

状態空間モデルを使った時系列変動の表現

大阪大学 箕浦宗彦

はじめに

- 波の伝播や波浪中の船体運動などは、線形応答システムで表現でき、水槽実験や実海域観測では、それらは時系列データとして観測される。
- 線形応答システムに基づく代表的な時系列モデル
 - (1) 周波数応答関数の重ね合わせによるモデル
 - (2) インパルス応答関数の畳み込み積分によるモデル
 - (3) 状態空間モデル
- 本論では現象をシミュレートする観点から次のことを示す。
 - それぞれの時系列モデルの数理
 - それぞれのモデルによる計算結果の比較
 - 状態空間モデルの精度の検証

周波数応答関数の重ね合わせによるモデル

ある周波数における入力と出力の関係

$$\text{入力: } u(t) = \cos \omega t = \frac{e^{i(\omega t - \varepsilon)} + e^{-i(\omega t - \varepsilon)}}{2}$$

$$\text{出力: } y(t) = A \cos(\omega t - \varepsilon) = \frac{H e^{i\omega t} + H^* e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\text{周波数応答: } H = A e^{-i\varepsilon}$$

任意の時系列は周波数応答の重ね合わせで表す

$$\text{入力: } u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t)$$

$$\text{出力: } y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) c_n \exp(i\omega_n t)$$

$$\text{周波数応答関数: } H(\omega_n)$$

フーリエ級数展開の方法により定式化

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp(-i\omega_n t) dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_n = n\omega_0$$

T : 解析区間

インパルス応答関数の畳み込み積分によるモデル

4

周波数領域から時間領域に変換

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) c_n \exp(i\omega_n t)$$



$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

t : 現在時刻

$\tau > 0$: 過去の時刻

$\tau < 0$: 未来の時刻

因果的である場合、未来の入力情報は不要
非因果的である場合、未来の入力情報は必要

フーリエ変換の対 :

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

インパルス応答関数 : $h(\tau)$

周波数応答関数 : $H(\omega)$

因果的な現象 : $h(\tau) = 0$ in $\tau < 0$

非因果的な現象 : $h(\tau) \neq 0$ in $\tau < 0$

状態空間モデル

連続型状態空間方程式

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

$\mathbf{z}(t)$: 状態量ベクトル

離散型状態空間方程式

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta t}$$

$$\mathbf{b}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{b}$$

状態空間方程式と畳み込み積分の関係

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$



$$y(t) = \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

$$h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$$

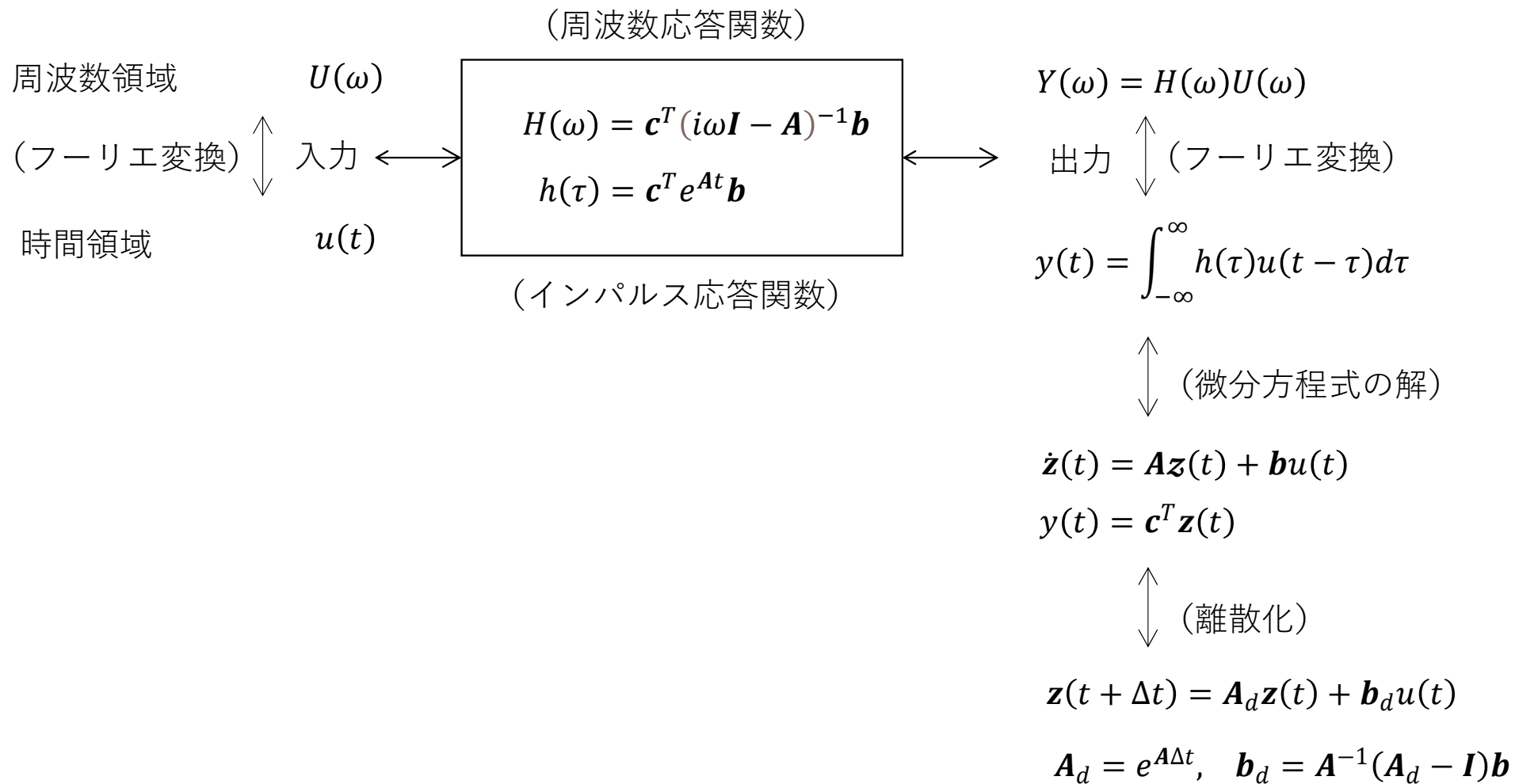
$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$$

積分上限は、考慮すべき入力を初期時刻まで遡ることを示す。現象が実現可能で安定な場合、 $h(\tau)$ は時間の経過とともに減衰するので、本質的に前出の畳み込み積分と同義である。

非因果的な現象の場合

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t + \tau)$$

それぞれのモデルの関係



計算結果の比較（計算条件）

周波数応答関数 $H(\omega) = \exp(-ikx)$, $\omega^2 = kg \tanh kh$

計算条件: $\Delta t = 0.001$ [s]

$h = 0.45$ [m] および 無限水深（不規則波）

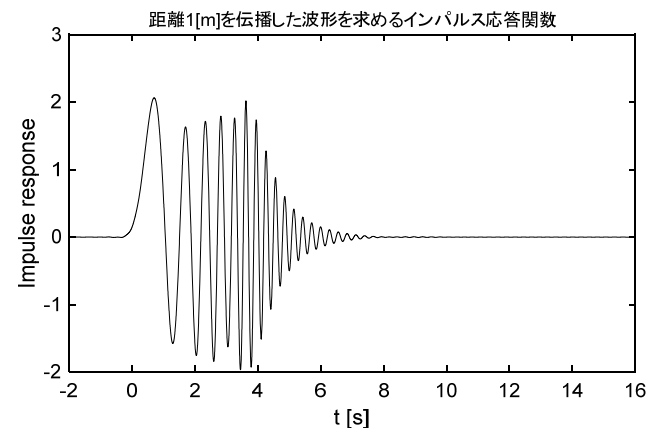
$x = 1.0$ [m]

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t \cdot 10000} \text{ [rad/s]}$$

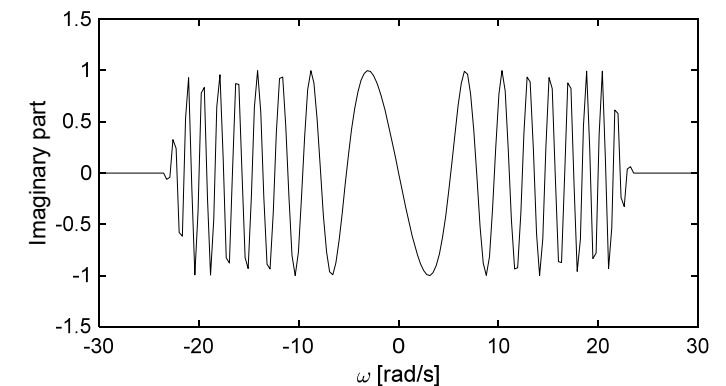
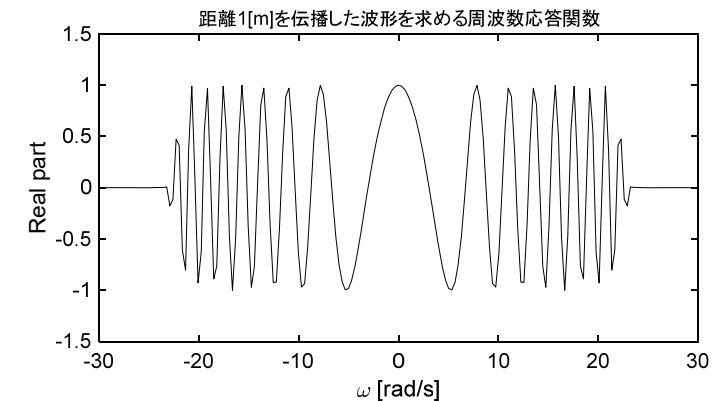
周波数の帯域: $|\omega| < \frac{2\pi}{0.3}$ [rad/s]

周波数端部で $\cos^2$ 関数マスク インパルス応答関数 ($h = 0.45$ [m])

状態ベクトルの次数: 41



周波数応答関数（実部、虚部）
($h = 0.45$ [m])



計算結果の比較

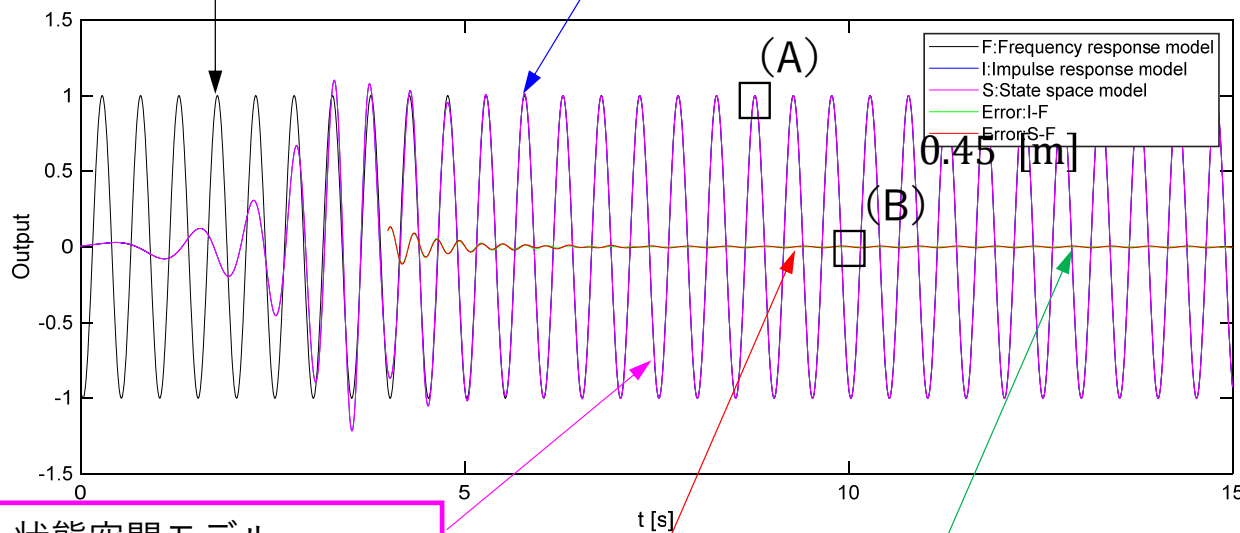
$u(t) = \cos \omega t$ (図示は省略)

F: 周波数応答の重ね合わせ
 $y(t) = A \cos(\omega t - \varepsilon)$

I: インパルス応答の畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

計算時間: 45.303 [s]



S: 状態空間モデル

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t)$$

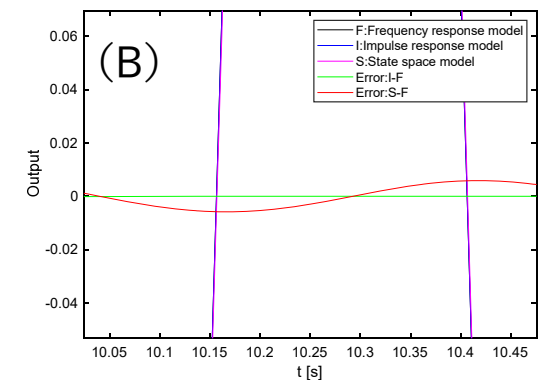
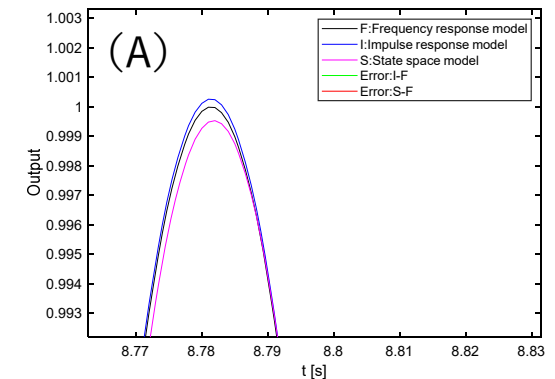
$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

計算時間: 4.056 [s]

誤差: S - F

誤差: I - F

状態空間モデルの精度は、インパルス応答の畳み込み積分に比べるとよくない



計算結果の比較

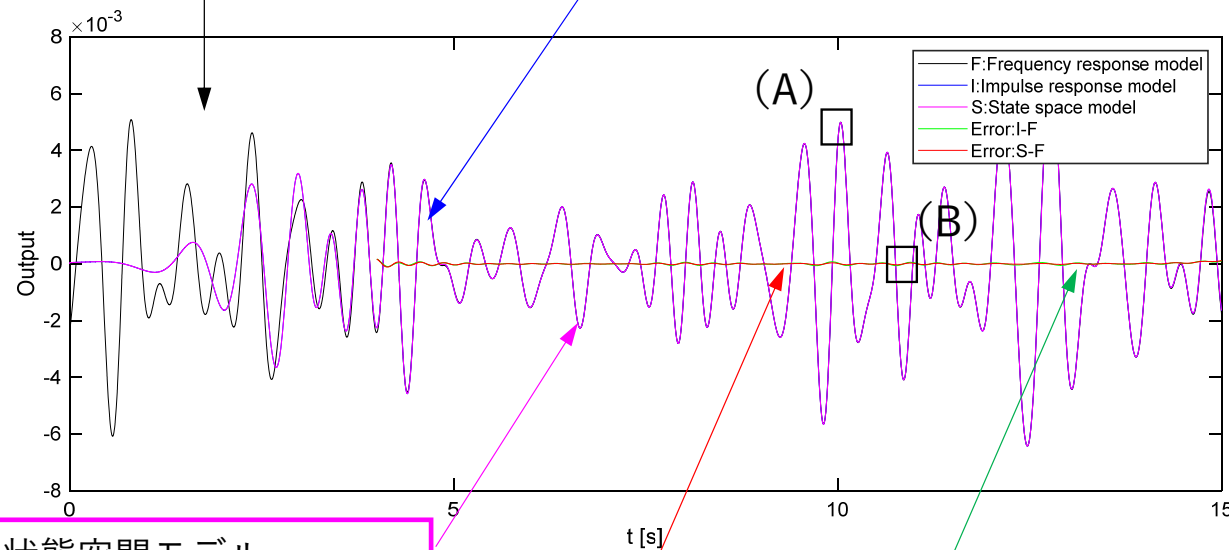
$u(t)$ = ITTC1978 spectrum

F : 周波数応答の重ね合わせ
 $y(t)$ = ITTC1978 spectrum

I : インパルス応答の畳み込み

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

計算時間 : 48.280 [s]



S : 状態空間モデル

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t)$$

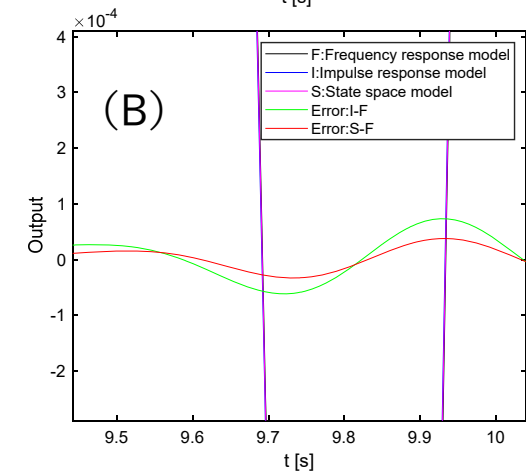
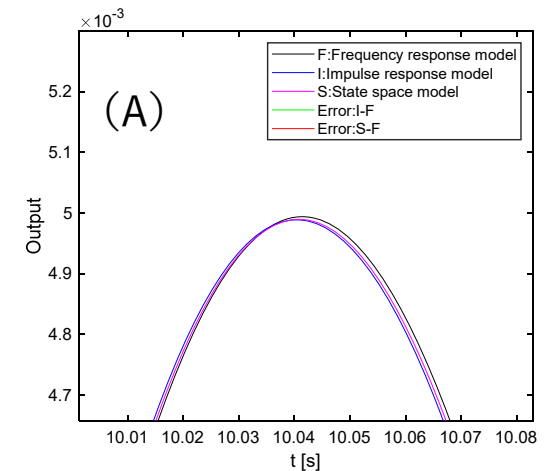
$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

計算時間 : 3.438 [s]

誤差 : S - F

誤差 : I - F

状態空間モデルの精度は、インパルス応答の畳み込み積分に比べるとよい？



- 線形応答システムに基づく3つの時系列モデルに関する定式化を示した。
- 周波数応答の重ね合わせによるモデル (F) が最も精度がよく計算時間も短いですが、過渡応答やリアルタイムでの解析には不向きである。
- インパルス応答の畳み込みによるモデル (I) と状態空間モデル (S) を比較したところ、周期的時系列では (I) が精度がよく、不規則波では (S) が精度が良かった。その理由については明確でないので、今後検討進める。
- (S) の計算時間は (I) の1/10以下である。

Ho, B., Kalman, R., 1966. Effective reconstruction of linear state-variable models from input/output functions. Regelungstechnik 14 (12), 417-441.

Kung, S., 1978. A new identification and model reduction algorithm via singular value decompositions. Twelfth Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers, pp. 705-714.

足立修一, 丸田一郎: カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局, 2012.

柏木正, 岩下英嗣: 船体運動耐航性能編 (船舶海洋工学シリーズ4), 日本船舶海洋工学会監修, 成山堂書店, 2012.

大津皓平: モデルベースモニタリングと統計的制御, 海文堂出版, 2012.

日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 2010.