

状態空間モデルを使った時系列変動の表現

はじめに

線形応答システムに基づく時系列モデルとして

- (1) 周波数応答関数の重ね合わせによるモデル
- (2) インパルス応答関数の畳み込み積分によるモデル
- (3) 状態空間モデル

が挙げられる。いずれの時系列モデルも入力信号に対する出力信号の関係として線形応答システムで表現できるため、波の伝播や波浪中の船体運動などを解析したりシミュレートしたりするのに適している。本論では現象をシミュレートする観点から、それぞれの時系列モデルの特徴を解説し、シミュレーション結果を比較してみる。

1. 周波数応答関数の重ね合わせによるモデル

ある周波数の入力（実数値）を $u(t) = \cos \omega t$ とし、出力（実数値）を

$$y(t) = A \cos(\omega t - \varepsilon) \quad (1.1)$$

とする。 A は応答振幅であり、 ε は応答の位相遅れである。入力に対して出力が生じるという時間的な進行を考えると、出力は入力に対して遅れて生じるので、このことを明示するために ε の前に負記号をつけた。(1.1)式をオイラーの公式により複素指数関数で表せば

$$y(t) = A \frac{e^{i(\omega t - \varepsilon)} + e^{-i(\omega t - \varepsilon)}}{2} \quad (1.2)$$

となる。応答振幅と位相遅れを結合した複素振幅

$$H = A \exp(-i\varepsilon) \quad (1.3)$$

を定義すれば、次の通りに簡潔に表せる。

$$y(t) = \frac{He^{i\omega t} + H^*e^{-i\omega t}}{2} \quad (1.4)$$

ここで、 H^* は H の複素共役である。複素指数関数は $\cos$ 関数や $\sin$ 関数よりも微分操作が簡単なので、以後この形式を用いる。 $u(t)$ が ω_n の線形重ね合わせで表現され、入出力の関係は周波数毎に独立ならば、 $u(t)$ と $y(t)$ は次の通りに書き換えられる。

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \quad (1.5)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) c_n \exp(i\omega_n t) \quad (1.6)$$

ここで、 $H(\omega_n)$ は周波数応答関数である。 $u(t)$ が与えられればフーリエ級数展開の方法により c_n を決定できる。 $u(t)$ が区間 $[-T/2, T/2]$ で定義されるとき、(1.5)式の両辺に $\exp(-i\omega_m t)$ を乗じて定義区間で積分すれば

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp(-i\omega_m t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t) \exp(-i\omega_m t) dt \quad (1.7)$$

である。ここで、 $\omega_n = n\omega_0$ として

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (1.8)$$

とすると、(1.7)式の右辺は三角関数の直交性より $n = m$ の場合だけが有効となり

$$\int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp(-i\omega_m t) dt = T c_m$$

となる。 m を n に置き換えても一般性は失われないので、整理して次式を得る。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp(-i\omega_n t) dt \quad (1.9)$$

$u(t)$ は実数なので、(1.9)式より c_n の実数部は n に対して偶関数、虚数部は奇関数になることがわかる。

$$\text{Re}[c_n] = \text{Re}[c_{-n}], \quad \text{Im}[c_n] = -\text{Im}[c_{-n}] \quad (1.10)$$

入力 $u(t)$ が与えられれば、(1.9)式により c_n が決定される。 $H(\omega_n)$ が既知であれば、(1.6)式から $y(t)$ を計算できる。

2. インパルス応答関数の畳み込み積分によるモデル

(1.9)式を(1.5)式に代入すると

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t') \exp(-i\omega_n t') dt' \right) \exp(i\omega_n t) \quad (2.1)$$

であり、 $T \rightarrow \infty$ の極限を考えて

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \omega_n \rightarrow \omega$$

とすれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t') \exp(-i\omega t') dt' \right) \exp(i\omega t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t') \exp(-i\omega t') dt' \right) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned}$$

ここで、新たな関数として $U(\omega)$ を(2.2)式で定義すれば、上式は(2.3)式に書き換えられる。

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.2)$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.3)$$

(2.2)式と(2.3)式の組み合わせをフーリエ変換の対という。ここでは、時間領域から周波数領域への変換(2.2)式を正変換、周波数領域から時間領域への変換(2.3)式を逆変換とする。 $u(t)$ を例にしてフーリエ変換を定義したが、 $y(t)$ と $H(\omega)$ に対しても次のように定義できる。

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.4)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.5)$$

入力と出力の周波数応答の関係を求めるために、(1.6)式の両辺に $\exp(-i\omega_m t)$ を乗じて区間 $[-T/2, T/2]$ で積分してみる。その結果は三角関数の直交性より

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \exp(-i\omega_m t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) c_n \exp(i\omega_n t) \right) \exp(-i\omega_m t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n) c_n \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\omega_n t) \exp(-i\omega_m t) dt \\ &= H(\omega_m) c_m T \end{aligned}$$

である。これに(1.9)式を代入すれば

$$\int_{-T/2}^{T/2} y(t) \exp(-i\omega_m t) dt = H(\omega_m) \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp(-i\omega_m t) dt$$

となるので、 $T \rightarrow \infty$ の極限をとることで

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-i\omega t) dt = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt$$

を得る。(2.2)式、(2.4)式のフーリエ変換の定義を適用すれば、次の周波数応答の関係が得られる。

$$Y(\omega) = H(\omega)U(\omega) \quad (2.6)$$

ここで、 $H(\omega)$ は $H(\omega_n)$ と同じ周波数応答関数である。

この関係を時間領域に変換するには、(2.6)式の両辺をフーリエ逆変換をすればよい。すなわち

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) U(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

となるので、 $H(\omega)$ を $h(\tau)$ のフーリエ変換に置き換えると

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \right) U(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

であり、積分順序を入れ換えて整理すると次の通りになる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \exp(i\omega(t-\tau)) d\omega \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

これにより時間領域における入出力の応答関係が求められた。 $h(\tau)$ はインパルス応答関数であり、インパルスの入力に対する出力を表す。インパルスの入力としてデルタ関数 $\delta(\tau)$ を(2.7)式に与えると、デルタ関数の定義より

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = h(t) \quad (2.8)$$

となることが示される。 $u(t)$ が与えられ、 $h(\tau)$ が既知であれば、(2.7)式により $y(t)$ を計算できる。

インパルス応答関数が負時間の領域で

$$h(\tau) = 0 \quad \text{in } \tau < 0 \quad (2.9)$$

となるとき「因果的な現象」という。時間の負の領域にも値を有する場合は「非因果的な現象」という。(2.7)式において、 $\tau < 0$ の $u(t - \tau)$ は現在時刻 t よりも未来の入力となる。因果的である場合、未来の入力情報は不要である。非因果的な場合は未来の入力情報が必要である。

(2.7)式の積分の上限は、考慮すべき入力を無限過去まで遡ることを示している。ただし、実現可能で安定な現象は $h(\tau)$ は時間の経過とともに減衰するので、実用計算における積分範囲は、 $h(\tau)$ が十分に減衰する時刻まででよい。

3. 状態空間モデル

時間 t を引数とするベクトル変数 $\mathbf{z}(t)$ に関する連立1階線形常微分方程式

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (3.1)$$

を状態空間方程式という。 $\mathbf{z}(t)$ はベクトルなので複数の1階線形常微分方程式が連立する。ここで、 $\mathbf{A}$ は状態遷移行列、 $\mathbf{b}$ は入力ベクトル、 $u(t)$ は入力信号と呼ばれる量であり、ドット記号は時間に関する微分を表す。また、 $\mathbf{z}(t)$ は状態量ベクトルと呼ばれる。観測される出力は、状態量ベクトルの成分の線形和で表され、次の方程式を用いる。

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) \quad (3.2)$$

ここで、 $\mathbf{c}$ は出力ベクトルと呼ばれる。(3.1)式は物理則を記述するのでシステム方程式（あるいは物理方程式）といわれ、(3.2)式は観測方程式といわれる。(3.1)式と(3.2)式をあわせて状態空間モデル（あるいは状態空間方程式）という。

状態空間モデルは1階線形常微分方程式なので解が存在し、次の通りに表される。

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

被積分項の $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}$ を一つの関数として

$$h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad (3.4)$$

と表す。 $h(t)$ はインパルス応答関数とよばれる。なお、 $e^{\mathbf{A}t}$ は指数行列であり、その定義は次式である。

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots \quad (3.5)$$

状態ベクトルの初期値を $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ として、(3.4)式を(3.3)式に代入して整理すれば

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (3.6)$$

である。最上右辺の積分値の上限は、考慮すべき入力を初期時刻まで遡ることを示している。現象が実現可能で安定な場合、 $h(\tau)$ は時間の経過とともに減衰するので(3.6)式は本質的に(2.7)式と同義である。

状態空間モデルのメリットは逐次計算により高速に数値解を得ることである。それを実現するためには、差分形式の状態空間モデルに変換しなければならない。離散化の時間ステップを Δt とする。初期時刻を t_0 として、(3.3)式により $\mathbf{z}(t + \Delta t)$ を記述すると

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t + \Delta t) &= e^{\mathbf{A}(t+\Delta t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t+\Delta t} e^{\mathbf{A}(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(t+\Delta t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} e^{\mathbf{A}(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{A\Delta t} e^{A(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + e^{A\Delta t} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau \\
&= e^{A\Delta t} \mathbf{z}(t) + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る。積分計算において、 $u(\tau)$ が積分区間 $[t, t + \Delta t]$ で一定値($u(t)$)とし、 $s = t + \Delta t - \tau$ の変数変換をすれば

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = e^{A\Delta t} \mathbf{z}(t) + \int_0^{\Delta t} e^{As} ds \mathbf{b}u(t) \tag{3.8}$$

を得る。あらためて

$$\mathbf{A}_d = e^{A\Delta t} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{\Delta t} e^{As} ds \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} (e^{A\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \mathbf{b} \tag{3.10}$$

と定義すれば、離散型の状態空間モデルが次式で表される。

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t) \tag{3.11}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) \tag{3.12}$$

行列 $\mathbf{A}_d$ 、 $\mathbf{b}_d$ 、 $\mathbf{c}$ は、 $h(\tau)$ が既知であれば、実現理論により求めることができる。この詳細は「付録：状態空間モデルの理解のための整理」にて述べる。なお、非因果性がある場合、考慮すべき未来の時間を τ とすれば、(3.11)式は次の通りに書き換えられる。

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t + \tau) \tag{3.13}$$

4. 各種モデルの数式表現

状態空間方程式、インパルス応答関数、周波数応答関数は、いずれも入出力システムの数式表現である。表現方法は異なるが同じ入出力の関係を表す。直達項と観測ノイズを省いて整理すると次の通りになる。

状態空間方程式による表現

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{b} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

インパルス応答関数による表現

$$h(\tau) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

周波数応答関数による表現

$$H(\omega) = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) U(\omega)$$

U, Y は u, y のフーリエ変換

5. 計算によるモデルの比較

ppt 資料を参照

付録：状態空間モデルの理解のための整理

目次

1. 状態空間方程式とは
2. 状態空間方程式の解
3. 状態空間方程式の離散化
4. 周波数応答関数、インパルス応答関数との関係
5. 状態空間方程式の多様性
6. 状態空間方程式の安定性（実現可能なモデル）
7. インパルス応答関数から状態空間方程式の導出（実現理論）
8. メモリ影響関数を含む 1 自由度の運動方程式の状態空間化

1. 状態空間方程式とは

時間 t を引数とするベクトル変数 $\mathbf{z}(t)$ に関する連立 1 階線形常微分方程式

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (1)$$

を状態空間方程式という。 $\mathbf{z}(t)$ はベクトルなので複数の 1 階線形常微分方程式が連立する。ここで、 $\mathbf{A}$ は状態遷移行列、 $\mathbf{b}$ は入力ベクトル、 $u(t)$ は入力信号と呼ばれる量であり、ドット記号は時間に関する微分を表す。また、 $\mathbf{z}(t)$ は状態量ベクトルと呼ばれる。すべての n 階線形常微分方程式は状態空間方程式に変換できる。例えば、次の 2 階線形常微分方程式を考えてみる。

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + x(t) = u(t) \quad (2)$$

この方程式に次の自明な関係式

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t) = 0 \quad (3)$$

を組み合わせると行列表示すれば

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

である。状態量ベクトル、状態遷移行列、入力ベクトルを

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\gamma & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

と定義すれば(1)式の形式になることがわかる。階数が増えても同じように定式化できるであろう。

状態量ベクトルのある量を取り出すためには次の観測方程式を用いる。

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{c}$ は出力ベクトルと呼ばれる。例えば、(2)式の例で、 x を取り出したい場合は

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

とすればよい。実際に計算してみると

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} = 0 \times \dot{x} + 1 \times x = x \quad (8)$$

となり、確かに x が取り出せることが確認できる。

(1)式と(6)式をあわせて状態空間モデル（あるいは状態空間方程式）という。力学的な入出力システムを対象とした場合（例えば、波を入力として浮体運動を出力とする力学システム）、(1)式は物理則を記述するのでシステム方程式（あるいは物理方程式）といわれ、(6)式は観測方程式といわれる。 $\mathbf{z}(t)$ の成分は、物理変数として説明できる場合もあるし、そうでない場合もある。その中から必要な量を取り出し、それを重ね合わせて物理量とするのが観測方程式の役目である。これは実際に観測できる量と考えることもできる。観測できないが（顕在化しないが）、現象の背後に存在する状態量が $\mathbf{z}(t)$ である。例えば、確率過程モデルのひとつである隠れマルコフモデルは状態空間モデルで表現でき、観測された記号系列の背後に存在する状態の遷移系列を推測できる。

観測方程式には、観測ノイズを加えたり、システムを介さないで直接伝達される直達項を加えたりする場合がある。それらを整理して状態空間モデルを記述すると次の通りである。

$$\text{システム方程式} \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad \text{再掲(1)}$$

$$\text{観測方程式} \quad y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) + \mathbf{d}u(t) + b_0 v(t) \quad (9)$$

$u(t)$ ：線形入力信号

$y(t)$ ：出力信号

$\mathbf{z}(t)$ ：状態量ベクトル

$v(t)$ ：観測ノイズ

$\mathbf{A}$ ：状態遷移行列

$\mathbf{b}$ ：入力ベクトル

$\mathbf{c}$ ：出力ベクトル

$\mathbf{d}$ ：直達ベクトル

運動方程式を記述するだけならば、観測ノイズはいらない。観測ノイズは、実際の観測データを解析する場合や、不確定な要素を方程式に導入する場合に有用となる。

2. 状態空間方程式の解

システム方程式は連立方程式のため、そのままで解を求めるにはそれぞれの相互影響を考慮しなければならず、式展開が煩雑になる。そこで、状態遷移行列は対角化できると仮定して、システム方程式を独立な方程式群に変換し、それぞれの方程式について独立に解を求め、それを再結合することで、もとの方程式の解を求めてみる。

システム方程式の連立は、(1)式を成分で表すとよくわかる。成分が n 個ある場合は、次の通りである。

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} u \quad (10)$$

例えば、 $\dot{z}_1$ は、 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の重ね合わせで表現されており、その結果、 $\dot{z}_1$ には z_1 以外の成分の影響も含ま

れる。 $\mathbf{A}$ の対角化は $\mathbf{A}$ の固有値、固有ベクトルを求めることと同義である。ある固有値、単位固有ベクトルをそれぞれ $\lambda_i, \mathbf{p}_i$ とする。 $\mathbf{p}_i$ は n 個の成分を持つベクトルである。固有値と単位固有ベクトルの関係は次の通りである。

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i\lambda_i \quad (11)$$

固有値と固有ベクトルは、重根が無ければ、成分と同数 (n 個) が存在するので、それを並べると次の通りになる。

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \square & \square & \square \\ \square & \lambda_2 & \square & \square \\ \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、行列をまとめて

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n], \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \square & \square & \square \\ \square & \lambda_2 & \square & \square \\ \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

とすれば、(12)式は $\mathbf{AP} = \mathbf{PA}$ と表現され、 $\mathbf{A}$ についてまとめると

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \quad (14)$$

である。これを(1)式に代入して変形すると次の通りになる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ \rightarrow \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}u(t) \\ \rightarrow \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) &= \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\zeta}(t) + \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、次の通りに変数を置き換えた。

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}u(t) \quad (16)$$

(10)式との違いを明示するために、(15)式を成分で表す。独立な方程式群に変換されたことがわかる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \square & \square & \square \\ \square & \lambda_2 & \square & \square \\ \square & \square & \ddots & \square \\ \square & \square & \square & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

この中の一つの方程式を代表して

$$\dot{\zeta}_i(t) = \lambda_i\zeta_i(t) + u_i(t) \quad (18)$$

の厳密解を求める。まずは同次解について

$$\dot{\zeta}_i = \lambda_i\zeta_i \quad (19)$$

を変形すると

$$\frac{1}{\zeta_i} \frac{d\zeta_i}{dt} = \lambda_i \quad (20)$$

なので、両辺を t で、 $t = 0 \sim \tau$ の範囲で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{1}{\zeta_i} \frac{d\zeta_i}{dt} dt &= \int_0^\tau \lambda_i dt \\ \rightarrow \int_{\zeta_i(0)}^{\zeta_i(\tau)} \frac{1}{\zeta_i} d\zeta_i &= \int_0^\tau \lambda_i dt \\ \rightarrow \ln \zeta_i(\tau) - \ln \zeta_i(0) &= \lambda_i \tau \\ \rightarrow \zeta_i(\tau) &= \zeta_i(0)e^{\lambda_i \tau} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \zeta_i(t) = \zeta_i(0)e^{\lambda_i t} \quad (21)$$

を得る。特解は(21)式をもとに定数変化法を用いれば

$$\zeta_i(t) = w_i(t)e^{\lambda_i t} \quad (22)$$

と表せる。これを(18)式に代入して変形すれば

$$\begin{aligned} \dot{w}(t)e^{\lambda_i t} + \lambda_i w(t)e^{\lambda_i t} &= \lambda_i w(t)e^{\lambda_i t} + u_i(t) \\ \rightarrow \dot{w}(t) &= u_i(t)e^{-\lambda_i t} \\ \rightarrow w(t) &= \int_0^t u_i(\tau)e^{-\lambda_i \tau} d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

である。よって、特解は次式となる。

$$\zeta_i(t) = \int_0^t u_i(\tau)e^{-\lambda_i \tau} d\tau e^{\lambda_i t} = \int_0^t u_i(\tau)e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (24)$$

厳密解は(21)式と(23)式を合わせて次式で表される。

$$\zeta_i(t) = \zeta_i(0)e^{\lambda_i t} + \int_0^t u_i(\tau)e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (25)$$

最後に $\zeta_i(t)$ を $z_i(t)$ に変換する。 e^θ の級数表示である

$$e^\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \quad (26)$$

を(25)式に適用すれば

$$\zeta_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^k}{k!} \zeta_i(0) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i(t-\tau))^k}{k!} u_i(\tau) d\tau \quad (27)$$

である。これをベクトル・行列形式で表すと次の通りになる。

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \zeta(0) + \int_0^t \frac{(\Lambda(t-\tau))^k}{k!} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (28)$$

(16)式を代入して、両辺に $\mathbf{P}$ をかければ

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \frac{(\Lambda t)^k}{k!} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P} \frac{(\Lambda(t-\tau))^k}{k!} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (29)$$

が得られるので、固有値・固有ベクトルを用いた行列のべき乗計算則

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}^n \mathbf{P}^{-1} \quad (30)$$

を適用すると次式を得る。

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A} t)^k}{k!} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}(t-\tau))^k}{k!} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (31)$$

これに指数行列の定義を適用すれば次の通りに変形できる。

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A} t} \mathbf{z}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (32)$$

なお、指数行列の定義は次式である。

$$e^{\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \frac{\mathcal{A}^3}{3!} + \dots \quad (33)$$

(6)式の観測方程式と組み合わせると入力信号 $u(t)$ と出力信号 $y(t)$ の関係が

$$y(t) = \mathbf{c}^T e^{A\tau} \mathbf{z}(0) + \int_0^t \mathbf{c}^T e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \quad (34)$$

で表される。被積分項の $\mathbf{c}^T e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}$ を一つの関数として

$$h(t) = \mathbf{c}^T e^{At} \mathbf{b} \quad (35)$$

と表す。 $h(t)$ はインパルス応答関数とよばれる。

3. 状態空間方程式の離散化

ここまでは微分形式で表現された連続型状態空間モデルを用いて解析的に解を得た。一方、差分形式で表現される離散型状態空間モデルを使えば、逐次計算により数値的に解を得ることができる。

離散化の時間ステップを Δt とする。初期時刻を t_0 として、(34)式により $\mathbf{z}(t + \Delta t)$ を記述すると

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t + \Delta t) &= e^{A(t+\Delta t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t+\Delta t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (36)$$

である。一般に指数行列は

$$e^{A+B} \neq e^A e^B \quad (37)$$

であるが、行列が交換可能 ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$) ならば

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad (38)$$

が成立する。明らかに $\mathbf{A}\Delta t \mathbf{A}(t - t_0) = \mathbf{A}(t - t_0) \mathbf{A}\Delta t$ なので

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t + \Delta t) &= e^{A\Delta t} e^{A(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + e^{A\Delta t} \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \\ &= e^{A\Delta t} \mathbf{z}(t) + \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。積分計算において、 $u(\tau)$ が積分区間 $[t, t + \Delta t]$ で一定値 ($u(t)$) とし、 $s = t + \Delta t - \tau$ の変数変換をすれば

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = e^{A\Delta t} \mathbf{z}(t) + \int_0^{\Delta t} e^{As} ds \mathbf{b} u(t) \quad (40)$$

を得る。あらためて

$$\mathbf{A}_d = e^{A\Delta t} \quad (41)$$

$$\mathbf{b}_d = \int_0^{\Delta t} e^{As} ds \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} (e^{A\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \mathbf{b} \quad (42)$$

と定義すれば、離散型の状態空間モデルが次式で表される。

$$\mathbf{z}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_d \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_d u(t) \quad (43)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) \quad (44)$$

4. 周波数応答関数、インパルス応答関数との関係

ある変数 $\mathbf{z}(t)$ に対するフーリエ変換を次の通りに定義する。

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad \tilde{z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-i\omega t} dt \quad (45)$$

なお、 $z(t)$ と $\tilde{z}(\omega)$ は、それぞれ、 $t \rightarrow \pm\infty, \omega \rightarrow \pm\infty$ で、0になる任意の関数である。この定義より、 $z(t)$ の t に関する微分については次式の関係を得る。

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega) \tilde{z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad (i\omega) \tilde{z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (46)$$

$$\ddot{z}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^2 \tilde{z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad (i\omega)^2 \tilde{z}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{z}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (47)$$

このフーリエ変換を利用して状態空間モデルから周波数応答関数を求めている。

観測ノイズと直達項を含まない次の状態空間モデルを考える。

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (48)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) \quad (49)$$

両辺をフーリエ変換すると

$$i\omega \tilde{\mathbf{z}}(\omega) = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{z}}(\omega) + \mathbf{b} \tilde{u}(\omega) \quad (50)$$

$$\tilde{y}(\omega) = \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}}(\omega) \quad (51)$$

となるので、 $\tilde{\mathbf{z}}(\omega)$ を消去すれば、次式の関係を得る。

$$\tilde{y}(\omega) = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \tilde{u}(\omega) \quad (52)$$

周波数応答関数は、入力に対する出力の周波数関数なので、次の通りに表せる。

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\tilde{y}(\omega)}{\tilde{u}(\omega)} = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (53)$$

これを逆フーリエ変換すると

$$h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \quad (54)$$

となり、(35)式に一致する。

状態空間方程式、インパルス応答関数、周波数応答関数は、いずれも入出力システムの数式表現である。表現方法は異なるが同じ入出力の関係を表す。直達項と観測ノイズを省いて整理すると次の通りになる。

状態空間方程式による表現

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

インパルス応答関数による表現

$$h(\tau) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

周波数応答関数による表現

$$H(\omega) = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) Z(\omega)$$

Z, Y は z, y のフーリエ変換

5. 状態空間方程式の多様性

同じ入出力関係を表す状態空間モデルは無限数あることを示す。状態変数が任意の正則な変換行列 $\mathbf{T}$ （逆行列 $\mathbf{T}^{-1}$ が存在する行列、変数変換が一意である変換）により

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$$

と変換されたとする。これを $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}'(t)$ と書き換えて、状態空間モデルに代入すれば

$$\mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}'(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}'(t)$$

である。さらに変形して次式を得る。

$$\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}'(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}'(t) = ((\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{c})^T\mathbf{z}'(t) = ((\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c})^T\mathbf{z}'(t)$$

ここで、状態空間モデルの各種行列を

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' = (\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c}$$

と整理すれば

$$\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}'\mathbf{z}'(t) + \mathbf{b}'u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}'^T\mathbf{z}'(t)$$

と表せる。このことから、入出力は同じであるが、それを表現する状態空間モデルは一意には決まらないことがわかる。周波数応答関数に変化しないことは次の通りに示される。

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathbf{c}'^T(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{b}' \\ &= ((\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c})^T(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} \\ &= ((\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c})^T(i\omega\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} \\ &= ((\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c})^T(\mathbf{T}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1})^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} \\ &= ((\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c})^T\mathbf{T}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{b} \\ &= ((\mathbf{T}^{-1})^T\mathbf{c})^T\mathbf{T}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

なお、本節の式変形にあたっては次の関係を利用した。

$$(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

6. 状態空間方程式の安定性（実現可能なモデル）

実現可能（プロパー）なシステムの遷移行列について考える。一般に実現可能（プロパー）な周波数応答関数は

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{i\omega + s_n}$$

で表される。ここで、 s_n と d_n は複素数であり、分母が0となる $\omega = is_n$ は応答関数の極と呼ばれる。インパルス応答関数は周波数応答関数を逆フーリエ変換した

$$h(t) = \sum_{n=1}^N d_n e^{-s_n t} u(t)$$

である。ここで、 $u(t)$ はステップ関数を表す。 s_n を実数部と虚数部に分けて

$$s_n = s_{Rn} + i s_{In}$$

とすれば、実数部 s_{Rn} が負の場合に指数関数は時間とともに発散する。したがって、システムが定常安定であるためには、すべての s_{Rn} が正でなければならない。すなわち、システムの安定の条件は次式で表される。

$$s_{Rn} > 0$$

この応答関数を実現する状態空間モデルを

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

とする。このとき、周波数応答関数と状態空間モデルの関係

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{i\omega + s_n} = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{b}$$

を見れば、対角上に $-s_n$ が並ぶ対角行列が $\mathbf{D}$ として考えられる。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -s_1 & \square & \square \\ \square & \ddots & \square \\ \square & \square & -s_N \end{bmatrix}$$

実際に代入して展開すると

$$H(\omega) = \mathbf{c}^T (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{b} = \frac{c_1 b_1}{i\omega + s_1} + \frac{c_2 b_2}{i\omega + s_2} + \cdots + \frac{c_N b_N}{i\omega + s_N} = \sum_{n=1}^N \frac{d_n}{i\omega + s_n}$$

を得る。このとき、 $-s_n$ は $\mathbf{D}$ の固有値であり、システムが安定であるためには、 $\mathbf{D}$ のすべての固有値の実数部が負でなければならない。

前述の状態空間モデルの多様性により、正則な変数変換 $\mathbf{T}$ により状態変数とモデルパラメータが

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}''(t), \quad \mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' = (\mathbf{T}^T)^{-1}\mathbf{c}$$

と変換されても、状態空間モデルの入出力関係は変わらず

$$\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}'\mathbf{z}'(t) + \mathbf{b}'u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}'^T \mathbf{z}'(t)$$

で表される。このとき、 $\mathbf{D}$ は対角行列であるが、 $\mathbf{A}'$ は対角行列ではなく、通常はフルマトリックスになる。しかし、遷移行列としての固有値は不変なので、 $\mathbf{A}'$ の固有値は $-s_n$ である。

以上より、安定な（実現可能な）状態空間モデルに対しては次のことが言える。

- 遷移行列のすべての固有値の実数部は負である。
- 遷移行列は固有値を対角成分とする対角行列に変換できる。

第二項目により、遷移行列がフルマトリックスで与えられたとしても、固有値分解により遷移行列を対角行列に変換することで、計算数を大幅に減らすことができる。これは大規模な時系列シミュレーションやリアルタイム性が要求される計算などに有利となる。例えば、状態空間モデル

$$\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{A}'\mathbf{z}'(t) + \mathbf{b}'u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}'^T \mathbf{z}'(t)$$

の遷移行列 $\mathbf{A}'$ がフルマトリクスとして、その固有値分解を

$$\mathbf{L} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{V}$$

とする。 $\mathbf{L}$ は $\mathbf{A}'$ の固有値が対角に並んだ対角行列、 $\mathbf{V}$ は固有ベクトルを横に並べた行列である。この関係式は $\mathbf{A}' = \mathbf{V} \mathbf{L} \mathbf{V}^{-1}$ と変形できるので、状態空間モデルの遷移行列を置き換えれば

$$\dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{V} \mathbf{L} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}'(t) + \mathbf{b}' u(t)$$

であり、両辺に $\mathbf{V}^{-1}$ を乗ずれば

$$\mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{z}}'(t) = \mathbf{L} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}'(t) + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b}' u(t) \quad (\text{A})$$

なので

$$\mathbf{z}''(t) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}'(t), \quad \mathbf{b}'' = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{b}', \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{V}^T \mathbf{c}'$$

と変換すれば

$$\dot{\mathbf{z}}''(t) = \mathbf{L} \mathbf{z}''(t) + \mathbf{b}'' u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}'^T \mathbf{z}'(t) = ((\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{c}'')^T \mathbf{V} \mathbf{z}''(t) = ((\mathbf{V}^{-1})^T \mathbf{c}'')^T \mathbf{V} \mathbf{z}''(t) = \mathbf{c}''^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{z}''(t) = \mathbf{c}''^T \mathbf{z}''(t)$$

である。 $\mathbf{A}'$ が N 次の正方行列の場合、 $\mathbf{A}' \mathbf{x}'(t)$ は、 N^2 回の掛け算と N^2 回の足し算で合計 $2N^2$ 回の演算が必要であるが、 $\mathbf{L} \mathbf{x}(t)$ は対角成分だけの計算になるので、 N 回の掛け算と N 回の足し算で合計 $2N$ 回だけの演算でよい。

7. インパルス応答関数から状態空間方程式の導出（実現理論）

これまでの状態空間モデルがはじめに与えられ、その入出力関係を表す周波数応答関数やインパルス応答関数などが示された。ここでは、その逆を考える。すなわち、インパルス応答関数が与えられたとき、それを実現する状態空間モデルを求める。この理論は実現理論といわれる。

離散型の遷移行列 $\mathbf{A}_d$ を用いてインパルス応答関数を書き換えると

$$h(t) = h(n\Delta t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A} n \Delta t} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T (e^{\mathbf{A} \Delta t})^n \mathbf{b} = \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^n \mathbf{b}$$

であり、簡単のために

$$h(n\Delta t) \rightarrow h(n) = \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^n \mathbf{b}$$

と表記する。このように表されるインパルス応答列はマルコフパラメータともいわれる。インパルス応答列から状態空間モデルのパラメータを決定する手法として、ハンケル行列と特異値分解(Singular Value Decomposition)の特性を利用する方法(SVD法)がある(Ho & Kalman, Kung)。この方法についてまとめる。

ハンケル行列は逆対角の方向に同じ数値が並ぶ、次のような行列である。

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \square & \square & a_{N-2} & a_{N-1} & \mathbf{a}_N \\ a_1 & a_2 & \square & \square & \square & \square & \mathbf{a}_N & a_{N+1} \\ a_2 & \square & \square & \square & \square & \mathbf{a}_N & \square & a_{N+2} \\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{a}_N & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \mathbf{a}_N & \square & \square & \square & \square \\ a_{N-2} & \square & \mathbf{a}_N & \square & \square & \square & \square & a_{2N-2} \\ a_{N-1} & \mathbf{a}_N & \square & \square & \square & \square & a_{2N-2} & a_{2N-1} \\ \mathbf{a}_N & a_{N+1} & a_{N+2} & \square & \square & a_{2N-2} & a_{2N-1} & a_{2N} \end{bmatrix}$$

このハンケル行列の成分にインパルス応答列（マルコフパラメータ）を並べてみる。インパルス応答列を $2N$ までとると次の通りになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \square & \square & h(N-2) & h(N-1) & h(N) \\ h(1) & h(2) & \square & \square & \square & \square & h(N) & h(N+1) \\ h(2) & \square & \square & \square & \square & h(N) & \square & h(N+2) \\ \square & \square & \square & \square & h(N) & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & h(N) & \square & \square & \square & \square \\ h(N-2) & \square & h(N) & \square & \square & \square & \square & h(2N-2) \\ h(N-1) & h(N) & \square & \square & \square & \square & h(2N-2) & h(2N-1) \\ h(N) & h(N+1) & h(N+2) & \square & \square & h(2N-2) & h(2N-1) & h(2N) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \mathbf{b} & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-2} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \mathbf{b} & \square & \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N+1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \mathbf{b} & \square & \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N+2} \mathbf{b} \\ \square & \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \square & \square & \square & \square \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-2} \mathbf{b} & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \square & \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N-2} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \square & \square & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N-2} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N+1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N+2} \mathbf{b} & \square & \square & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N-2} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N-1} \mathbf{b} & \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{2N} \mathbf{b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \end{bmatrix} [\mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^1 \mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^2 \mathbf{b} \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_d)^{N-1} \mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b}] \\
&= \mathbf{\Gamma}_{1:N} \mathbf{\Omega}_{1:N}
\end{aligned}$$

ここで、次の通りに置き換えた。

$$\mathbf{\Gamma}_{1:N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_{1:N} = [\mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^1 \mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^2 \mathbf{b} \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_d)^{N-1} \mathbf{b} \quad (\mathbf{A}_d)^N \mathbf{b}]$$

このようにハンケル行列を $\mathbf{\Gamma}_{1:N}$ と $\mathbf{\Omega}_{1:N}$ に分解できれば（後述）、 $\mathbf{\Gamma}_{1:N}$ の第1行目が $\mathbf{c}^T$ となり、 $\mathbf{\Omega}_{1:N}$ の第1列目が $\mathbf{b}$ となる。

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{\Gamma}_1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{\Omega}_1$$

さらに、 $\mathbf{\Gamma}_{1:N}$ の第2行目以降を取り出して変形すると

$$\mathbf{\Gamma}_{2:N} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-2} \\ \mathbf{c}^T (\mathbf{A}_d)^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}_d = \mathbf{\Gamma}_{1:N-1} \mathbf{A}_d$$

である。この関係から導かれる

$$\mathbf{A}_d = (\mathbf{\Gamma}_{1:N-1}^T \mathbf{\Gamma}_{1:N-1})^{-1} \mathbf{\Gamma}_{1:N-1}^T \mathbf{\Gamma}_{2:N}$$

により、 $\mathbf{A}_d$ が求められる。連続型の遷移行列 $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} \Delta t = \ln(\mathbf{A}_d) \rightarrow \mathbf{A} = \frac{\ln(\mathbf{A}_d)}{\Delta t}$$

で求められる。

$\mathbf{\Gamma}_{1:N}$ と $\mathbf{\Omega}_{1:N}$ の分解は特異値分解を利用する。ハンケル行列を特異値分解して

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$$

と表す。 $\mathbf{\Sigma}$ は $\mathbf{H}$ の固有値を降順に並べた対角行列である。 $\mathbf{U}$ は左特異ベクトルを並べた行列、 $\mathbf{V}^*$ は右特異ベクトルを並べた行列の随伴行列（複素共役の転置）である。有意な固有値 $\mathbf{\Sigma}_s$ とそうでない固有値 $\mathbf{\Sigma}_{ns}$ を分離して

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* = [\mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_{ns}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^* \\ \mathbf{V}_{ns}^* \end{bmatrix}$$

と記述する。有意でない固有値を除くことで、無視しても差し支えない成分（例えば、不確実な成分や非線形な成分など）を取り除くことができる。有意と判定された固有値の数がモデル次数になる。

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{V}_s^*$$

有効な固有値の数を M とすれば、 $\mathbf{\Gamma}_{1:M}$, $\mathbf{\Omega}_{1:M}$ との関係は

$$\mathbf{\Gamma}_{1:M} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{\Omega}_{1:M} = \mathbf{\Sigma}_s^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}_s^*$$

の通りに記述できそうである。これより、 $\mathbf{A}_d, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が求められる。

状態空間モデルが安定であるための条件は、 $\mathbf{A}$ のすべての固有値の実数部が負値になることである。パラメータの同定（決定）に際して SVD 法を適用する場合、インパルス応答列が短いと $\mathbf{A}$ の固有値の実数部が正値になる場合がある。1 つでも正値があるとモデルは不安定になり、このモデルで長時間のシミュレーションをすると発散する。これを防ぐためには、十分に長いインパルス応答列（後半の 0 の部分が十分に長いインパルス応答列）を用いればよい。

8. メモリ影響関数を含む 1 自由度の運動方程式の状態空間化

波の入射による浮体の動揺（1 自由度）を表す線形運動方程式は、変位量と時間量の両方で無次元化すると、次のメモリ影響のある運動方程式に変換される。

$$\ddot{x}(t) + \int_0^\infty \ell(\tau) \dot{x}(t-\tau) d\tau + x(t) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau) z(t-\tau) d\tau$$

メモリ影響関数は、インパルス応答関数の形式で表現され、それぞれ $\ell(\tau), f(\tau)$ である。入力信号は $z(t)$ であり、出力信号は $x(t)$ である。浮体動揺との関係でいえば、 $z(t)$ は入射波（を変位と時間の両方で無次元化した量、以下同じ）を表し、 $x(t)$ は浮体動揺を表す。 $f(\tau)$ はそれを波強制力に変換するインパルス応答関数である。また、 $\dot{x}(t)$ は浮体の動揺速度を表し、 $\ell(\tau)$ はそれを減衰力に変換するインパルス応答関数である。

このような方程式の状態空間化は、まずメモリ影響を表す畳み込み積分を状態空間方程式で表現し、次にそれらをもとの方程式と連立させれば、実現できる。実現理論によるとインパルス応答関数が

$$h(\tau) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{b}$$

で表されるとき、この入出力関係は、次の状態空間方程式に変換することができる。

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)$$

この関係を用いてメモリ影響を表す畳み込み積分を次の通りに状態空間方程式で表す。

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \int_0^\infty \ell(\tau) \dot{x}(t-\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}_l(t) = \mathbf{A}_l \xi_l(t) + \mathbf{b}_l \dot{x}(t) \\ \ell(\tau) &= \mathbf{c}_l^T e^{\mathbf{A}_l \tau} \mathbf{b}_l \quad y_l(t) = \mathbf{c}_l^T \xi_l(t) \end{aligned}$$

さらに、波強制力を次の通りに状態空間方程式で表す。

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \int_0^\infty f(\tau) z(t-\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \dot{\xi}_f(t) = \mathbf{A}_f \xi_f(t) + \mathbf{b}_f z(t) \\ f(\tau) &= \mathbf{c}_f^T e^{\mathbf{A}_f \tau} \mathbf{b}_f \quad y_f(t) = \mathbf{c}_f^T \xi_f(t) \end{aligned}$$

その結果として、運動方程式は次の通りに書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_f(t) &= \mathbf{A}_f \xi_f(t) + \mathbf{b}_f z(t) \\ \dot{\xi}_l(t) &= \mathbf{A}_l \xi_l(t) + \mathbf{b}_l \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) + \mathbf{c}_l^T \xi_l(t) + x(t) &= \mathbf{c}_f^T \xi_f(t) \end{aligned}$$

これを行列形式でまとめると次の通りになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi}_f \\ \dot{\xi}_l \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_l & \mathbf{B}_l \\ \mathbf{C}_f & -\mathbf{C}_l & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_f \\ \xi_l \\ x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} z$$

ここで、それぞれの行列は次式で定義される。

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_l = [\mathbf{b}_l \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_l^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_f^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

さらに、行列群をまとめて簡潔に表しておく。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{b}_u z \\ \mathbf{x}_u &= \begin{Bmatrix} \xi_f \\ \xi_l \\ x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_l & \mathbf{B}_l \\ \mathbf{C}_f & -\mathbf{C}_l & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_u = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

離散型状態空間モデルは、連続型状態空間モデルの遷移行列と入力ベクトルを

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ud} &= e^{\mathbf{A}_u \Delta t} \\ \mathbf{b}_{ud} &= \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_u s} ds \mathbf{b}_u \end{aligned}$$

の通りに変換すれば得られる。

$$\mathbf{x}_u(t + \Delta t) = \mathbf{A}_{ud} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{b}_{ud} z(t)$$

しかし、この変換は前節の「最終形」を変換しているので変換過程で数値誤差が発生しやすい。そこで、運動方程式に戻って、外力項と減衰項にわけて整理してみる。

$$\begin{aligned} \xi_f(t + \Delta t) &= \mathbf{A}_{fd} \xi_f(t) + \mathbf{b}_{fd} z(t) \\ \xi_l(t + \Delta t) &= \mathbf{A}_{ld} \xi_l(t) + \mathbf{b}_{ld} \dot{x}(t) \end{aligned}$$

ここで、各種行列は次の通りに定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{fd} &= e^{\mathbf{A}_f \Delta t}, \quad \mathbf{b}_{fd} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_f s} ds \mathbf{b}_f \\ \mathbf{A}_{ld} &= e^{\mathbf{A}_l \Delta t}, \quad \mathbf{b}_{ld} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_l s} ds \mathbf{b}_l \end{aligned}$$

さらに、 $\ddot{x}(t) + \mathbf{c}_l^T \xi_l(t) + x(t) = \mathbf{c}_f^T \xi_f(t)$ については

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}_u + \mathbf{C}_u \xi_u \\ \mathbf{C}_u &= [\mathbf{C}_l \quad \mathbf{C}_m], \quad \xi_u = \begin{Bmatrix} \xi_l \\ \xi_f \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

に変形できるので

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{C}_{md} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{C}_{ud} \xi_u(t) \\ \mathbf{C}_{md} &= e^{\mathbf{C}_m \Delta t}, \quad \mathbf{C}_{ud} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{C}_m s} ds \mathbf{C}_u\end{aligned}$$

を得る。さらに、 $\mathbf{C}_{ud}$ を展開すれば

$$\mathbf{C}_{ud} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{C}_m s} ds \mathbf{C}_u = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{C}_m s} ds [\mathbf{C}_l \quad \mathbf{C}_m]$$

なので、新たに

$$\mathbf{C}_{ld} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{C}_m s} ds \mathbf{C}_l, \quad \mathbf{C}_{md} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{C}_m s} ds \mathbf{C}_f$$

を定義すれば、状態方程式は

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{C}_{md} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{C}_{ld} \xi_l(t) + \mathbf{C}_{fd} \xi_f(t)$$

となる。離散化された3つの状態方程式をまとめれば次式を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(t + \Delta t) &= \mathbf{A}_{ud} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{b}_{ud} z(t) \\ \mathbf{A}_{ud} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{fd} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ld} & \mathbf{B}_{ld} \\ \mathbf{C}_{fd} & -\mathbf{C}_{ld} & \mathbf{C}_{md} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{ud} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_{fd} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

参考文献

- Kung, S.Y. : A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. Proc. of the 12-th Asilomar Conf. Circ. Syst. Comp., Nov., 1978.
- Ho, B., Kalman, R., 1966. Effective reconstruction of linear state-variable models from input/output functions. Regelungstechnik 14 (12), 417-441.
- 足立修一, 丸田一郎 : カルマンフィルタの基礎, 東京電機大学出版局, 2012.
- 柏木正, 岩下英嗣 : 船体運動耐航性能編 (船舶海洋工学シリーズ 4), 日本船舶海洋工学会監修, 成山堂書店, 2012.
- 大津皓平: モデルベースモニタリングと統計的制御, 海文堂出版, 2012.
- 日野幹雄: スペクトル解析, 朝倉書店, 2010.