{K_0} \right)^2 - (1 - 2\tau) \frac{k}{K_0} + \tau^2 \\ k &= \frac{k_2 - k_1}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{k_2 + k_1}{2} \rightarrow \frac{k}{K_0} = -\frac{1}{2} \frac{k_1}{K_0} \left\{ \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \sqrt{u^2 + 1} - \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (227)$$

1) 抵抗増加

$$\mathcal{F}_2(k) = \left\{ |C(k)|^2 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} |\widehat{S}(k)|^2 \right\} (\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2}) (k - k_0 \cos \beta) \quad (228)$$

$$\mathcal{R}(k_2) = \mathcal{R}_2 + \widehat{\mathcal{R}}_2 - (\mathcal{T}_2 + \widehat{\mathcal{T}}_2) k_0 \cos \beta \quad (229)$$

2) 定常横力

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(k) = & \operatorname{Im} \left\{ 2C(k) \widehat{S}(k) \right\} (\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa) \sqrt{\kappa^2 - k^2} \\ & + \left\{ |C(k)|^2 - \frac{\sqrt{\kappa^2 - k^2}}{\kappa} |\widehat{S}(k)|^2 \right\} (\kappa - \sqrt{\kappa^2 - k^2}) (-k_0 \sin \beta) \end{aligned} \quad (230)$$

$$\mathcal{R}(k_2) = 2 \left(K \mathcal{Y}_0 + 2\tau \mathcal{Y}_1 + \frac{1}{K_0} \mathcal{Y}_2 \right) - (\mathcal{T}_2 + \widehat{\mathcal{T}}_2) k_0 \sin \beta \quad (231)$$

3) 定常回頭モーメント

$$\mathcal{F}_2(k) = \operatorname{Re} \left\{ C'(k) \widehat{S}^*(k) - \widehat{S}'(k) C^*(k) \right\} (\sqrt{\kappa^2 - k^2} - \kappa) \sqrt{\kappa^2 - k^2} \quad (232)$$

$$\mathcal{R}(k_2) = K (\mathcal{N}_0 - \widetilde{\mathcal{N}}_0) + 2\tau (\mathcal{N}_1 - \widetilde{\mathcal{N}}_1) + \frac{1}{K_0} (\mathcal{N}_2 - \widetilde{\mathcal{N}}_2) \quad (233)$$

以上の式で、フーリエ級数表示を使った $|k| \rightarrow \infty$ での漸近部分に対する解析積分の項は、以下に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Q(\cos \theta) e^{ik_j \cos \theta} \sin n\theta d\theta \\ s_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} M(\cos \theta) e^{ik_j \cos \theta} \sin n\theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, 4) \quad (234)$$

$$\mathcal{R}_j = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n |c_n|^2 + k_j \text{Im}(c_n c_{n+1}^*) \right], \quad \mathcal{T}_j = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(c_n c_{n+1}^*) \quad (235)$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_j = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n |s_n|^2 + k_j \text{Im}(s_n s_{n+1}^*) \right], \quad \widehat{\mathcal{T}}_j = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Im}(s_n s_{n+1}^*) \quad (236)$$

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^*) \quad (237)$$

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_j (c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^*) - 2i (n c_n s_n^*) \right] \quad (238)$$

$$\mathcal{Y}_2 = \frac{\pi^2}{4} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_j^2 (c_{n+1} s_n^* - c_n s_{n+1}^*) - 4i k_j (n c_n s_n^*) - 4n c_n \sum_{\ell=1}^{\infty} (n+2\ell-1) s_{n+2\ell-1}^* \right] \quad (239)$$

$$\mathcal{N}_0 = -\frac{\pi^2}{8} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) \quad (240)$$

$$\mathcal{N}_1 = -\frac{\pi^2}{8} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_j (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) - 2i \{ n c_{n+1} s_n^* + (n+1) c_n s_{n+1}^* \} \right] \quad (241)$$

$$\mathcal{N}_2 = -\frac{\pi^2}{8} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_j^2 (c_{n+2} s_n^* - c_n s_{n+2}^*) - 4i k_j \{ n c_{n+1} s_n^* + (n+1) c_n s_{n+1}^* \} - 4n c_n \sum_{\ell=1}^{\infty} \{ (n+2\ell) s_{n+2\ell}^* + (n+2\ell-2) s_{n+2\ell-2}^* \} \right] \quad (242)$$

$\widetilde{\mathcal{N}}_n$ に関しては, (240)-(242) 式において $c_n \rightarrow s_n$, $s_n^* \rightarrow c_n^*$ とする. そして最終的には $\mathcal{N}_n - \widetilde{\mathcal{N}}_n$ の計算をすることになる.

無次元表示

$$\left. \begin{aligned} R'_{AW} &\equiv \frac{\bar{R}}{\rho g \zeta_a^2 (B^2/L)} = \frac{\bar{R}}{\rho g \zeta_a^2 a} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \\ Y'_{AW} &\equiv \frac{\bar{Y}}{\rho g \zeta_a^2 (B^2/L)} = \frac{\bar{Y}}{\rho g \zeta_a^2 a} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \\ N'_{AW} &\equiv \frac{\bar{N}}{\rho g \zeta_a^2 L B} = \frac{\bar{N}}{\rho g \zeta_a^2 a^2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

8. 計算例

Surge に関する radiation 流体力や diffraction 問題での波の船首反射の影響を本稿で示したストリップ法で計算するためには, 船体長手方向に直角な横断面内でのガス線上の各点において法線ベクトルの x 成分 n_x が何らかの方法で与えられることが前提である. 法線ベクトルは数式船型では解析的に求められるが, 実船型ではオフセットデータから計算点の近傍をパネル近似し, 形状関数を使った内挿計算によって数値的に求める必要がある. やや面倒ではあるが計算は可能である.

8.1 計算対象モデル

本稿の目的は計算法の流れを理解すること, 特に diffraction 問題において, 各横断面での物体表面境界条件を厳密に満たす“直接解”と相対速度近似を使う NSM ならびにグリーンの公式を使う STF 法による結果との関係を理解することであるので, 取り扱い易い数式船型の slender modified Wigley モデル [10, 11] を計算対象とする. これは以下の式で表される.

$$\eta = (1 - \zeta^2)(1 - \xi^2)(1 + 0.2\xi^2) + \zeta^2(1 - \zeta^8)(1 - \xi^2)^4 \quad (244)$$

ただし

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \zeta = z/d$$

である。船体表面形状を $F(x, y, z) = 0$ と与えるなら, (244) 式より次式とすればよい。

$$F(x, y, z) \equiv \eta - (1 - \zeta^2)(1 - \xi^2)(1 + 0.2\xi^2) - \zeta^2(1 - \zeta^8)(1 - \xi^2)^4 \quad (245)$$

このとき, 法線ベクトルは $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ によって計算される。(245) 式を解析的に微分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{2\xi}{a} \left\{ (1 - \zeta^2)(0.8 + 0.4\xi^2) + 4\zeta^2(1 - \zeta^8)(1 - \xi^2)^3 \right\} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{2\zeta}{d} (1 - \xi^2) \left\{ 1 + 0.2\xi^2 - (1 - 5\zeta^8)(1 - \xi^2)^3 \right\} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{b} \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

を得るから, これより法線ベクトルが求められる。

また (244) 式から排水容積 ∇ , 水線面積 A_W , 浮心 \overline{OB} , 縦メタセンタ半径 \overline{BM}_L , 横メタセンタ半径 \overline{BM} なども解析的に求めることができ, それらの値は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= 0.56073 LBd, \quad A_W = 0.69333 LB, \quad \overline{OB} = 0.42990 d \\ \overline{BM}_L &= 0.25817 a^2/d, \quad \overline{BM} = 0.29088 b^2/d, \quad (a = L/2, b = B/2) \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

また重心位置の z 方向の値 ℓ_z , 慣動半径の値 $\kappa_{xx}/B, \kappa_{yy}/L, \kappa_{zz}/L$ も船体運動の計算時には必要となるが, これらは実験計測時の状態によって異なる。計算例として使った値 (数値計算での出力例) を Fig. 5 に示す。

8.2 計算結果の一例

計算結果のうち, radiation 流体力は参考文献 [2] に示した NSM による結果と基本的に同じはずであるので, 本稿では省略する。Diffraction 流体力 (波浪強制力) に関しては, 本稿での直接解 (“EXACT” と記す), NSM による値 (“NSM” と記す), ならびに STF 法による値 (“STF” と記す) の 3 つが 1 回の計算で同時に求められる。FORTRAN によるサンプルプログラムでは, それらの数字上での違いをコンピュータ画面で確認できるようにしているが, その一例を Fig. 6 に示す。

この計算結果は, 出力として示しているように, フルード数 $Fn = 0.15$, 波長・船長比 $\lambda/L = 1.2$, 入射角 $\beta = 135 \text{ deg}$ に対するものである。 $\beta = 135 \text{ deg}$ の斜波中であるため, 6 自由度すべてのモードでゼロではない波浪強制力の値が求まっている。なお, 3 つの方法での Froude-Krylov 力・モーメントの計算値はすべて同じであり, 違いは scattering 力・モーメントのみに在る。

```

*****
      IMPROVED NEW STRIP METHOD (INSM)
      RADIATION & DIFFRACTION THEORY FOR A SHIP
      WITH FORWARD SPEED IN OBLIQUE WAVES
*****

NUMBER OF DIVISION IN THE X-DIRECTION (NX)= 60
NUMBER OF DIVISION OVER BODY SURFACE (NB)= 30

LENGTH IN THE X-AXIS-----ALEN(IN METER)= 2.0000
DO. IN THE Y-AXIS-----BRED(IN METER)= 0.3000
DO. IN THE Z-AXIS-----DRFT(IN METER)= 0.1250

CENTER OF GRAVITY (IN METER)----- (OG)= 0.04040
METACENTRIC HEIGHT IN PITCH (IN METER)----= 2.05199
METACENTRIC HEIGHT IN ROLL (IN METER)----= 0.03902

RADIUS OF GYRATION ABOUT X-AXIS (KXX/B)----= 0.35000E+00
RADIUS OF GYRATION ABOUT Y-AXIS (KYY/L)----= 0.24800E+00
RADIUS OF GYRATION ABOUT Z-AXIS (KZZ/L)----= 0.24800E+00

NONDIM. VALUE C35/WAREA/(L/2) (C35)----= 0.00000E+00
NONDIM. VALUE C55/WAREA/(L/2)**2 (C55)----= 0.20744E+00
NONDIM. VALUE C44/WAREA/(B/2)**2 (C44)----= 0.17533E+00

```

Fig. 5 計算例における入力データ

```

FROUDE NUMBER-----FR=U/SQRT(G*LPP)= 0.1500
RATIO OF WAVE-LENGTH TO SHIP-LENGTH---RLPP= 1.2000
INCIDENT ANGLE OF WAVE-----BETA(DEG)= 135.000

NONDIM. INCIDENT WAVE NUMBER-----WK*L/2= 0.2618E+01
NONDIM. ENCOUNTER WAVE NUMBER-----K*L/2= 0.4043E+01

HANAOKA'S PARAMETER (W*U/G)-----TAU= 0.4265E+00
VALUE TO BE USED IN R&D FORCE-----U/(WE*A)= 0.1055E+00

```

***** DIFFRACTION FORCE & MOMENT ((RAMDA/LPP= 1.200 BETA= 135.000 DEG)) *****

	((EXACT))		((NSM))		((STF))	
	AMP	PHASE	AMP	PHASE	AMP	PHASE
** SURGE **	0.1041E+00	103.568 DEG	0.1050E+00	101.177 DEG	0.1041E+00	103.567 DEG
** HEAVE **	0.4117E+00	24.179 DEG	0.4032E+00	19.996 DEG	0.4117E+00	24.179 DEG
** PITCH **	0.1048E+00	-80.142 DEG	0.1051E+00	-81.775 DEG	0.1048E+00	-80.142 DEG
** SWAY **	0.2411E+00	-116.480 DEG	0.2433E+00	-116.426 DEG	0.2411E+00	-116.480 DEG
** ROLL **	0.3533E-02	58.424 DEG	0.2279E-02	25.284 DEG	0.3527E-02	58.499 DEG
** YAW **	0.7399E-01	-22.928 DEG	0.7020E-01	-22.303 DEG	0.7398E-01	-22.928 DEG

WAVE-INDUCED SHIP MOTIONS (R/L= 1.200 BETA= 135.000 DEG)

	((IMPROVED, EXACT NSM))		((CONVENTIONAL NSM))	
	AMP	PHASE	AMP	PHASE
SURGE	0.2608E+00	-107.500 DEG	0.2645E+00	-109.897 DEG
SWAY	0.2007E+00	94.787 DEG	0.1965E+00	95.346 DEG
HEAVE	0.9919E+00	-4.712 DEG	0.9640E+00	-8.357 DEG
ROLL	0.1997E+01	87.546 DEG	0.2107E+01	88.485 DEG
PITCH	0.8722E+00	-109.199 DEG	0.8830E+00	-111.078 DEG
YAW	0.2160E+00	177.197 DEG	0.2066E+00	177.671 DEG

Fig.6 Slender modified Wigely モデルに対する計算結果の一例

この出力例からも分かるように、物体表面境界条件を厳密に満たす直接解と STF 法による結果は数字上でも殆ど同じである。すなわち細長船近似によっても、(77) 式と (79) 式で示した ϕ_7 と ϕ_j^- に対するグリーンの公式が精度良く満足されているということである。一方、(28) 式あるいは (72) 式で示したように、横断面内で変化する指数関数部分を相対速度近似を使って一定値に置き換え、radiation 問題の速度ポテンシャルによって計算している NSM の結果と比べると、EXACT や STF の値と若干の違いが見られる。これらの違いが船体運動の計算値にどの程度の差として現れるのかを数字で確認するために Fig.6 に示した出力例には 6 自由度の船体運動の振幅・位相差を “EXACT” と “NSM” の両方に対して横並びで示している。(“STF” による結果は、波浪強制力の結果が “EXACT” と同じであるので、船体運動では省略している。) Fig.6 の出力には CONVENTIONAL NSM と書いているが、本稿の計算では scattering ポテンシャルの近似式に surge の速度ポテンシャル ϕ_1 の影響も含めており、また斜波中での相対速度近似には (27) 式の c_β の値を用いている点が参考文献 [2] に示されている NSM の結果と異なるので注意を要する。

8.3 考察

波長 (周波数) に対する応答特性を見るために、 $Fn = 0.15$, $\beta = 135 \text{ deg}$ について波長・船長比 λ/L を 0.3 ~ 3.0 まで変化させて計算した。まず Fig.7 に波浪強制力・モーメントの結果をすべてのモード ($j = 1 \sim 6$) に対して示し、Fig.8 には波浪中での運動応答の結果をやはりすべてのモード ($j = 1 \sim 6$) に対して無次元値で示している。波浪強制力については Fig.6 で示したように、1 回の計算で (1) scattering ポテンシャルの直接解を用いた “EXACT” の値、(2) 相対速度近似を用いた “NSM” の値、(3) ϕ_7 と ϕ_j^- に対してグリーンの公式を適用し、逆流れ radiation ポテンシャル ϕ_j^- の積分から得られた “STF” の値の 3 つが求められる。EXACT は実線、NSM は破線、STF は ○ 印で示しているが、まず EXACT の結果と STF による結果はグラフ上では完全に同じであることが分かる。また NSM による値も EXACT の値とほぼ同じであるが、sway ($j = 2$), yaw ($j = 6$) の短波長域ならびに roll ($j = 4$) の波浪強制モーメントに少し差が見られる。しかし roll モーメントの値自体が小さいので、実用的には問題は無いと考えられる。

次に運動応答の結果を見ると、ここでも EXACT の結果と NSM による結果には殆ど差はなく、短波長域での

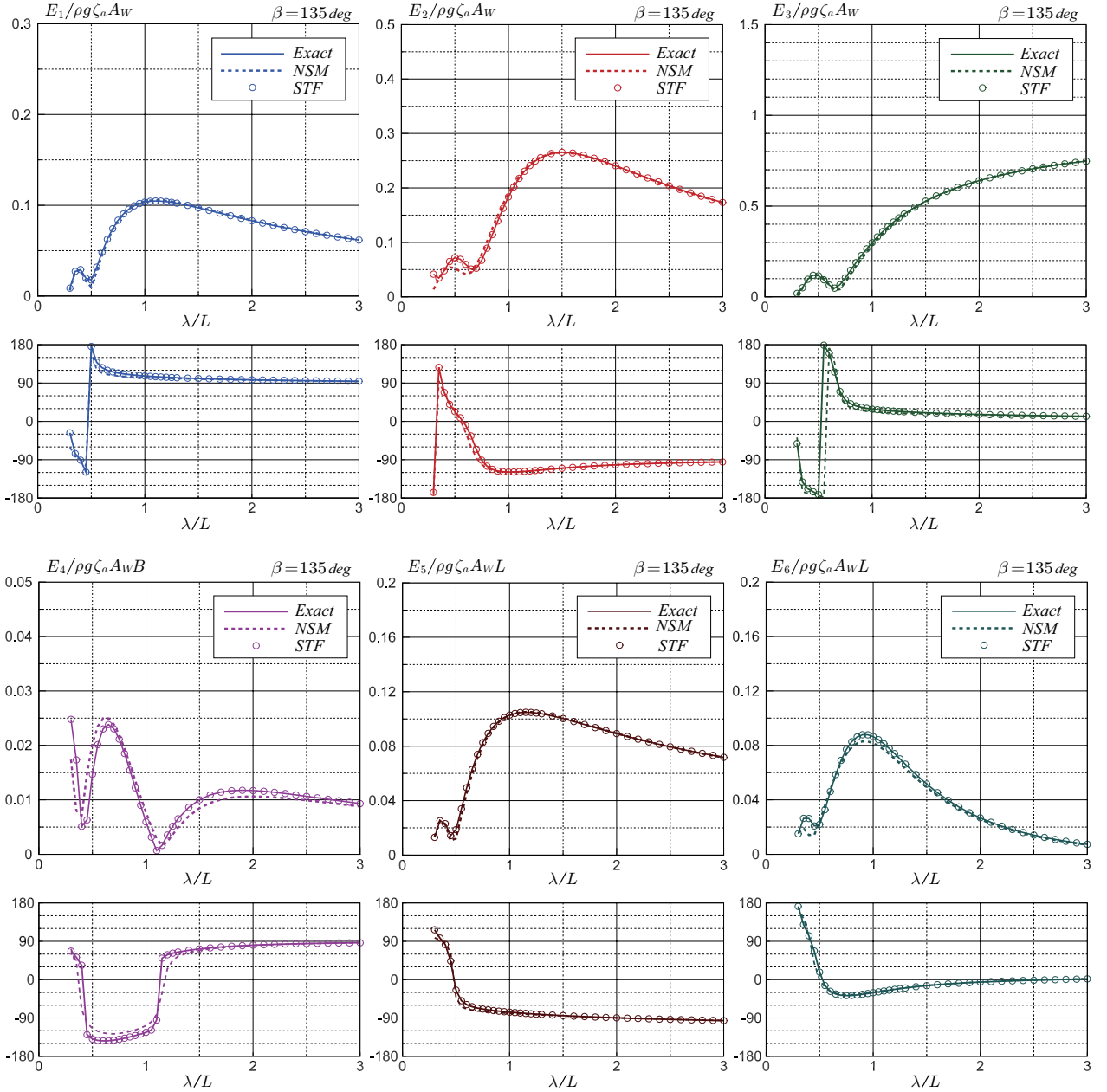


Fig. 7 Slender modified Wigley モデルに働く波浪強制力の計算結果 ($F_n = 0.15$, $\beta = 135 \text{ deg}$)

位相差ならびに heave ($j = 3$) のピーク付近で少し差が見られる程度である。Roll ($j = 4$) の値が $\lambda/L = 1.5$ 付近で非常に大きくなっているが、これは $\lambda/L = 1.5$ に対応する周波数が roll の固有周波数に近いためである。実際、roll の単独モードでの固有周波数を算定してみると、roll の付加質量を $A_{44} = m(\alpha B)^2$ と表せば、今回の計算では Fig. 5 での入力値を使って

$$\frac{\omega^2}{g}L = \frac{\overline{GM}/B}{(\kappa'_{xx})^2 + \alpha^2} \left(\frac{L}{B} \right) = \frac{0.8671}{(0.350)^2 + \alpha^2} \leftarrow \frac{\overline{GM}}{B} = 0.130 \quad (248)$$

となる。 $\lambda/L = 1.5$ では $k_0L = 2\pi L/\lambda = 4.189$ であるから $\beta = 135 \text{ deg}$, $F_n = 0.15$ での対応する出会い円周波数ならびにそれから求めた係数 α の値は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{g}L &= \left(\sqrt{k_0L} - k_0L F_n \cos \beta \right)^2 = 6.2045 \\ \rightarrow \alpha^2 &= \frac{0.8671}{6.2045} - (0.350)^2 \rightarrow \alpha = 0.131 \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

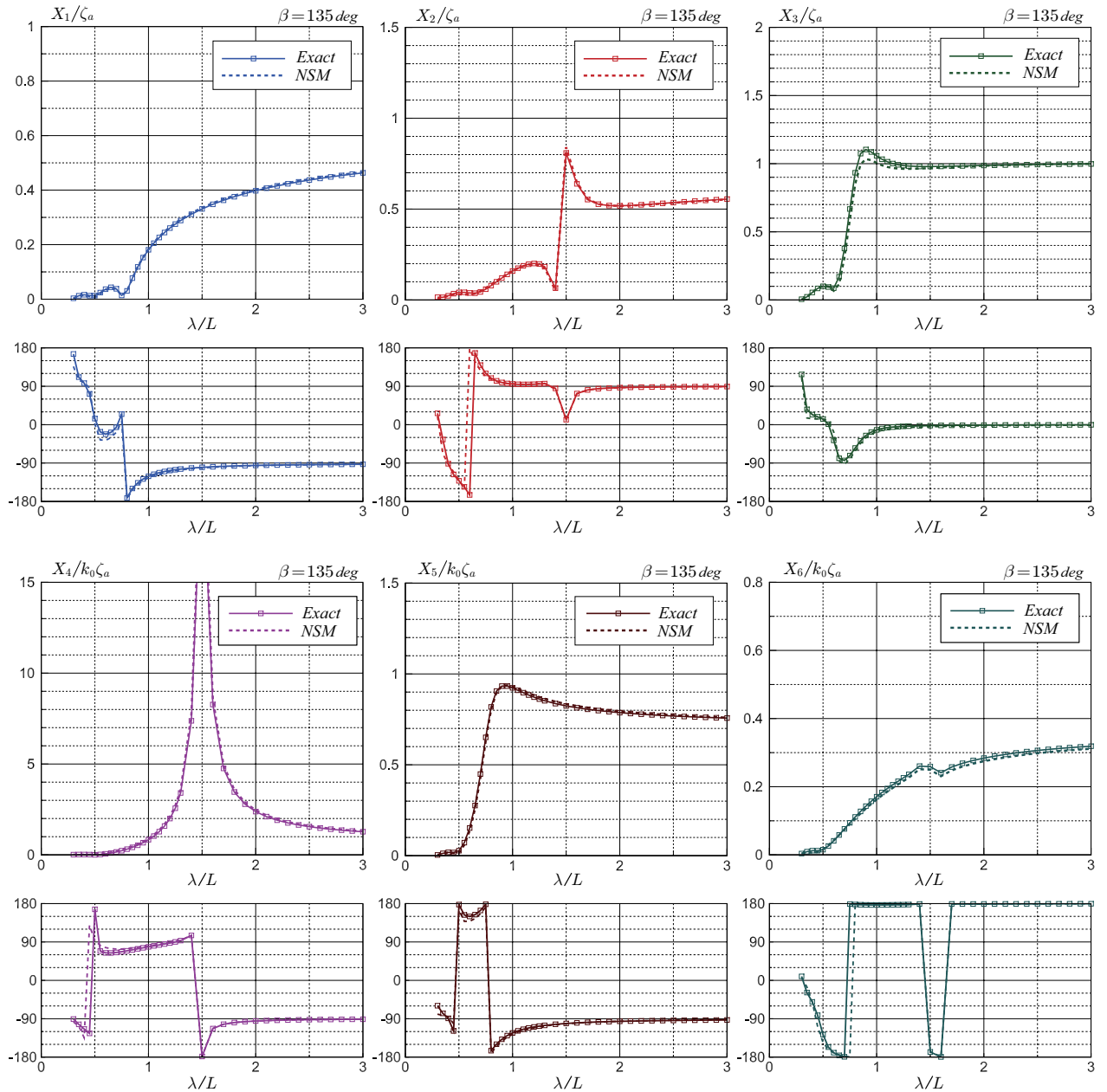


Fig. 8 Slender modified Wigley モデルの波浪中運動の計算結果 ($F_n = 0.15$, $\beta = 135 \text{ deg}$)

となり、確かに $\lambda/L = 1.5$ は roll の同調現象が起こり得る波長・船長比である。

この roll の同調現象の影響を受け、運動が roll と連成している sway ($j = 2$), yaw ($j = 6$) においても $\lambda/L = 1.5$ 付近で急激な変化が起きていることが見てとれる。一方、heave ($j = 3$) と pitch ($j = 5$) の値がピークを取る波長・船長比はともに $\lambda/L < 1.0$ となっているが、これは $\beta = 135 \text{ deg}$ ($\cos \beta = -0.7071$) の斜波の影響であり、正面向い波中での同調周波数よりも短波長（高周波数）側へシフトする。これらの同調周波数に対応する波長の値は抵抗増加などの波浪定常流体力の特性を理解する上で重要な情報である。

最後に波浪による定常流体力（抵抗増加 \bar{R} , 定常横力 \bar{Y} ）ならびに定常回頭モーメント（ \bar{N} ）の計算結果を無次元値で Fig. 9 に示している。浮体の運動を固定 (fixed) した場合すなわち diffraction 問題での結果ならびに 6 自由度すべての運動を自由 (free) とした場合の結果を違う色・マークで同じ図中に示している。さらに、入射波の船首反射（法線ベクトルの x 成分 n_x ）の影響を物体表面境界条件に考慮して求めた scattering ポテンシャルの直接解から Kochin 関数を計算し、第 7 節で示した積分法によって求めた値を

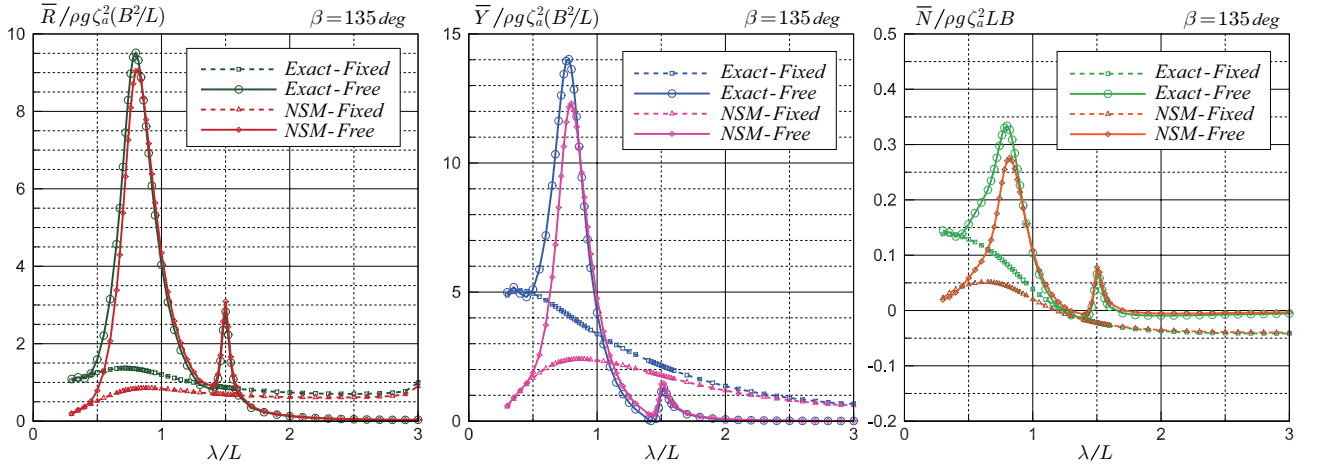


Fig. 9 Slender modified Wigley モデルに働く波浪による定常流体力の計算結果 ($Fn = 0.15$, $\beta = 135$ deg)

“EXACT”として示している。また、相対速度近似によって scattering ポテンシャルを radiation ポテンシャルで置き換えて求め、それから全く同じ計算手順によって求めた定常流体力の値を“NSM”として示している。NSMでも境界条件における n_x の影響を surge の radiation ポテンシャルで（近似的にとは言え）表していると考えられるが、短波長域での計算結果を見ると、EXACT と NSM では大きな違いがあることが分かる。このことから、波浪定常流体力の計算においては、やはり diffraction 問題の直接解を用いることが重要であると言える。この結論は EUT [6] による diffraction 問題の数値解を用いた波浪定常流体力の計算と基本的に同じであるということを確認しておきたい。また、斜波中だけに限らず全ての波向きに対して、横流れ現象が顕著な短波長域での波浪定常流体力（特に定常横力）を正確に推定できることは、最近多くの研究が行われている波浪中での操縦運動シミュレーション [12] において、より正確なシミュレーションを行うためのキーポイントであるということも強調しておきたい。

Fig. 9 の結果を見ると、どの定常流体力成分でも $\lambda/L = 0.8$ 付近で値が最大となっているが、これは斜波中での heave, pitch の同調周波数が正面向け波中に比べて短波長側へシフトしているためである。また $\lambda/L = 1.5$ 付近で特に抵抗増加の値が急に大きくなっているが、これは明らかに roll 運動の同調による影響である。本稿では roll モードにおける粘性減衰力を考慮していないので、Fig. 8 に示すように roll の動揺振幅が非現実的に大きくなっている。粘性減衰力を考慮すれば roll の最大値も現実的な値に抑えられ、その結果として抵抗増加の急激な増加も緩和されると考えられるが、いずれにしても横運動（特に roll の同調）によって抵抗増加が大きくなり得るということは重要な知見である。

以上の結果から、線形流体力や波浪中での船体運動では、EXACT と NSM では大きな差は無いように思われるが、2 次の流体力である波浪定常流体力の計算では、短波長域での入射波の船首反射の影響は大きく現れ、それには diffraction 問題での scattering ポテンシャルに対する直接解を用いることが大きく寄与していると結論できる。

Fig. 9 の計算結果で再確認しておくべきもう一つの重要な知見は、波の diffraction による波浪定常流体力は $\lambda/L = 3.0$ の長波長域でもゼロとはなっていないということである。ところが波浪中で運動を自由とした場合の波浪定常流体力は、抵抗増加だけでなく、定常横力、定常回頭モーメントも $\lambda/L > 2.0$ では殆どゼロとなっている。これは、船体による攪乱波 (Kochin 関数) は線形重ね合わせであるが、波浪による定常流体力は Kochin 関数の自乗に比例するので

$$|\zeta_D + \zeta_R|^2 = (\zeta_D + \zeta_R)(\zeta_D^* + \zeta_R^*) = |\zeta_D|^2 + |\zeta_R|^2 + 2\text{Re}(\zeta_D\zeta_R^*)$$

であり、 $|\zeta_D|^2$ による定常流体力と残りの $|\zeta_R|^2 + 2\text{Re}(\zeta_D\zeta_R^*)$ による定常流体力とが長波長域ではキャンセルするのでゼロとなっている [13] と理解するべきことを示唆している。

FORTRAN ソースプログラムの公開

本稿で説明した理論計算法による計算プログラムは、船舶耐航性について勉強しようとする人を対象に教育目的で開発したものである。特に本稿で説明した 2 次元・3 次元 Kochin 関数の計算、それを用いた波浪定常流体力の計算は高速・高精度の計算法としてより多くの人に使って頂き、さらに普及されるべきものである。その目的達成のために FORTRAN ソースプログラムを以下の URL に公開するので、勉強・研究資料として自由に使って頂ければ開発者の本望である。

<https://www.dropbox.com/s/2ih7whnqpm222rg/in-sm-simpnew.f?dl=0>

参考文献

- [1] 大松重雄, 松井貞興: ストリップ法における Diffraction ポテンシャルの近似計算法の精度向上について, 海上技術安全研究所報告, 第19巻 第1号 (令和元年度) 研究報告, pp.79-89, 2019.
- [2] 柏木 正, 岩下英嗣: 船体運動 耐航性能編 (船舶海洋工学シリーズ 4), 日本船舶海洋工学会監修, 第 5 章 細長船に対するストリップ法, 成山堂書店, 2012.
- [3] 実践 浮体の流体力学 前編-動揺問題の数値計算法, (社) 日本造船学会 海洋工学委員会性能部会編, 第 2 章 2 次元境界要素法 (p.19~), 成山堂書店, 2003.
- [4] Ogilvie, T. F. and Tuck, E. O.: A Rational Strip Theory of Ship Motions: Part 1, *Report No. 13. Naval Architecture and Marine Engineering, University of Michigan*, 1969.
- [5] 柏木 正: 長波長域での船体運動の漸近値について, 関西造船協会誌, 第 242 号, pp.45-51, 2004年9月.
- [6] Kashiwagi, M.: Numerical Seakeeping Calculations Based on the Slender Ship Theory, *Ship Technology Research (Schiffstechnik)*, Vol. 44, No. 4, pp.167-192, 1997 (October).
- [7] Kashiwagi, M.: Calculation Formulas for the Wave-Induced Steady Horizontal Force and Moment on a Ship with Forward Speed, *Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University*, Vol. 37, No.107, pp.1-18, 1991.
- [8] Wicaksono, A. and Kashiwagi, M.: Wave-Induced Steady Forces and Yaw Moment of a Ship Advancing in Oblique Waves, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 23, No. 4, pp.767-781, 2018.
- [9] Kashiwagi, M.: Added Resistance, Wave-Induced Steady Sway Force and Yaw Moment on an Advancing Ship, *Ship Technology Research (Schiffstechnik)*, Vol. 39, No. 1, pp.3-16, 1992.
- [10] 柏木 正, 川添一将, 稲田 勝: 波浪中船体動揺および抵抗増加の計算に関する一考察, 関西造船協会誌 第 234 号, pp.85-94, 2000年9月.
- [11] Kashiwagi, M.: Hydrodynamic Study on Added Resistance Using Unsteady Wave Analysis, *Journal of Ship Research*, Vol. 57, No. 4, pp.220-240, 2013.
- [12] Wicaksono, A. and Kashiwagi, M.: Efficient Coupling of Slender Ship Theory and Modular Maneuvering Model to Estimate the Ship Turning Motion in Waves, *Proc. of 29th International Ocean and Polar Engineering Conference (Hawaii, USA)*, Vol. 3, pp.4632-4639, 2019.
- [13] Kashiwagi, M., Ikeda, T. and Sasakawa, T.: Effects of Forward Speed of a Ship on Added Resistance in Waves, *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, Vol. 20, No. 3, pp.196-203, 2010.
- [14] Kashiwagi, M.: Enhanced Unified Theory with Forward-Speed Effect Taken into Account in the Inner Free-Surface Condition, *Journal of Ship Research*, Vol. 66, No. 1, pp.1-14, 2022.

付録 A : 不等間隔のシンプソン則

細長船理論では x 軸方向に直角な横断面内での計算値を x 方向に積分することによって 3 次元の流体力やコチン関数を求めることが多いが、特に実船型では船首尾付近の解像度を上げるために、 x 軸方向の位置を不等間隔で計算することもある。そのときのために、不等間隔のシンプソン則による計算式について整理しておこう。

まず 20 ページの Fig. 4 と同じ記号を用いるが、 $x_j \leq x \leq x_{j+2}$ の区間に対して $y(x)$ を 2 次関数で表す。すなわち

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= y_1 + a(x - x_j) + b(x - x_j)^2 \\ h_1 &= x_{j+1} - x_j, \quad h_2 = x_{j+2} - x_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

とする。このとき、係数 a, b は $y_2 = y(x_{j+1})$, $y_3 = y(x_{j+2})$ の条件より決定することができ、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{(y_2 - y_1)(h_1 + h_2)^2 - (y_3 - y_1)h_1^2}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \\ b &= \frac{-(y_2 - y_1)(h_1 + h_2) + (y_3 - y_1)h_1}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

次に $y(x)$ の積分値を解析的に求めておく。

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_j}^{x_{j+2}} y(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+2}} \{ y_1 + a(x - x_j) + b(x - x_j)^2 \} dx \\ &= y_1(h_1 + h_2) + \frac{a}{2}(h_1 + h_2)^2 + \frac{b}{3}(h_1 + h_2)^3 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{h_1 + h_2}{6h_1 h_2} \left[y_1 6h_1 h_2 + 3 \left\{ (y_2 - y_1)(h_1 + h_2)^2 - (y_3 - y_1)h_1^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left\{ (y_2 - y_1)(h_1 + h_2)^2 - (y_3 - y_1)h_1(h_1 + h_2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

これを係数 y_1, y_2, y_3 ごとにまとめると次の結果が得られる。

$$S = \frac{h_1 + h_2}{6h_1 h_2} \left[h_2(2h_1 - h_2)y_1 + (h_1 + h_2)^2 y_2 + h_1(2h_2 - h_1)y_3 \right] \quad (\text{A.5})$$

この式で等間隔の $h_1 = h_2 = h$ のときには (145) 式となることが確認できる。

続いて、3 次元コチン関数のために (141) 式を不等間隔の場合について考えてみる。

$$\mathcal{A}_j \equiv \int_{x_j}^{x_{j+2}} \{ y_1 + a(x - x_j) + b(x - x_j)^2 \} e^{ikx} dx \quad (\text{A.6})$$

以前と同様に、振動関数 e^{ikx} を含む積分を次のように求めておく。

$$\alpha_1 \equiv ik \int_{x_j}^{x_{j+2}} e^{ikx} dx = \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_2 \equiv \frac{ik}{h_1 + h_2} \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j) e^{ikx} dx = e^{ikx_{j+2}} - \frac{1}{ik(h_1 + h_2)} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &\equiv \frac{2ik}{(h_1 + h_2)^2} \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j)^2 e^{ikx} dx = 2e^{ikx_{j+2}} - \frac{4}{ik(h_1 + h_2)} \alpha_2 \\ &= 2 \left\{ 1 - \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_{j+2}} + \frac{4}{\{ ik(h_1 + h_2) \}^2} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

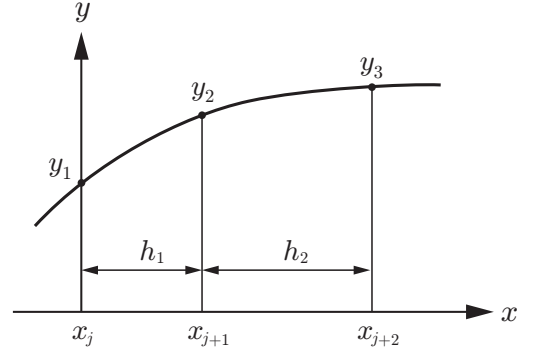


Fig. 10 不等間隔 Simpson 則の計算

これらの結果と (A.2) 式の係数 a , b を用いると次のようになる.

$$\begin{aligned}
ik\mathcal{A}_j &= y_1 \alpha_1 + (h_1 + h_2) a \alpha_2 + \frac{(h_1 + h_2)^2}{2} b \alpha_3 \\
&= y_1 \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \\
&\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ (y_2 - y_1)(h_1 + h_2)^2 - (y_3 - y_1)h_1^2 \right\} \left[e^{ikx_{j+2}} - \frac{1}{ik(h_1 + h_2)} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \right] \\
&\quad - \frac{h_1 + h_2}{2h_1 h_2} \left\{ (y_2 - y_1)(h_1 + h_2) - (y_3 - y_1)h_1 \right\} \\
&\quad \times \left[2 \left\{ 1 - \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_{j+2}} + \frac{1}{\{ ik(h_1 + h_2) \}^2} \{ e^{ikx_{j+2}} - e^{ikx_j} \} \right] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

これを係数 y_1, y_2, y_3 ごとにまとめると次の結果が得られる.

$$\begin{aligned}
ik\mathcal{A}_j &= y_1 \left[-\frac{1}{ikh_1} \left\{ \frac{h_2}{h_1 + h_2} - \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_{j+2}} - \left(1 + \frac{1}{ikh_1} \left\{ \frac{2h_1 + h_2}{h_1 + h_2} + \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} \right) e^{ikx_j} \right] \\
&\quad + y_2 \frac{h_1 + h_2}{h_2} \frac{1}{ikh_1} \left[\left\{ 1 - \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_{j+2}} + \left\{ 1 + \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_j} \right] \\
&\quad + y_3 \left[\left(1 - \frac{1}{ikh_2} \left\{ \frac{2h_2 + h_1}{h_1 + h_2} - \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} \right) e^{ikx_{j+2}} - \frac{1}{ikh_2} \left\{ \frac{h_1}{h_1 + h_2} + \frac{2}{ik(h_1 + h_2)} \right\} e^{ikx_j} \right] \tag{A.11}
\end{aligned}$$

この式で等間隔の $h_1 = h_2 = h$ のときには (144) 式となることが確認できる.

上に示した (A.11) 式は $k \rightarrow 0$ のときには桁落ちによって数値的に発散する可能性があるので, $k \rightarrow 0$ に対する計算式を別途用意しておく方が良い. $k = 0$ の時には (A.3) 式あるいは (A.5) 式となるが, テイラー展開での次の項も考えるためには (A.6) 式において $e^{ikx} \simeq 1 + ikx$ と近似し,

$$\mathcal{A}_j \simeq S + ik \int_{x_j}^{x_{j+2}} \{ y_1 + a(x - x_j) + b(x - x_j)^2 \} x dx \tag{A.12}$$

を考えれば良い. そこで

$$\mathcal{B}_1 \equiv \int_{x_j}^{x_{j+2}} y_1 x dx = y_1 \frac{1}{2} (x_{j+2}^2 - x_j^2) = y_1 (h_1 + h_2) \frac{1}{2} (x_{j+2} + x_j) \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_a &\equiv \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j) x dx = \frac{1}{2} \left[x(x - x_j)^2 \right]_{x_j}^{x_{j+2}} - \frac{1}{6} \left[(x - x_j)^3 \right]_{x_j}^{x_{j+2}} \\
&= \frac{1}{2} (h_1 + h_2)^2 \left\{ x_{j+2} - \frac{1}{3} (h_1 + h_2) \right\} \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_b &\equiv \int_{x_j}^{x_{j+2}} (x - x_j)^2 x dx = \frac{1}{3} \left[x(x - x_j)^3 \right]_{x_j}^{x_{j+2}} - \frac{1}{12} \left[(x - x_j)^4 \right]_{x_j}^{x_{j+2}} \\
&= \frac{1}{3} (h_1 + h_2)^3 \left\{ x_{j+2} - \frac{1}{4} (h_1 + h_2) \right\} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

を用いて

$$\mathcal{A}_j = S + ik \left\{ \mathcal{B}_1 + a \mathcal{B}_a + b \mathcal{B}_b \right\} + O(k^2) \tag{A.16}$$

と求めれば良い. ここで a , b は (A.2) 式である.